MICHELINE DECORPS-FOULQUIER
MICHEL FEDERSPIEL
(Eds.)

Apollonius de Perge, *Coniques*

Tome 2.3: Livres II – IV

Apollonius de Perge, *Coniques*
Tome 2.3: Livres II–IV

Scientia Graeco-Arabica

herausgegeben von
Marwan Rashed

Volume 1

Apollonius de Perge, *Coniques*

Texte grec et arabe établi, traduit et commenté
sous la direction de Roshdi Rashed

Volume 1/2.3

Walter de Gruyter · Berlin · New York

Tome 2.3: Livres II–IV

Édition et traduction
du texte grec

par

Micheline Decorps-Foulquier
et Michel Federspiel

Walter de Gruyter · Berlin · New York

ISBN 978-3-11-021722-3
e-ISBN 978-3-11-021723-0
ISSN 1868-7172

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

© 2010 Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/New York

Umschlaggestaltung: Christopher Schneider, Laufen
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH und Co. KG, Göttingen
∞ Gedruckt auf säurefreiem Papier

Printed in Germany

www.degruyter.com

AVANT-PROPOS

Le présent tome est consacré aux Livres II, III et IV des *Coniques* d'Apollonius de Perge, transmis en grec dans la recension d'Eutocius d'Ascalon (VI^e siècle). Sa présentation est identique à celle du tome consacré au Livre I. Il comprend l'édition critique du texte grec et la traduction française ; il contient aussi des notes historiques et philologiques destinées à éclairer l'histoire complexe de ces trois Livres, qui ont été lus et étudiés pendant toute l'Antiquité et parfois même retouchés.

L'édition critique des Livres II, III et IV repose sur les mêmes principes que celle du Livre I. Il s'agit toujours d'établir le texte qu'Eutocius a édité à partir de plusieurs sources, dont il donne un aperçu dans son commentaire.

La traduction française, due à Michel Federspiel, s'est efforcée de perdre le moins possible des traits de la diction très codifiée des mathématiciens grecs tout en déférant aux exigences du français. Lorsque la conciliation s'est avérée impossible, il a adopté des conventions de traduction, sur lesquelles on consultera les notes au Livre I.

Comme dans le précédent tome, un lexique des termes techniques accompagne l'édition du texte.

Micheline Decorps-Foulquier

SOMMAIRE

TEXTE ET TRADUCTION

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I. L'EDITION D'EUTOCIUS DU LIVRE II

Apollonius[1] a présenté le contenu du Livre II dans sa lettre d'envoi du Livre I, qui sert de préface générale à l'ensemble de l'ouvrage. Cette présentation semble lui suffire, puisque la préface du Livre II ne comporte aucune considération d'ordre mathématique. C'est une lettre toute personnelle à l'adresse de son ami Eudème ; elle montre qu'Apollonius poursuit son projet en lui faisant parvenir le Livre II revu et corrigé. Cette nouvelle version constitue la mise au net attendue d'une première rédaction dont il a exposé les circonstances dans sa première lettre d'envoi[2]. La transmission de l'ouvrage à son dédicataire, avec une préface en bonne et due forme, est la marque d'une mise en circulation officielle.

Dans sa première partie, le Livre II, tel qu'il a été transmis en grec, explore les propriétés des asymptotes de l'hyperbole, qui sont aussi celles de l'hyperbole opposée (II.15) et celles des hyperboles conjuguées (II.17) ; le cœur du Livre présente un ensemble de résultats relatifs aux sécantes et aux tangentes (prop. 24-43)[3]. Il n'y a pas de différence très sensible, pour le Livre II, entre l'organisation interne du texte qui nous est parvenu en grec dans l'édition d'Eutocius et celle du texte arabe. On ne fera pas le même constat dans le Livre IV.

Le Livre II s'achève par des *problèmes* de construction. Or, contrairement à ce que pourrait laisser supposer la division adoptée par Halley[4] dans son édition de 1710, et reprise par Heiberg, la présentation de

[1] J'utiliserai désormais la forme latinisée du nom d'Apollonios.

[2] Voir mon *Introduction* à l'édition du texte grec du Livre I, *Apollonius* : *Les Coniques*, tome 1.2, p. IX-XVIII et Note complémentaire [1] ; pour une vue d'ensemble des pratiques éditoriales de l'Antiquité, voir R. Devreesse, *Introduction à l'étude des manuscrits grecs*, Paris, 1954 ; J. Mansfeld, *Prolegomena mathematica. From Apollonios of Perga to the late neoplatonists*, Leyde, 1998 ; T. Dorandi, *Le stylet et la tablette. Dans le secret des auteurs antiques*, Paris, 2000.

[3] Le commentaire mathématique des propositions du Livre II, dû à Roshdi Rashed, est donné dans le tome 2.1.

[4] Halley a adopté les divisions de la traduction de Commandino.

ces *problèmes* dans les deux traditions grecque et arabe n'offre guère de différences. On a vu que, dans le *Vaticanus gr.* 206, même si les numéros des propositions sont le plus souvent omis, les signes qui marquent le passage à une nouvelle proposition sont sans aucune ambiguïté[5]. On a donc dans **V**, non pas 10 propositions (= prop. 44-53 des éditeurs Halley et Heiberg) pour couvrir l'ensemble de ces *problèmes*, qui sont au nombre de 7, mais 21 propositions (prop. 44-64).

On ne constate pas de rupture ni dans le fond ni dans la forme entre les propositions du Livre I et celles du Livre II, telles qu'elles sont éditées par Eutocius. Le Livre II se situe dans la continuité du Livre I, dont les dernières propriétés (I.46-51) en particulier sont abondamment utilisées. Eutocius, qui ne commente que 9 propositions (1, 2, 11, 12, 14, 23, 24, 28, 48), ne fait pas état de difficultés particulières pour son travail d'édition.

L'unité du Livre II et l'homogénéité d'ensemble du lexique font que les entorses à ce bon ordre se repèrent aisément : si l'on met à part les *problèmes* (prop. 4 et 44-64), dont je traiterai plus loin, on voit apparaître dès le début du Livre des signes d'écriture rapide et relativement négligée ; on observe également que la proportion de passages rédigés de manière non canonique augmente, tout comme le nombre de curiosités syntaxiques et lexicales. Je rassemble dans mes notes au texte et mes notes complémentaires les éléments susceptibles d'éclairer ces anomalies, qui ne relèvent pas toutes d'un même type d'explication. On continuera de faire les mêmes observations dans les Livres suivants.

1.1 La rédaction des *problèmes* dans le Livre II

Tout comme le Livre I, le Livre II s'achève par un ensemble de *problèmes* dont la rédaction donne à cette partie du traité une physionomie particulière. La langue utilisée dans les *problèmes* des *Coniques* (I. 52-60, II.4, II.44-53) a fait l'objet d'une étude spécifique de M. Federspiel[6], qui a mis en évidence la présence dans ces propositions d'un certain nombre de tours très particuliers, absents des *théorèmes* du traité. D'autre part, on observe que les écarts par rapport à la langue des *théorèmes* ne concernent pas le lexique propre à l'étude des sections coniques, puisqu'on retrouve dans les *problèmes* la terminologie du traité : ils portent sur la présence de

[5] La fin de la proposition est signalée par deux points superposés suivis d'un trait horizontal dans l'alignement du dernier mot. Le début de la proposition suivante est signalé par un retour à la ligne (avec l'initiale hors justification ou intégrée à la justification).

[6] « Les problèmes des Livres grecs des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. Des propositions mathématiques en quête d'auteur », *Les Études Classiques*, 76, 2008, p. 321-360.

termes mathématiques qui renvoient à des emplois archaïques[7], sur l'usage particulier de certaines particules[8], sur la concentration de variantes rares des formes verbales couramment utilisées par les mathématiciens pour certaines opérations ou dans certaines parties de la proposition. Dans tous ces *problèmes*, on constate également la même proximité avec des traditions linguistiques non euclidiennes[9].

Les *problèmes* du Livre I constituaient un groupe très cohérent centré autour de la construction des sections coniques (parabole, hyperbole, ellipse, sections opposées, sections opposées conjuguées), et excellemment écrit. Les *problèmes* du Livre II se proposent de construire, outre l'hyperbole d'asymptotes données, des diamètres, des axes et des tangentes, selon une progression tout aussi ordonnée. On note cependant que les *problèmes* 44-53 du Livre II se différencient assez nettement des *problèmes* du Livre I, à la fois, par le mode de rédaction adopté (ils présentent chaque fois l'*analyse* et la *synthèse*), et par leur style cursif et répétitif, en partie explicable par ce mode d'exposition et par la nécessité, compte tenu de la nature des constructions, de traiter des cas de figure.

Quand on compare la rédaction des *problèmes* du Livre I et celle des *problèmes* du Livre II, on est surpris de ne trouver que de très rares tournures communes[10]. Le fait n'est pas explicable par la nature du sujet traité, puisque, comme on l'a vu, les écarts constatés portent sur des syntagmes dont l'emploi n'est pas lié spécifiquement au contenu des deux Livres. Cette absence de rencontre montre, pour le moins, qu'à l'époque d'Apollonius, l'expression mathématique dans les *problèmes* puise dans un répertoire qui a gardé une relative diversité.

On aimerait connaître la raison qui fait que, dans le traité des *Coniques*, la langue des *problèmes* présente une telle spécificité, mais, comme, nous n'avons rien conservé des sources directes d'Apollonius, il est bien difficile

[7] Comme le tour du Livre I τὸ πρὸς τῇ γωνίᾳ σημεῖον (littéralement « le point appliqué à l'angle ») pour désigner le sommet de l'angle (voir tome 1.2, Note complémentaire [97].

[8] Ainsi, toujours dans le Livre I, l'emploi des conjonctions ἵνα et ὅπως au sens consécutif, comme variante de ὥστε, ou le recours à l'expression ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ comme variante de ὥστε en tête de phrase (« dans ces conditions ») ; voir M. Federspiel, *ibid.*, p. 330-332.

[9] Pour le détail des occurrences et leur analyse, on se reportera à l'article de M. Federspiel précité, p. 339-359.

[10] On note le tour périphrastique ἔστω (au sens existentiel ou absolu) suivi du participe dans les *ecthèses* de I.52 et II.4, et le tour périphrastique καὶ δέον ἔστω des propositions I.57 et II.4 (voir Note complémentaire [9] au Livre II). Sur ἔστω (au sens existentiel ou absolu) suivi du participe, voir M. Federspiel, « Sur l'élocution de l'ecthèse dans la géométrie grecque classique », *L'Antiquité classique*, 79, 2010, p. 104-108.

de répondre à cette interrogation. Il suffira de constater ici que, dans la rédaction des *problèmes*, Apollonius n'a pas imprimé sa marque et son style autant que dans les *théorèmes*, ce qui fait que sa rédaction des *problèmes* nous donne une vision plus concrète de l'expression des mathématiciens de son époque.

1.2 Les pratiques éditoriales d'Eutocius

Le commentaire d'Eutocius du Livre II fournit quelques éléments de réflexion sur sa pratique éditoriale[11]. Je prendrai deux exemples :

1) Dans son commentaire à la proposition II.14, Eutocius reproduit pour la bonne information du lecteur deux propositions[12], qui se rapportent en fait au corollaire. Il introduit leur exposé de la manière suivante : « dans certains manuscrits, j'ai trouvé aussi des propositions que j'ai supprimées comme superflues. »[13]. Il s'en explique ensuite : on n'y trouve pas de « démonstrations » (ἀποδείξεις), mais des « différences de figures » (διαφορὰς καταγραφῶν). À lire la deuxième partie de la phrase citée, on pourrait penser que, si Eutocius a opéré une *suppression*, c'est que l'ensemble de la tradition manuscrite à sa disposition n'offrait qu'un seul texte, à savoir un texte où les deux assertions du corollaire (« parmi toutes les droites asymptotes de la section, ce sont les droites ΑΒ et ΑΓ qui sont les plus rappochées de la section », et « l'angle ΒΑΓ est plus petit que l'angle compris par d'autre asymptotes de la section ») faisaient l'objet de développements spécifiques constituant deux propositions à part entière. Mais, pour se référer à la tradition manuscrite, il continue, comme dans tout son commentaire, à utiliser la séquence ἔν τισι (*s.e.* ἀντιγράφοις) ; en disant avoir trouvé ces développements « dans certains <manuscrits> », il évoque donc toujours plusieurs éditions à sa disposition, conformément à ses propos liminaires[14]. L'ambiguïté de la formulation nous invite à la prudence. Peut-on être sûr que tous les manuscrits d'Eutocius présentaient ces deux propositions ? On peut même être invité à penser le contraire, et à supposer que, si Eutocius parle de *suppression*, c'est par rapport à son manuscrit de base. La traduction arabe, en effet, n'a pas l'examen de ces cas de figure. À la condition, bien entendu, que les traducteurs ne suivent pas ici leur édition d'Eutocius, mais leur source préeutocienne, on peut supposer qu'il existait des manuscrits exempts de ces développements supplémentaires. Eutocius a pu les connaître et avoir pris sa décision

[11] Sur cette pratique, voir mon *Introduction* au Livre I, tome 1.2, p. XLVII-LII.

[12] *Coniques*, II, éd. Heiberg, p. 296, 8-300,10 et 310, 11-302,7.

[13] Voici le texte grec (éd. Heiberg, *ibid*., p. 294, 23-296, 1) : Ηὑρέθησαν δὲ ἔν τισι καὶ ταῦτα τὰ θεωρήματα ἐγγεγραμμένα ἅπερ ὡς περιττὰ ἀφῃρέθη ὑφ' ἡμῶν.

[14] Voir le début de son commentaire, *Coniques*, II, éd. Heiberg, p. 176, 17-22.

éditoriale à la faveur de cette comparaison, son manuscrit de base représentant alors une tradition plus ouverte aux interpolations.

2) La comparaison des deux versions de la proposition II.4, relative à la construction d'une hyperbole donnée, celle qui est éditée dans le traité des *Coniques* et celle que reproduit Eutocius dans son commentaire de la proposition II.4 du traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède[15], permet de vérifier qu'Eutocius respecte scupuleusement le texte de ses sources quand il est éditeur et non plus commentateur[16]. On observe que les tournures particulières de la version des *Coniques*, qui relèvent de la langue spécifique des *problèmes*, ont été conservées, alors que la version du commentaire, qu'il doit rendre accessible à ses lecteurs, présente des variantes plus courantes[17].

1.3 Les schémas marginaux dans **V**

Le *Vaticanus gr.* 206 a gardé la trace de la lecture très attentive qui a été faite des *problèmes* du Livre II par un ou deux érudits, sans doute à la fin de l'Antiquité. En marge de la proposition 51, pour la *synthèse* du cas de l'hyperbole (f. 89v et 90r), et en marge de la proposition 52 (f. 90v), on trouve des figures reproduites de la main du copiste, qui illustrent la recherche personnelle d'un lecteur sur les cas de figure[18]. En marge des propositions 50 et 51 (f. 87r, 88v et 89v), on trouve également des schémas reproduits par le copiste, mais plus altérés, qui illustrent par des droites et des figures carrées et rectangulaires, des opérations sur les proportions. Dans la proposition 51 (f. 89v), ces schémas restituent des proportions tacitement requises dans le texte[19], et, dans la proposition 50, ils illustrent les deux opérations *à intervalle égal* utilisées à la fin de la *synthèse* de l'hyperbole (f. 87r), ainsi que les deux opérations *à intervalle égal* utilisées

[15] *Archimède*, IV, éd. Mugler, p. 113, 24-114, 17.

[16] Voir mes notes complémentaires [8] et [10] au Livre II.

[17] Dans son commentaire du traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède, Eutocius établit une distinction très claire entre l'édition d'un texte et sa réécriture pour le rendre plus accessible (voir *Archimède* IV, éd. Mugler, p. 88, 13-89, 15). Sur ce sujet, voir mes deux articles, M. Decorps-Foulquier, « Eutocius d'Ascalon éditeur du traité des *Coniques* d'Apollonios de Pergé et l'exigence de clarté : un exemple des pratiques exégétiques et critiques des héritiers de la science alexandrine », dans G. Argoud et J.Y. Guillaumin (éds), *Sciences exactes et appliquées à Alexandrie*…, Saint-Etienne, 1998, p. 87-101, et « Eutocius d'Ascalon et la *Mesure du cercle* d'Archimède, *Les Études Classiques*, 77, 2009, p. 313-332.

[18] Voir Notes complémentaires [50] et [51] au Livre II.

[19] Voir Note complémentaire [49] au Livre II.

à la fin de la *synthèse* de l'ellipse (f. 88v). La même opération sera illustrée de manière similaire dans les propositions 19, 21 et 54 du Livre III[20].

Ces figures et schémas sont absents de la traduction arabe. Les schémas relatifs aux proportions, en particulier, ont été tronqués par les différentes reliures de **V** ; ils peuvent être reconstitués par le témoignage des copies byzantines. Le témoignage le plus fidèle est celui du *Vaticanus gr*. 203 (**v**) ; le manuscrit **c** omet parfois des séries entières. Les schémas ont été corrigés et interprétés par H.G. Zeuthen à l'intention de l'éditeur Heiberg, qui les a présentés dans le volume I des *Coniques* (p. VII-XII).

L'ensemble de ces schémas et figures s'inscrit dans les cadres habituels de la tradition exégétique de la fin de l'Antiquité. Les schémas sur les proportions, en particulier, ont eu le temps de s'altérer par les recopiages successifs. Des erreurs ont été commises dans la lecture des lettres désignatrices, mais aussi dans l'arrangement des figures : les alignements et regroupements attendus dans la présentation des éléments constitutifs des opérations n'ont pas été respectés par les copistes. Il est donc vraisemblable que cette lecture érudite remonte à l'Antiquité[21], mais elle reste assez récente pour n'avoir pas investi les espaces réglés dévolus aux figures du traité.

II. L'EDITION D'EUTOCIUS DU LIVRE III

Le Livre III rassemble un grand nombre de théorèmes, dont Apollonius dit dans sa préface du Livre I qu'ils sont nécessaires « à la construction des lieux solides et aux diorismes ». Le Livre III permet de franchir un pas important en établissant de nouvelles propriétés des coniques[22].

Le livre III est le seul des Livres des *Coniques* à nous être parvenu sans la lettre d'envoi de l'auteur. Cette absence remonte au moins au VI^e siècle, puisqu'Eutocius la signale à son lecteur dans sa préface[23]. La traduction

[20] Voir Notes complémentaires [29], [33], [35] et [36] au Livre III.

[21] Heiberg les rapportait à un érudit byzantin de la fin du IX^e siècle (*Coniques*, II, p. LXVIII).

[22] Le commentaire mathématique des propositions du Livre III, dû à Roshdi Rashed, figure dans le tome 2.1.

[23] *Coniques*, II, éd. Heiberg, p. 314, 5-6. Je donne ici la traduction de la préface entière (traduction inédite de M. Federspiel) : « Les Anciens, mon très cher Anthémius, se sont beaucoup intéressés au Livre III des *Coniques*, comme on le voit par les multiples éditions dont il a été l'objet. Il n'a pas de lettre-dédicace, à la différence des autres, et je n'ai pas trouvé chez mes prédécesseurs de scolies à ce Livre valant la peine d'êtres rapportées, quoique son contenu soit digne d'étude, comme le dit Apollonius en personne dans sa préface à l'ensemble de l'ouvrage. Tout en est exposé par moi de

arabe ne transmet pas non plus la préface attendue, mais le fait est moins significatif qu'il n'y paraît, puisque les Arabes n'ont pas transmis non plus la préface du Livre II. Le manque de préface peut faire naître *a priori* une incertitude sur la provenance du texte[24] transmis par Eutocius. Si l'on met de côté l'hypothèse d'une perte accidentelle de la préface du Livre III, il ne reste que deux possibilités : (1) soit la préface n'a jamais été écrite par Apollonius. (2) Soit cette absence témoigne d'une rupture dans les conditions de mise en circulation du Livre III ; elle ouvre la possibilité que le texte transmis ne soit pas celui de l'édition revue et corrigée dont Apollonius fait état dans la préface du Livre I. Mais aucun élément concret ne nous engage à poursuivre cette piste. Dans sa préface du Livre I, Apollonius fait bien allusion à l'existence de copies non révisées, transmises à ses amis ou disciples, mais elles ne concernent que les Livres I et II ; quant à la préface du Livre IV, elle nous assure que les Livres I-III ont bien été mis en circulation dans leur version officielle à l'intention d'Eudème de Pergame.

Les sources indirectes grecques ne fournissent pas davantage d'indices. Pappus, on l'a vu, suit l'ordre des propositions des *Coniques*[25]. Or les 13 lemmes relatifs au Livre III, qui couvrent l'ensemble du Livre jusqu'à sa dernière proposition (prop. 56), ne révèlent pas de rupture par rapport à l'ordonnance du texte que nous avons ; quant aux décalages que continuent à présenter certains d'entre eux par rapport au texte des *Coniques*, ils ne sont pas de nature différente de ceux dont témoignent les *lemmes* aux Livres I et II, et ne rompent jamais le lien avec les relations démontrées dans le Livre III[26]. Enfin, et surtout, l'analyse interne, mathématique et linguistique, ne décèle aucun signe susceptible de douter de la provenance apollonienne du texte transmis en grec. La proximité des deux textes grec et arabe dans le Livre III apporte à ce constat une confirmation.

manière claire à ton intention ; la démonstration repose sur les Livres précédents et les scolies que j'y ai jointes. »

[24] Voir *supra*, p. IX.

[25] Voir tome 1.2, p. XLV-XLVII. Les lemmes de Pappus aux Livres I-III et leur correspondance avec le texte grec des *Coniques* ont été étudiés par J.L. Heiberg dans ses *Prolegomena*, (*Coniques*, II, p. LVIII-LXI), par J.P. Hogendijk, *Ibn al-Haytham's Complexion of the Conics*, p. 43-44, et par A. Jones, *Pappus of Alexandria. Book 7 of the Collection*, p. 474-485 ; voir également mon étude *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Pergé…*, p. 237-270.

[26] Voir mes Notes complémentaires [10], [20], [41], [42], [44], [45], [50] au Livre III.

2.1 Les informations du *Commentaire* d'Eutocius au Livre III

Le commentaire d'Eutocius au Livre III est relativement nourri, et porte essentiellement, comme le commentaire au Livre II, sur les cas de figure des propositions, les variantes alternatives des démonstrations, et les étapes démonstratives qui ne sont pas formulées explicitement. Sa lecture est toujours aussi utile pour l'histoire du texte grec transmis, car le commentaire livre des informations à la fois sur les principes éditoriaux d'Eutocius et sur l'état des sources à sa disposition. Ces informations sont autant de points de repère quand on cherche à mesurer l'envergure réelle des choix éditoriaux d'Eutocius et les évolutions que son édition a pu connaître après lui.

2.1.1 Les principes éditoriaux d'Eutocius

Les commentaires d'Eutocius aux propositions 5, 16, 17, 23 et 31 montrent que les exigences du mathématicien, qu'il soit exégète ou éditeur, restent les mêmes. C'est le *manque de clarté* (ἀσαφές ἐστι τὸ ε′ θεώρημα[27]) ressenti à la lecture de la proposition 5, relative aux sections opposées, qui justifie que le commentateur réécrive une démonstration moins synthétique, où le cas des tangentes à une seule des deux branches est distingué du cas des tangentes à chacune des deux sections, et où ajouts et retranchements de figures communes sont nettement explicités. Mais ce manque de clarté n'a pas conduit l'éditeur à intervenir. On retrouve ici le même respect du texte que chez les éditeurs alexandrins[28]. Les commentaires aux propositions 16, 17, 23[29] montrent à la fois l'exigence de généralité du mathématicien, qui refuse au cas particulier le statut de proposition indépendante, mais aussi le respect du lecteur, auquel on donne tous les moyens de juger des choix opérés. Le commentaire de la proposition 31 montre le souci de cohérence dans l'exposé par le refus de la redondance[30]. A la fin du commentaire de la proposition 5[31], Eutocius fait remarquer au lecteur que, pour les propositions qui suivent et qui conservent les mêmes hypothèses, il a pris soin d'éditer une seule figure par proposition, mais assez complète pour être susceptible, sans modification de la démonstration, de se prêter au traitement de tous les cas engendrés par la position des points pris sur les sections et le tracé des parallèles. Ces exemples, qui s'ajoutent à ceux des commentaires aux

[27] *Coniques*, II, éd. Heiberg, p. 320, 7.
[28] Sur ce respect du texte de l'auteur, voir tome 1.2, p. LII.
[29] Voir Notes complémentaires [28], [30] et [38] au Livre III.
[30] Voir Note complémentaire [43] au Livre III.
[31] *Coniques*, II, éd. Heiberg, p. 322, 1-10.

Livres I et II, nous invitent à une grande prudence et à ne pas rapporter *a priori* à Eutocius les maladresses, surcharges et incohérences qui dénaturent parfois le texte grec de certaines propositions des *Coniques*.

2.1.2 Le témoignage d'Eutocius sur ses sources

a) Le témoignage sur la tradition manuscrite

Dans la préface de son commentaire au Livre III, Eutocius fait référence à l'existence d'éditions très variées (πολύτροποι… ἐκδόσεις) du Livre III, et y voit un signe du grand intérêt que les Anciens ont pris à sa lecture[32]. Il fait également allusion aux commentaires de ses prédécesseurs (σχόλια… τῶν πρὸ ἡμῶν), dont il estime qu'ils ne sont pas à la hauteur de l'ouvrage d'Apollonius. L'existence d'éditions variées du texte est confirmée dans la suite du commentaire par les variantes alternatives qu'Eutocius nous dit avoir trouvées dans « certains manuscrits »[33], par les choix différents des cas de figure qui sont faits dans les différentes éditions consultées[34], par les différences signalées dans l'ordonnance des propositions, où l'on voit que, dans certaines traditions, l'exposé des cas particuliers a été intégré au corps du traité[35]. Dans tous ces cas, et, comme il le dit lui-même au début de sa préface générale, Eutocius a pris une décision éditoriale.

Mais, si l'on peut avoir une idée claire des principes éditoriaux d'Eutocius, il n'en est pas de même de la nature des choix opérés, car Eutocius ne donne aucune précision sur les sources entre lesquelles il a dû choisir : on sait quel texte il rejette, mais on ne sait pas pour autant si, en cela, il suit une tradition manuscrite, et laquelle.

Si l'on se fonde sur les retranchements dont Eutocius témoigne dans son commentaire des propositions 16, 17, 23, on retombe sur les mêmes hypothèses formulées plus haut, à propos du corollaire de la proposition II.14. On est conduit à penser que, lorqu'il parle de *suppressions*, c'est plutôt par rapport à l'édition qui lui sert de base de travail, et donc que cette source était ouverte aux interpolations érudites. On peut supposer également que, s'il a fait de tels choix, c'est que sans doute il y était invité par la comparaison avec d'autres sources manuscrites. On ne connaît pas ces autres traditions, malheureusement, mais on observe que la traduction arabe de ces propositions n'a pas les développements qu'Eutocius *supprime*.

[32] Voir *supra*, note 23.

[33] Voir son commentaire aux propositions 18 et 19 (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 330, 11-334, 24), et ma Note complémentaire [28] au Livre III.

[34] Voir son commentaire à la proposition 4 (*ibid.* p. 318, 17-320, 5), et ma note complémentaire [7] au Livre III.

[35] Voir Note complémentaire [38] au Livre III.

Prenons maintenant les propositions pour lesquelles Eutocius affirme que ses manuscrits sont partagés. C'est le cas des propositions 4 et suivantes, relatives aux sections opposées, et dont il nous dit : « certaines manuscrits présentent les deux tangentes sur une même section, d'autres ne les présentent pas sur une même section, mais une sur chaque section, les deux se rencontrant… dans l'angle adjacent à l'angle formé par les asymptotes[36]. » Or on observe que, dans les propositions 4 à12, dont il s'agit, la traduction arabe présente le même choix que le texte grec de l'un ou de l'autre des deux cas de figure précités, ou même des deux.

Si, dans toutes les propositions précitées, les traducteurs arabes n'ont pas suivi leur édition d'Eutocius, on peut s'appuyer sur ces exemples pour estimer que, vraisemblablement, lorsqu'Eutocius prend des décisions éditoriales qui le conduisent à ne pas retenir le texte de certains manuscrits, c'est en se fondant sur d'autres sources à sa disposition.

b) Le témoignage sur la tradition d'exégèse

Dans son commentaire au Livre III, Eutocius expose ou signale un nombre important de variantes alternatives qui illustrent un autre procédé démonstratif ou exposent des démonstrations bâties sur un autre cas de figure, ces mêmes démonstrations pouvant être accompagnées elles-mêmes de variantes sur des points particuliers. Elles sont présentées dans mes notes complémentaires. Il n'y a rien de surprenant à cette abondance, car la matière même du Livre III s'y prête. Les propositions concernées sont les propositions 1, 6, 13, 18, 19, 23, 33, 34, 35, 36 et 44.

Quelques-unes des démonstrations exposées ou mentionnées dans le commentaire d'Eutocius recueillent des procédés démonstratifs qui trouvent des échos, même lointains, dans des états de texte plus anciens dont certaines ruptures ou anomalies font soupçonner l'existence[37]. On observe parfois aussi de rares rencontres avec la tradition arabe. Mais, de manière générale, le matériau exégétique conservé par Eutocius montre, après analyse, qu'il témoigne essentiellement de la tradition scolaire de la fin de l'Antiquité.

2.1.3 Les interventions postérieures à Eutocius

Le texte ainsi que le *corpus* de figures qui lui est attaché ont subi quelques changements après Eutocius. Je donne dans mes notes au texte et mes notes complémentaires les moyens divers qui nous permettent, autant que faire se peut, de repérer les modifications apportées. Elles ne donnent pas le sentiment de n'être au départ que des remarques marginales

[36] *Coniques*, II, éd. Heiberg, p. 318, 20-24.

[37] Voir mes Notes complémentaires [1], [13], [19], [24].

dispersées, que les copistes successifs auraient fini par intégrer au corps du texte. Elles montrent la volonté d'intervenir dans la rédaction de propositions apparentées et révèlent une certaine constance dans l'intention[38], ce qui, me semble-t-il, doit nous orienter vers l'hypothèse d'une révision de l'édition d'Eutocius.

III. L'EDITION D'EUTOCIUS DU LIVRE IV

L'étude des « rencontres » (contact ou intersection) entre sections coniques clôt l'ensemble des Livres consacrés aux « éléments »[39]. Les propositions 24-54, qui constituent le cœur du Livre, sont consacrées à la détermination du nombre des points communs[40] ; il faut leur ajouter les trois propositions finales qui procèdent à l'examen de cas de figure relatifs aux rencontres entre sections opposées (prop. 55-57). Cette étude est précédée de 23 propositions liminaires en relation avec les propositions III.30 à 40. L'analyse mathématique menée à l'occasion de la présente édition offre la possibilité d'établir un lien plus direct avec la recherche menée dans l'ensemble du Livre IV[41] : en intégrant ces 23 propositions, on aurait dans le Livre IV une théorie des différentes formes de rencontre entre droite, cercle et sections coniques. La structure du dernier Livre des « éléments » des coniques est donc relativement claire.

3.1 Le témoignage du commentateur sur le Livre IV

Il est intéressant de revenir sur la manière dont le commentateur Eutocius présente le Livre IV à son dédicataire Anthémius[42]:

> Le Livre IV, mon cher Anthémius, se propose de rechercher *de combien de manières les sections de cône se rencontrent entre elles et rencontrent la circonférence de cercle*, soit en se touchant, soit en se coupant. Il est agréable à lire et clair, tout particulièrement dans notre édition, et ne demande pas de commentaires ; les notes marginales suffisent pour suppléer à ce qui manque. Toutes les démonstrations qu'il contient sont fondées sur la

[38] Voir mes Notes complémentaires [2], [3], [5], [6], [12].

[39] Pour l'analyse mathématique des propositions du Livre IV, voir *Apollonius* : *Les Coniques*, éd. R. Rashed, tome 2.2, p. 3-112.

[40] On distingue dans la présentation d'Apollonius deux ensembles : (1) les propositions 24-40 relatives à la rencontre des sections entre elles (prop. 24-35) et avec les sections opposées (prop. 36-40) ; (2) les propositions 41-54 relatives à la rencontre de l'hyperbole à deux branches avec les sections opposées.

[41] Voir le commentaire mathématique de R. Rashed, tome 2.2, p. 9-60.

[42] *Coniques*, éd. Heiberg, II, p. 354, 2-11.

réduction à l'absurde, comme Euclide aussi a mené ses démonstrations sur les sections et les contacts de cercle.

On peut faire les observations suivantes :

1) Pour définir le contenu du Livre IV, Eutocius ne puise pas dans la préface d'Apollonius du Livre IV, pourtant plus précise, puisqu'il y est question du plus grand nombre possible de points (κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα) communs à deux sections (deux sections coniques, une section conique et le cercle, une section conique (ou le cercle) et des sections opposées) ; il préfère reproduire littéralement la formule plus générale de la préface du Livre I, en ajoutant de quelles « rencontres » il s'agit, points d'intersection et points de contact, et en établissant le rapprochement qui s'impose avec Euclide (*cf. Éléments* III.10 et 13) aussi bien pour la nature de la recherche entreprise que pour le type de preuve choisi. Aux yeux du commentateur, la formule de la préface du Livre I est suffisamment générale pour rendre compte de l'ensemble des propositions qui traitent de ce sujet dans le Livre IV.

2) Eutocius n'accorde pas une mention spéciale aux propositions 1-23 qui concernent les tangentes et les sécantes issues d'un point extérieur à la section, sans doute parce que cette question ne fait pas l'objet d'une mention explicite dans les préfaces des Livres I et IV, et que son commentaire ne commence qu'à la proposition 24.

3) Aucune allusion n'est faite à l'existence de multiples éditions du Livre ni à l'existence de commentaires antérieurs, même de peu de valeur, comme cela avait été noté dans la préface du commentaire au Livre III[43].

4) Pour Eutocius, le Livre est « clair »[44] et « sa lecture est aisée » (et surtout, dans son édition, précise-t-il), au point qu'il estime qu'il n'a pas besoin de commentaires.

Même si Eutocius s'en explique tant bien que mal, on peut néammoins être surpris que son commentaire soit si peu fourni : il n'est constitué que de 4 démonstrations, qui concernent au total 3 propositions sur 57 : les propositions 24, 43 et 51. Les deux premières démonstrations sont relatives à la proposition 24 ; l'une la complète en examinant un cas absent du texte grec, l'autre propose une rédaction plus explicite de la proposition éditée ; les deux dernières concernent deux propositions directement apparentées, et démontrées par *réduction à l'absurde*, dont Eutocius fournit la variante attendue par la voie directe. On sait également que la *Collection Mathématique* de Pappus, telle qu'elle nous a été transmise, ne présente pas

[43] *Coniques*, éd. Heiberg, II, p. 314, 2-6.

[44] Voir mon étude, M. Decorps-Foulquier, « Eutocius d'Ascalon éditeur du traité des *Coniques* d'Apollonios de Pergé et l'exigence de clarté… ».

de *lemmes* pour le Livre IV. Faut-il penser qu'Eutocius ne disposait pas pour le Livre IV d'un matériau exégétique aussi important que pour les Livres I-III, et que cette partie du traité des *Coniques* a été moins lue au cours de l'Antiquité ? La question a déjà été posée et reste sans réponse, compte tenu des lacunes de notre documentation.

Il se peut que la minceur du contenu exégétique transmis tienne en partie au fait que la majeure partie des propositions du Livre IV est constituée par l'examen de cas de figure, et que l'étude des différents cas qui peuvent se présenter pour la détermination des points communs repose sur des bases démonstratives limitées : seuls un petit nombre de théorèmes des Livres II et III sont requis. Compte tenu du type de lecture auquel nous ont habitués les commentateurs grecs de la fin de l'Antiquité, les propositions du Livre IV leur offraient donc moins d'occasions d'intervenir que dans les Livres précédents. Il est possible aussi qu'il faille chercher une partie de l'explication dans la manière dont était édité l'ensemble des Livres I-VIII des *Coniques* avant Eutocius. Mais on ne sait pas quels ont pu être les regroupements opérés par les éditeurs, et si le Livre IV était plutôt rattaché aux autres Livres d' « éléments » ou aux Livres suivants, plus difficiles et plus originaux[45] ; auquel cas, il a pu être moins lu et moins étudié. Cette explication, en revanche, ne vaut pas pour Pappus, qui a commenté la suite des Livres du traité des *Coniques*.

3.2 La lettre d'envoi d'Apollonius

Le Livre IV a conservé sa lettre d'envoi. Celle-ci retrouve la densité de la préface du Livre I, et se différencie par là de la préface du Livre II, sans doute parce qu'Apollonius s'adresse à un nouvel interlocuteur, et qu'il se doit, pour son information, de rappeler l'histoire du projet éditorial[46]. La lettre d'envoi donne à ce sujet trois informations importantes : (1) en l'absence de préface au Livre III, elle atteste qu'Apollonius n'avait pas changé de dédicataire pour ce dernier Livre ; (2) elle nous apprend qu'Eudème de Pergame est déjà mort quand il met en circulation sa rédaction révisée du Livre IV[47] ; (3) elle confirme que le plan de « publication » déterminé dans la préface du Livre I n'est pas modifié, et qu'Apollonius continuera d'envoyer à son nouveau dédicataire, Attale, la suite des *Coniques,* Livre après Livre, au fur et à mesure de leur révision.

[45] Voir tome 1.2, p. XLVIII-XLIX.
[46] *Ibid*., p. XV-XVIII.
[47] Voir tome 1.2, p. XV-XVII.

La préface du Livre IV donne également quelques informations sur l'état de la recherche relative aux intersections des courbes coniques chez les prédécesseurs d'Apollonius et ses contemporains. Elle atteste l'importance des avancées scientifiques dans les milieux proches de Conon de Samos ; elle fait écho en particulier aux débats sur l'utilisation des points d'intersection dans la construction des problèmes géométriques solides, Apollonius rendant justice sur ce point à Conon, contre Nicotélès de Cyrène[48]. La lettre d'envoi d'Apollonius montre clairement quelle est l'ambition du mathématicien dans un tel contexte : présenter un exposé rigoureux des théorèmes qui ont manqué à ses prédécesseurs pour traiter de ces questions de manière démonstrative.

Il est moins aisé en revanche de comprendre, à la seule lecture de la préface, sur quels points précis Apollonius a totalement innové. Il s'en explique en des termes qui restent allusifs et ne pouvaient être parfaitement compris que par ses contemporains[49]. On est donc renvoyé à la lecture du texte et à son analyse.

3.3 La rédaction du Livre IV transmise par la tradition grecque

3.3.1 Remarques préliminaires

Une première observation doit être faite : alors que le contenu du Livre IV s'inscrit totalement dans la continuité des recherches exposées depuis le Livre I, la rédaction dont témoigne le texte grec se différencie plus nettement des usages du Livre I que la rédaction des Livres II et III. C'est aussi dans le Livre IV, et plus particulièrement dans les deux premières parties (prop. 1-23 et 24-40), que le texte grec et le texte arabe accusent les différences les plus marquées, à la fois dans l'ordonnance et le nombre des propositions, dans les choix rédactionnels dont ils témoignent, et la nature des démonstrations ; cet écart se réduit presque en totalité à partir de la proposition 46, les deux textes retrouvant également les mêmes lettres désignatrices. La convergence de ces deux observations conduit naturellement, et sans aller plus avant, à soupçonner des manipulations éditoriales dans le Livre IV.

Mais la recherche des indices s'avère complexe pour plusieurs raisons. Pour qui cherche à placer avant ou après l'édition d'Eutocius certaines interventions, le commentaire d'Eutocius n'offre que très peu de points de repère, puisque seulement trois propositions sont l'objet d'un commentaire.

[48] Le témoignage d'Apollonius est notre seule source pour ce mathématicien.
[49] Voir Note complémentaire [3] au Livre IV.

D'autre part, les écarts relevés par rapport aux modes d'expression du Livre I sont justiciables d'explications différentes. C'est la convergence de l'analyse mathématique, de l'enquête linguistique et de la comparaison avec la traduction arabe qui est de nature à lever le doute.

Ces trois modes d'analyse permettent d'affirmer avec une relative sûreté que c'est bien le groupe des propositions initiales 1-23 qui semble avoir le plus souffert d'une volonté de réécriture. Les interventions repérées supposent une lecture suivie du texte, sans doute celle d'un recenseur à des fins d'édition[50], mais rien ne prouve qu'elles soient postérieures à Eutocius.

D'autre part, il n'est pas sûr qu'Apollonius lui-même ait accordé autant de soin à la rédaction du Livre IV qu'à la rédaction du Livre I, et nous n'avons pas d'informations sur ses sources directes ; autant de raisons de rester prudent, surtout si certains traits rédactionnels, inhabituels dans le traité, s'enracinent déjà dans les Livres II et III ou se concentrent dans des groupes de propositions apparentées, ou si encore des emplois absents ou peu représentés dans les autres Livres trouvent un écho chez d'autres auteurs du *corpus* mathématique classique.

Pour tous les passages concernés par ces remarques, j'ai rassemblé dans mes notes sur le texte et mes notes complémentaires les éléments d'information qui peuvent nourrir une réflexion critique sur la nature et le statut du texte grec qui nous est parvenu.

3.3.2 Sur quelques traits linguistiques communs aux Livres III et IV

Les deux exemples qui suivent montrent que le Livre IV, du point de vue de sa rédaction, doit être plutôt rapproché du Livre III que des Livres I et II.

a) L'emploi du mot γραμμή

Un bon exemple pour situer le Livre IV par rapport aux Livres précédents est celui de l'emploi du mot γραμμή (*ligne*)[51] : on constate que, dans le Livre IV, dès la première proposition, le terme est fréquemment utilisé comme variante libre de τομή (*section*) ; on trouve 34 occurrences de cet emploi, jusqu'à la proposition 40 incluse. Cet emploi disparaît ensuite dans la partie relative aux rencontres entre l'hyperbole à deux branches et les sections opposées (prop. 41-54) et dans les trois propositions finales (prop. 55-57). Le mot γραμμή n'a jamais été utilisé de

[50] Voir, entre autres, Notes complémentaires [6], [10] et [24] au Livre IV.

[51] Cet emploi a été relevé par M. Federspiel dans ses notes critiques au Livre IV, « Notes linguistiques et critiques sur le Livre IV des Coniques d'Apollonius de Pergè », *REG*, 122, p. 307-310.

cette manière dans le Livre I. Les deux seules occurrences du Livre II appartiennent au *problème* II.49. En revanche, on trouve déjà 11 occurrences de cet emploi dans le Livre III : dans le groupe des propositions 51-54, d'une part, et, en dehors de ce groupe, dans les propositions 17, 27 et 37. On notera qu'il n'est pas surprenant que, parmi les propositions qui témoignent de cet usage, on retrouve les propositions II.49 et III.37, qui sont en lien direct avec l'examen auquel procède Apollonius dans le groupe des propositions 1-23.

On observe également que l'emploi de γραμμή en ce sens n'est pas systématique dans les propositions citées, puisque le terme cohabite avec le mot τομή. Le caractère systématique d'un changement de vocabulaire pour un concept précis pourrait évidemment faire soupçonner une normalisation postérieure. D'autre part, les commentateurs tardifs des *Coniques* (Sérénus, Pappus, Eutocius) ne connaissent pas cet usage. On est donc bien renvoyé à la rédaction apollonienne.

b) Le tour καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω

Le tour καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ E (*que la droite AB soit menée ainsi que la droite ΓΔ, et que <celle-ci> soit prolongée* jusqu'au point E) mérite lui aussi d'être relevé[52] pour sa singularité. L'expression apparaît comme maladroite, voire incorrecte. On attend καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AB, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ E (*que soient menées des droites de jonction AB et ΓΔ et que ΓΔ soit prolongée jusqu'au point* E). Pour chacune des occurrences, on observe que le tour est associé au tracé de deux couples de droites fondamentales dans les relations étudiées dans les Livres III et IV : (1) la droite qui joint les points de contact de deux tangentes menées par un point extérieur à la section ainsi que la droite qui joint ce point extérieur et le centre de la section (III.4, 5, 20, 32, 40) ; (2) la droite qui joint les points de contact ainsi que la sécante issue du même point extérieur, et sur laquelle on aura une division harmonique (IV.53). Le tour est comme une signature, mais on ne peut savoir s'il appartient à la langue d'Apollonius ou si celui-ci l'a repris à partir de l'une de ses sources.

[52] Il a été signalé par M. Federspiel dans ses notes critiques au Livre III, et j'en ai étudié les caractéristiques dans ma note complémentaire [8] au Livre III.

3.3.3 La demande d'établissement d'une proportion dans le Livre IV

On relève dans le Livre IV un tour quasiment absent des Livres précédents, alors que les occasions de l'utiliser ne manquaient pas. Il concerne la demande d'établissement d'une proportion.

Dans les *Coniques*, pour la demande d'établissement d'une proportion de la forme ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, <οὕτως> ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ (*que ΝΞ soit à ΞΜ comme ΗΚ est à ΚΕ*), on trouve parfois le verbe γίγνομαι (I.50, 51, 54 ; II. 53 ; III.15 ; IV.14 et 26) ou l'impératif ἔστω (III.15 ; IV.12, 21, 22), mais surtout le verbe ποιεῖσθαι sous la forme de l'impératif πεποιήσθω. On a donc le plus souvent la séquence suivante : πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ (*qu'il soit fait en sorte que ΝΞ soit à ΞΜ comme ΗΚ est à ΚΕ*). Or, dans le Livre IV, on observe la totale disparition de cette dernière séquence au profit du tour suivant, représenté dès la proposition 1 : καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, <τοῦτον> ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ (*que ΓΖ ait avec ΖΕ le rapport que ΓΔ a avec ΔΕ*). L'impératif ἐχέτω se trouve ainsi utilisé à l'exclusion de l'impératif πεποιήσθω, les deux formes se retrouvant en distribution complémentaire[53]. Exception faite de l'occurrence trouvée en I.41 pour l'expression du rapport composé (tome 1.2, p. 142,15), l'emploi de l'impératif ἐχέτω pour la demande d'établissement d'une proportion est inconnu des Livres précédents. Les propositions concernées du Livre IV sont les suivantes : prop. 1, 4, 9, 15, 18, 25, 44, 48. On est donc ici devant un changement de vocabulaire, observable dans toutes les parties du Livre IV. On notera toutefois que les occurrences des propositions 44 et 48 sont des références implicites aux occurrences respectives des propositions 9 et 1.

L'enquête menée dans l'ensemble du *corpus* mathématique classique[54] montre que πεποιήσθω est toujours affecté à la demande d'établissement d'une proportion (chez Euclide, les occurrences figurent toutes dans le Livre X), mais que les emplois de ἐχέτω sont plus variés. On note surtout que la formulation linguistique des séquences où le Livre IV des *Coniques* emploie la forme ἐχέτω se retrouve à l'identique chez Archimède. On est ici encore renvoyé à la langue des mathématiciens à peu près contemporains d'Apollonius.

[53] Ce trait linguistique a été relevé par M. Federspiel dans ses notes critiques au Livre IV, *REG*, 122, p. 295-297.

[54] Voir M. Federspiel, *ibid*.

3.3.4 Les enseignements de la rédaction du Livre IV

Le Livre IV, comme les Livres précédents, présente des emplois qui dérogent aux habitudes observées depuis le Livre I, mais sans que jamais le vocabulaire scientifique ne soit changé. Ils ont été relevés, comme on l'a dit, dans les notes de bas de page ou dans les notes complémentaires. Leur nombre relativement significatif confirme une observation déjà faite : si l'on met à part les *problèmes* des Livres I et II, dont la langue a gardé une tonalité qui lui est propre, on observe que les exemples de tours inhabituels augmentent au fur et à mesure qu'on avance dans la lecture des Livres d' « éléments ». Les Livres I et II n'en étaient complètement exempts, en particulier dans des passages qui ont gardé une écriture non canonique, comme la seconde partie de la proposition I.8 ; mais ce sont bien dans les Livres III et IV que ces « curiosités » se concentrent. L'analyse linguistique montre qu'un certain nombre d'emplois relevés s'enracinent dans des traditions anciennes, ce qui montre que nous sommes en présence d'usages qui sont ceux d'un milieu scientifique. On en conclura sans trop d'imprudence qu'Apollonius a davantage imprimé sa marque et son style dans la rédaction des deux premiers Livres d' « éléments » que dans celle des deux Livres suivants.

3.4 La numérotation des propositions dans **V**

Pour la première fois dans le traité, on observe, une légère différence entre la numérotation de **V** et celle du commentaire d'Eutocius : la proposition qui porte le numéro 24 dans le commentaire d'Eutocius correspond à la proposition 23 de **V** ; l'écart augmente ensuite, puisque les propositions numérotées 43 et 50 chez Eutocius correspondent respectivement aux propositions 40 et 47 de **V**[55]. Compte tenu du premier écart installé avant la proposition 23 de **V**, on observe donc un nouvel écart de deux propositions entre les propositions 23 et 40 de **V**. En l'absence de points de repère suffisants, il serait imprudent d'en conclure que trois propositions au total auraient disparu de **V**. A la condition, bien entendu, que les numéros transmis par la tradition manuscrite du commentaire d'Eutocius ne soient pas erronés, il est plus simple de supposer que des éditeurs postérieurs à Eutocius ont modifié les divisions au sein de quelques propositions qui pouvaient s'y prêter.

[55] La correspondance entre les numéros du commentaire d'Eutocius et ceux du texte grec d'Apollonius dans l'édition Heiberg est artificielle dans le cas du Livre IV ; elle est due à l'intervention de l'éditeur ; voir p. 349 et 393.

CHAPITRE II

LES PRINCIPES D'ÉDITION

Choix du texte

Les principes suivis pour l'édition du texte grec sont les mêmes que ceux qui ont été exposés dans mon *Introduction* au Livre I[1]. Le texte établi ici représente celui de l'édition des Livres I-IV des *Coniques* procurée par Eutocius au VI^{e} siècle, tel qu'il peut être restitué à partir des sources médiévales qui nous l'ont transmis, en l'occurrence le *Vaticanus gr*. 206 et ses descendants.

Comme il le dit lui-même au début de son commentaire, Eutocius avait plusieurs sources à sa disposition, dont il a fait la synthèse. Ce travail éditorial interpose un écran qui empêche de remonter plus haut par la seule voie de nos manuscrits médiévaux. La recherche des états de texte antérieurs ne peut être conduite que par l'analyse de la tradition indirecte grecque et par la comparaison des sources médiévales grecques et arabes.

Comme on l'a vu dans le chapitre 1, le texte de l'édition d'Eutocius et le *corpus* de figures qui lui est attaché ont subi postérieurement quelques modifications. J'ai relevé dans mes notes complémentaires les indices qui révèlent une révision de cette édition, révision qu'il faut sans doute dater de la fin de l'Antiquité.

Qu'elles aient déjà figuré dans les sources utilisées par Eutocius ou qu'elles reviennent aux réviseurs de son édition, les insuffisances, voire les erreurs mathématiques constatées dans la rédaction transmise par **V** ne peuvent donner lieu à une correction. Le texte a été corrigé quand l'origine de la faute est manifestement une erreur de copie ou quand le texte n'est pas acceptable en l'état d'un point de vue syntaxique.

Dans une même proposition, l'ordre des lettres peut varier pour la désignation d'un même objet géométrique. Ces variations ont été respectées. Pour la désignation des figures et des droites, les quelques fois où l'ordre de succession des sommets ou des points de concours qui servent à les nommer n'est pas suivi, j'ai reproduit, comme Heiberg, l'ordre de la recension byzantine Ψ.

[1] Voir tome 1.2, p. LXVI-LXIX.

Graphies adoptées

J'ai suivi les usages observés dans **V** pour l'écriture des nombres et la désignation des objets géométriques, sauf dans les cas où les habitudes observées sont sources de confusion[2]. Voici les graphies adoptées :

- le nombre : μγ′
- le point : Γ
- une succession de points : Μ, Ε, Θ, Ν
- la droite : ΑΓ
- le produit : (τὸ ὑπὸ) ΒΕΑ (le rectangle compris par les deux droites ΒΕ et ΕΑ)
- la somme : (συναμφότερος ἡ) ΑΕΒ (la somme des droites ΑΕ et ΕΒ)
- la figure : ΑΒΓ (triangle) ; ΟΝΖΚΜ (pentagone).

Figures

Les figures que j'ai représentées sont celles du *Vaticanus gr*. 206. Si l'on met à part la maladresse du copiste dans l'exécution de certains tracés, on observe que les figures n'ont pas été dégradées par ceux qui les ont reproduites avant lui. Les rares modifications que j'ai apportées à la figure du manuscrit sont signalées chaque fois qu'il ne s'agit pas de la simple correction de fautes de copie commises sur les lettres désignatrices (omission ou mélecture). Les schémas qui figurent en marge de certaines propositions des Livres II et III et illustrent des calculs[3] ont été signalés, mais n'ont pas été reproduits ; j'ai procédé de la même manière pour les quelques figures surnuméraires transmises par **V**.

Notes de bas de page

On trouvera dans les notes de bas de page les références aux numéros des propositions des *Éléments* d'Euclide et des *Data*, requises implicitement dans les démonstrations. Je me suis conformée en cela aux usages de mes prédécesseurs. Le lecteur pourra se reporter à ces sources s'il le juge nécessaire.

Les notes linguistiques sont tirées des études consacrées par M. Federspiel aux Livres II, III et IV des *Coniques* ; ces études sont publiées dans les tomes 112, 113, 115, 121 et 122 de la *Revue des Études Grecques*.

Micheline Decorps-Foulquier

[2] *Ibid*., p. LXVIII-LXIX.
[3] Voir *supra*, p. XIII-XIV.

SIGLA

CODICES GRAECI

1. Codex praecipuus

V	= *Vaticanus gr*. 206 ; s. XII/XIII
V^1	= emendatio scribae ipsius
V^2, V^3, V^4	= manus posteriores in margine vel in interlinea
V^5	= manus Matthaei Devarii
V^{corr}	= lectio post correctionem
V^{ac} V^{pc}	= lectio ante correctionem ; lectio post correctionem

2. Codices inferiores

c	= *Constantinopolitanus Seragliensis gr*. 40 ; s. XIII/XIV
v	= *Vaticanus gr*. 203 ; s. XIII/XIV

Codices recensionum posteriorum

Canon.	= *Bodleianus Canonicianus gr*. 106 ; s. XV
Ψ	= prototypus codicum : *Parisinus gr*. 2342 (p), s. XIV ; *Ambrosianus* A 101 sup., s. XVI ; *Upsaliensis gr*. 50, s. XVI

3. Loci in Eutocii *Commentaria in Conica*

EUT. (W)	= *Vaticanus gr*. 204 ; s. IX

4. Loci in Pappi Alexandrini *Collectio Mathematica* VII 32

PAPP. (A)	= *Vaticanus gr*. 218 ; s. X

5. Loci in Sereni Antinoensis *De sectione cylindri*

SEREN. (V)	= *Vaticanus gr*. 206 ; s. XII/XIII

TRANSLATIO ARABICA

Ar.	= translatio graeco-arabica saec. IX confecta, quam edidit et transtulit Roshdi Rashed.

TRANSLATIONES LATINAE

Comm.	= F. Commandino, *Apollonii Pergaei Conicorum libri quattuor…*, Bologne, 1566.
Memus	= G.B. Memmo, *Apollonii Pergei… Opera*, Venise, 1537.

EMENDATIONES[1]

Mont.	= Montaurei notae (a. 1551) in codice *Parisinus gr*. 2356.
Savil.	= Savilius († 1622) in codice *Oxoniensis Savilianus* 10 ejus manu scripto.
Federspiel[1]	= M. Federspiel, « Notes critiques sur le Livre I des *Coniques* d'Apollonius de Pergè », *REG*, 107, 1994, p. 203-218.
Federspiel[2]	= M. Federspiel, « Notes linguistiques et critiques sur le Livre II des *Coniques* d'Apollonius de Pergè (Première partie) », *REG*, 112, 1999, p. 409-443.
Federspiel[3]	= M. Federspiel, « Notes linguistiques et critiques sur le Livre II des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. Deuxième partie », *REG*, 113, 2000, p. 359-391.
Federspiel[4]	= M. Federspiel, « Notes linguistiques et critiques sur le Livre III des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. Première partie », *REG*, 115, 2002, p. 110-148.
Federspiel[5]	= M. Federspiel, « Notes linguistiques et critiques sur le Livre III des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. Seconde partie », *REG,* 121, 2008, p. 515-545.
Federspiel[6]	= M. Federspiel, « Notes linguistiques et critiques sur le Livre IV des *Coniques* d'Apollonius de Pergè », *REG*, 122, 2009, p. 293-317.

EDITIONES

Edd.	= Halley et Heiberg.
Halley	= E. Halley, *Apollonii Pergaei Conicorum libri octo…*, Oxford,1710.
Heiberg	= J.L. Heiberg*, Apollonii Pergaei quae exstant cum commentariis antiquis*, Leipzig, 2 vol., 1891-1893.

[1] Figurent ici les travaux philologiques qui ont directement servi à l'établissement du texte grec. Ils sont classés par ordre chronologique.

TEXTE ET TRADUCTION

Deuxième livre des *Coniques* d'Apollonius de Perge

ἈΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ ΚΩΝΙΚΩΝ

ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ ὑγιαίνεις, ἔχοι ἂν καλῶς· καὶ αὐτὸς δὲ μετρίως ἔχω.

Ἀπολλώνιον τὸν υἱόν μου πέπομφα πρός σε κομίζοντά σοι τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν. Δίελθε οὖν αὐτὸ ἐπιμελῶς καὶ τοῖς ἀξίοις τῶν τοιούτων κοινωνεῖν μεταδίδου. Καὶ Φιλωνίδης δὲ ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβαλῇ εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μεταδὸς αὐτῷ, καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ ἵνα ὑγιαίνῃς.

Εὐτύχει.

– α′ – Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἀπ᾽ αὐτῆς ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ ἴση τῇ δυναμένῃ τὸ τέταρτον τοῦ εἴδους, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΖ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΔΕ, καὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒΖ εἴδους ἴσον ἔστω τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐκβεβλήσθωσαν.

Λέγω ὅτι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

Tit. Ἀπολλωνίου Κωνικῶν β^{ov} [β^{ov} V^{2} in ras.] V Ἀπολλωνίου Κωνικῶν α′ c Ἀπολλωνίου Κωνικῶν β′ v^{pc} Ἀπολλωνίου Κωνικῶν α′ v^{ac} || 2 ὑγιαίνεις V : ὑγιαίνοις p || 4 δεύτερον] β′ V || 10 α′ v Ψ : om. V.

APOLLONIUS DE PERGE
TRAITÉ DES *CONIQUES*

Livre II[1]

Apollonius salue Eudème.

Si ta santé est bonne, tant mieux ! Moi-même je me porte bien.

Je t'envoie mon fils Apollonius pour qu'il t'apporte le deuxième Livre de mes écrits sur les *Coniques*. Lis-le attentivement et communique-le à ceux qui sont dignes de ces matières. Si le géomètre Philonide, que je t'ai présenté à Ephèse, vient un jour à Pergame, adresse-le lui aussi.

Prends soin de ta santé[2].

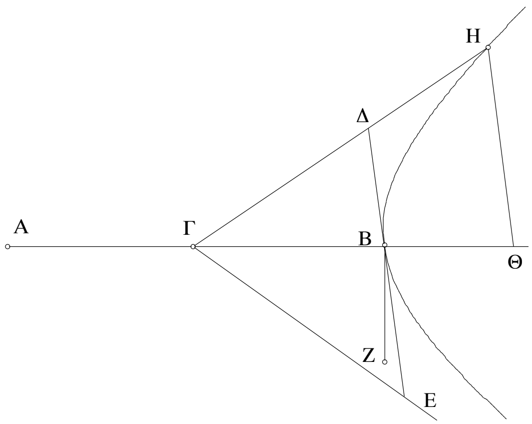
Porte-toi bien.

– 1 – *Si une droite est tangente à une hyperbole en un sommet*[3]*, et que, sur cette droite, est découpée de chaque côté du diamètre une droite égale à une droite dont le carré est équivalent au quart de la figure, les droites menées*[4] *du centre de la section jusqu'aux extrémités considérées de la tangente ne rencontreront pas la section.*

Soit une hyperbole, de diamètre ΑΒ[5], de centre Γ et de côté droit ΒΖ ; qu'une droite ΔΕ soit tangente à la section au point Β ; que le carré sur chacune des droites ΒΔ et ΒΕ soit égal au quart de la figure[6] comprise par les droites ΑΒ,ΒΖ ; que soient menées des droites de jonction ΓΔ et ΓΕ et qu'elles soient prolongées.

Je dis qu'elles ne rencontreront pas la section[7].

[1] Le titre de rappel du Livre I dans **V** a été modifié pour servir de titre au Livre II.
[2] Voir Note complémentaire [1].
[3] Cette mention est incongrue.
[4] Voir Note complémentaire [2].
[5] Sur les relatives de l'*ecthèse*, voir tome 1.2, Note complémentaire [16].
[6] Voir Note complémentaire [3].
[7] La rédaction du *diorisme* est rapide, ce qui produira souvent dans la suite.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῇ τομῇ κατὰ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΒ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ἀπὸ ΑΒ τέταρτον μέρος τὸ ἀπὸ ΓΒ, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΒΖ τέταρτον τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘΒ τῷ ἀπὸ ΓΘ, ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ ΓΔ συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΓΕ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῇ τομῇ αἱ ΓΔ, ΓΕ.

– βʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον ὅτι ἑτέρα ἀσύμπτωτος οὐκ ἔστι τέμνουσα τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ΔΓΕ.

2 τοῦ p : τῆς V ‖ 3 ἡ Ψ : om. V ‖ 6 ΘΗ e corr. V^1 ‖ 7 ΑΘΒ [τῶν ΑΘ,ΘΒ Ψ ut semper] Ψ : ΑΒΘ V ‖ 13 βʹ Ψ : om. V.

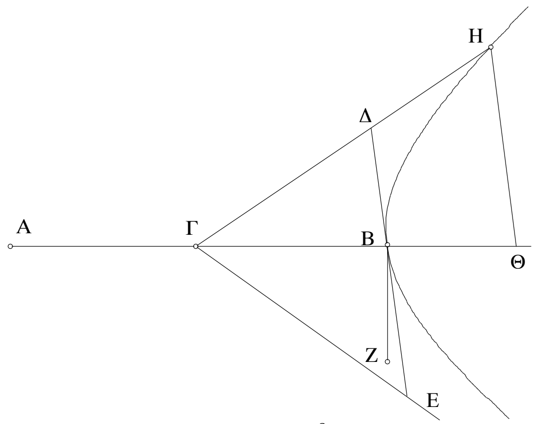


Fig. 1[8]

Que ΓΔ rencontre la section en un point H, si c'est possible, et que, de H, soit abaissée une droite HΘ de manière ordonnée ; elle est donc parallèle à ΔB.

Dès lors, puisque le carré sur AB est au rectangle AB,BZ comme AB est à BZ, que, d'autre part, le carré sur ΓB est le quart du carré sur AB et que le carré sur ΔB est le quart du rectangle AB,BZ, alors le carré sur ΓB est à celui sur ΔB, c'est-à-dire le carré sur ΓΘ est à celui sur ΘH[9], comme AB est à BZ ; or le rectangle AΘ,ΘB est aussi au carré sur ΘH comme AB est à BZ[10] ; le rectangle AΘ,ΘB est donc au carré sur ΘH comme le carré sur ΓΘ est à celui sur ΘH. Le rectangle AΘ,ΘB est donc égal au carré sur ΓΘ, ce qui est absurde[11].

La droite ΓΔ ne rencontrera donc pas la section.

On démontrera pareillement que la droite ΓE ne la rencontre pas non plus. Les droites ΓΔ et ΓE sont donc des *asymptotes* de la section.

– 2 – *Dans les mêmes conditions*, il faut démontrer[12] qu'il n'existe pas d'autre asymptote coupant l'angle ΔΓE.

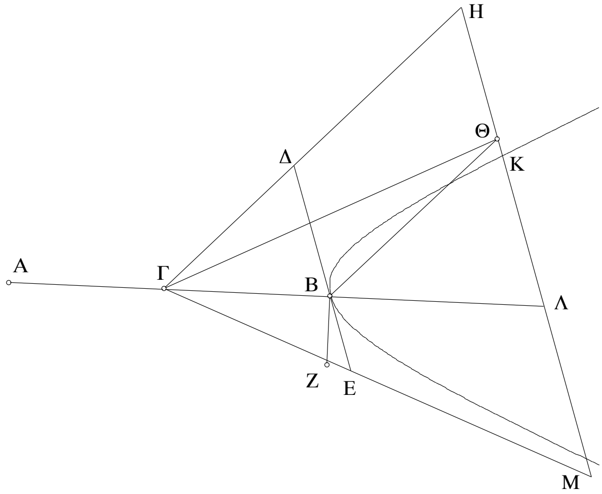
[8] Les figures des propositions 1-5 et 7-9 sont numérotées de la main du copiste dans **V**.

[9] *Éléments*, VI.4.

[10] I.21.

[11] *Éléments*, II.6.

[12] Voir Note complémentaire [4].



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Κ, Λ, Μ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΘ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ τις ἡ ΒΛ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΛ. Ὁμοίως δὴ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΜ τῇ ΔΕ, καὶ ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΛΜ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΔΒ, μείζων ἄρα ἡ ΗΚ τῆς ΔΒ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΜ τῆς ΒΕ μείζων, ἐπεὶ καὶ ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΚΗ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΔΒΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΔΒ.

6 τέτμηται V : τέμνεται edd.

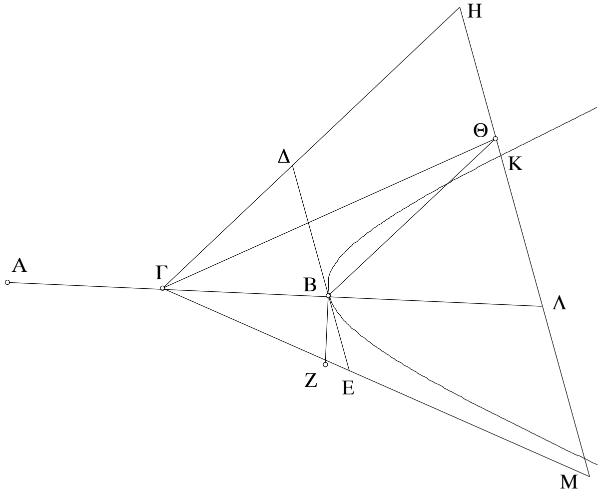


Fig. 2

Soit une asymptote ΓΘ, si c'est possible ; que, par B, soit menée une parallèle BΘ à ΓΔ ; qu'elle rencontre ΓΘ en un point Θ ; que soit placée une droite ΔH égale à BΘ ; que soit menée une droite de jonction HΘ et qu'elle soit prolongée jusqu'en des points K, Λ et M.

Dès lors, puisque les droites BΘ et ΔH sont égales et parallèles, les droites ΔB et HΘ sont aussi égales et parallèles.

Puisqu'une droite AB a été coupée en deux parties égales en un point Γ, et que lui est ajoutée une certaine droite BΛ, la somme du rectangle AΛ,ΛB et du carré sur ΓB est égale au carré sur ΓΛ[13]. Pareillement[14], puisque HM est parallèle à ΔE et que ΔB est égale à BE, alors HΛ est aussi égale à ΛM.

Puisque HΘ est égale à ΔB, alors HK est plus grande que ΔB ; or KM est aussi plus grande que BE, puisque ΛM l'est aussi ; le rectangle MK,KH est donc plus grand que le rectangle ΔB,BE, c'est-à-dire que le carré sur ΔB.

[13] *Éléments*, II.6.

[14] L'emploi de l'adverbe est peu correct, puisque la similitude soulignée porte sur l'égalité d'objets mathématiques de genre différent.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ.

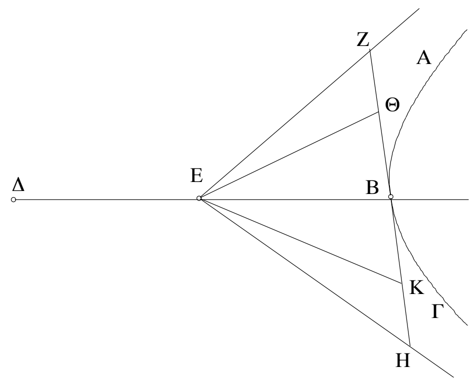
Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΛΗ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΚ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΜΚΗ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. Ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ τῷ ὑπὸ ΜΚΗ, ὅπερ ἄτοπον· μεῖζον γὰρ αὐτοῦ δέδεικται.

Οὐκ ἄρα ἡ ΓΘ ἀσύμπτωτός ἐστι τῇ τομῇ.

– γʹ – Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν, καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ε καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἐφαπτέσθω τις αὐτῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΘΚ.

Λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ ΘΚ συμπεσεῖται ταῖς ΖΕ, ΕΗ.



2 post ἀπὸ add. ΛΗ καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ V (e lin. 3-4 petita) ‖ 7 ΜΚΗ] ΜΚ/Η V ‖ 11 ΓΘ Ψ : ΓΔ V ‖ 12 γʹ Ψ : om. V ‖ 19 ἡ v^{pc} Ψ : ἢ V v^{ac}.

Dès lors, puisque le carré sur ΓB est à celui sur BΔ comme AB est à BZ[15], que, d'autre part, le rectangle AΛ,ΛB est au carré sur ΛK comme AB est à BZ[16], et que le carré sur ΓΛ est à celui sur ΛH comme le carré sur ΓB est à celui sur BΔ[17], le rectangle AΛ,ΛB est donc aussi au carré sur ΛK comme le carré sur ΓΛ est à celui de ΛH.

Dès lors, puisque le rectangle retranché AΛ,ΛB est aussi au carré retranché construit sur ΛK comme le carré sur ΓΛ est à celui sur ΛH, le carré restant construit sur ΓB est donc aussi au rectangle restant MK,KH[18] comme[19] le carré sur ΓΛ est à celui sur ΛH, c'est-à-dire comme le carré sur ΓB est à celui sur ΔB ; le rectangle MK,KH est donc égal au carré sur ΔB, ce qui est absurde, puisqu'on a démontré qu'il était plus grand que lui.

La droite ΓΘ n'est donc pas une asymptote de la section.

– 3 – *Si une droite est tangente à une hyperbole, elle rencontrera chacune des asymptotes et sera coupée en deux parties égales au point de contact, et le carré sur chacun de ses segments sera égal au quart de la figure*[20] *appliquée au diamètre passant par le point de contact.*

Soit une hyperbole ABΓ, de centre E et d'asymptotes ZE et EH ; qu'une certaine droite ΘK soit tangente à cette hyperbole en un point B.

Je dis que le prolongement de ΘK rencontrera les droites ZE et EH.

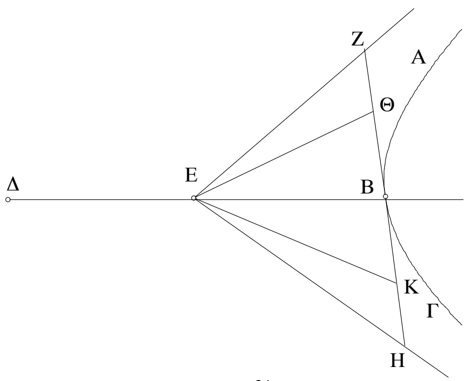


Fig. 3[21]

[15] Voir prop. 1.
[16] I.21.
[17] *Éléments*, VI.4.
[18] *Éléments*, II.5.
[19] Voir Note complémentaire [5].
[20] Le participe γινομένου n'a pas à être traduit, car son emploi est purement stylistique.
[21] Voir Note complémentaire [6].

Εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΒ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΔ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. Κείσθω δὴ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΘΒ, ΒΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΚ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσίν, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΖΕ, ΕΗ ἀσύμπτωτοι.

Ἡ ἄρα ΚΘ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ΕΖ, ΕΗ ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Ζ, Η.

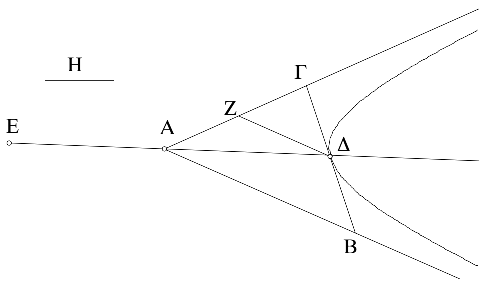
Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΖ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τῷ τετάρτῳ τοῦ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΘ, ΒΚ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΘΕ, ΕΚ, ὅπερ ἄτοπον.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΒ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

– δʹ – Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν γωνίαν περιεχουσῶν καὶ σημείου ἐντὸς τῆς γωνίας γράψαι διὰ τοῦ σημείου κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολήν, ὥστε ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἶναι τὰς δοθείσας εὐθείας.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Δ εἰς ἀσυμπτώτους τὰς ΓΑΒ γράψαι ὑπερβολήν.



TEST. 15-12, 11 cf. PAPP. V 41-42 ; cf. PAPP. VII 274-275 ; cf. EUT., *Comm. in De sph. et cyl.* (ed. Heiberg 176, 9-28).

8 ὅτι Ψ : om. V ‖ 10 εἰ v^{pc} Ψ : ἢ V v^{ac} ‖ 11 ΒΚ Ψ : ΘΚ V ‖ 15 δʹ Ψ : om. V ‖ 20 τῷ Ψ : τὸ V ‖ post Δ add. ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας Ψ ‖ 21 εἰς ἀσυμπτώτους τὰς ΓΑΒ [ΑΓ, ΑΒ Ψ] γράψαι Ψ : τὰς ΓΑΒ γράψαι εἰς ἀσυμπτώτους V.

Qu'il ne les rencontre pas, si c'est possible ; que soit menée une droite de jonction ΕΒ et qu'elle soit prolongée ; que soit placée une droite ΕΔ égale à ΒΕ ; ΒΔ est donc un diamètre. Que le carré sur chacune des droites ΘΒ et ΒΚ soit posé[22] égal au quart de la figure appliquée à ΒΔ, et que soient menées des droites de jonction ΕΘ et ΕΚ ; ce sont donc des asymptotes[23], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ce sont les droites ΖΕ et ΕΗ qui sont des asymptotes[24].

Le prolongement de ΚΘ rencontrera donc les asymptotes ΕΖ et ΕΗ aux points Ζ et Η.

Je dis maintenant que, de plus, le carré sur chacune des droites ΒΖ et ΒΗ sera égal au quart de la figure appliquée à ΒΔ.

Qu'il ne le soit pas, mais que le carré sur chacune des droites ΒΘ et ΒΚ soit égal au quart de la figure, si c'est possible ; ΘΕ et ΕΚ sont donc des asymptotes[25], ce qui est absurde[26].

Le carré sur chacune des droites ΖΒ et ΒΗ sera donc égal au quart de la figure appliquée à ΒΔ.

– 4[27] – *Étant données deux droites comprenant un angle et un point situé à l'intérieur de l'angle, décrire par le point une section de cône appelée hyperbole, telle que les droites données soient des asymptotes de la section.*

Soient deux droites ΑΓ et ΑΒ comprenant un angle quelconque en Α, et que soit donné un certain point Δ.

Il faut[28], par Δ, décrire une hyperbole dans les asymptotes ΓΑ et ΑΒ.

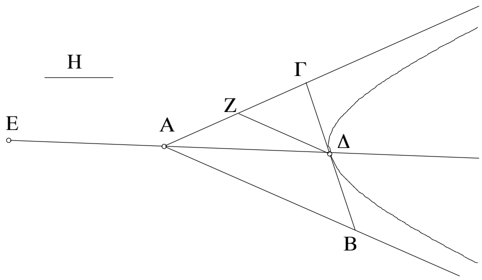


Fig. 4

[22] Sur cet emploi figuré de κείσθω, voir Note complémentaire [7].
[23] Prop. 1.
[24] Prop. 2.
[25] Prop. 1.
[26] Prop. 2.
[27] Voir Note complémentaire [8].
[28] Voir Note complémentaire [9].

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΔΑ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον γεγονέτω τὸ ὑπὸ ΔΕ,Η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΔ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Η ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕ,Η.

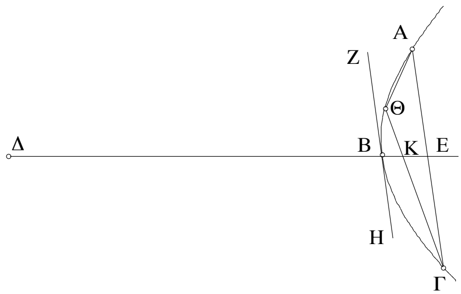
Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΒΑ, καὶ ἴση ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ· καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΕ,Η· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΕ,Η εἴδους.

Αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς.

– ε´ – Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα τέμνῃ δίχα, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ ἧς διάμετρος ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΖΒΗ, ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῇ τομῇ ἡ ΑΕΓ ἴσην ποιοῦσα τὴν ΑΕ τῇ ΕΓ.

Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ.



3 ἐπιζευχθεῖσα c v Ψ : ἐπειζευχθεῖσα V || τῷ V^1 : τὸ V || 11 ἀσύμπτωτοι Ψ : σύμπτωτοι V || 12 ε´ Ψ : om. V || ἡ Ψ : ἢ V || 13 ἡ Ψ : ἢ V.

Que soit menée une droite de jonction AΔ et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point E ; que soit placée une droite AE égale à ΔA ; que, par Δ, soit menée une parallèle ΔZ à AB ; que soit placée une droite ZΓ égale à AZ ; que soit menée une droite de jonction ΓΔ et qu'elle soit prolongée jusqu'au point B ; qu'un rectangle ΔE,H soit fait égal au carré sur ΓB, et que soit décrite par Δ autour du prolongement de la droite AΔ une hyperbole telle que le carré sur les droites abaissées soit équivalent à un rectangle appliqué à la droite H, qui soit en excès d'une figure semblable au rectangle ΔE,H[29].

Dès lors, puisque ΔZ est parallèle à BA, et que ΓZ est égale à ZA, alors ΓΔ est aussi égale à ΔB[30], de sorte que le carré sur ΓB est le quadruple de celui sur ΓΔ ; d'autre part, le carré sur ΓB est égal au rectangle ΔE,H ; chacun des carrés sur ΓΔ et sur ΔB est donc le quart de la figure comprise par les droites ΔE,H.

Les droites AB et AΓ sont donc des asymptotes[31] de l'hyperbole décrite[32].

– 5 – *Si un diamètre*[33] *d'une parabole ou d'une hyperbole coupe une certaine droite en deux parties égales, la tangente à la section à l'extrémité du diamètre sera parallèle à la droite coupée en deux parties égales.*

Soit une parabole ou une hyperbole ABΓ, de diamètre ΔBE ; qu'une droite ZBH soit tangente à la section, et que soit menée une certaine droite AEΓ dans la section telle que AE égale à EΓ.

Je dis que AΓ est parallèle à ZH.

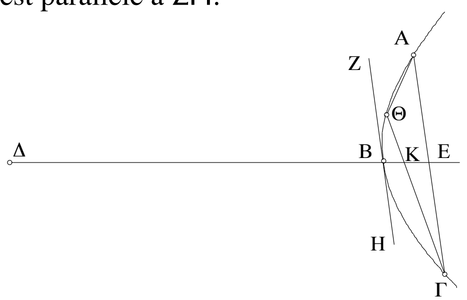


Fig. 5

[29] I.54-55.

[30] *Éléments*, VI.2.

[31] Prop. 1.

[32] Sur la langue de la proposition 4, voir Note complémentaire [10].

[33] La forme est définie en grec. Sur cet idiomatisme, voir M. Federspiel, « Sur l'opposition *défini/indéfini*… », p. 287.

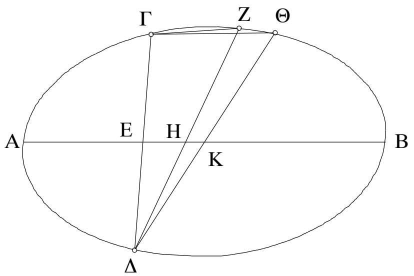
Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ.

Ἐπεὶ οὖν παραβολὴ ἢ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒΓ ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΔΕ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΖΗ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ· ἡ ἄρα ΑΘ τῇ ΚΕ παράλληλός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ ἐκβαλλομένη τῇ ΒΔ.

– ϛʹ – Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

Ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφερεία ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΑΒ τὴν ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ε.

Λέγω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.



Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΖΗ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον. Εἴτε γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς ΑΒ τομῆς, ἡ ΓΖ συμπεσεῖται τῇ ΑΒ · εἴτε μή ἐστιν, ὑποκείσθω τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΚ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΘ.

3 Α[ΒΓ e corr. V[1] ‖ 7 ϛʹ Ψ : om. V ‖ 11 ἢ v Ψ : ἡ V ‖ 13 Α fere evan. V ‖ 14 ΓΔ c v Ψ : ΓΘ V[corr] ‖ 16 ΔΗ Ψ : ΔΒ c v e corr. V[1].

Si elle ne l'est pas, que soit menée par Γ une parallèle ΓΘ à ZH, et que soit menée une droite de jonction ΘA.

Dès lors, puisque la ligne ABΓ est une parabole ou une hyperbole, de diamètre ΔE et de tangente ZH, et que ΓΘ est parallèle à cette tangente, ΓK est égale à KΘ[34] ; mais ΓE est aussi égale à EA ; AΘ est donc parallèle à KE[35], ce qui est impossible, puisque son prolongement rencontre BΔ[36].

– 6 – *Si un diamètre d'une ellipse ou d'une circonférence de cercle coupe en deux parties égales une certaine droite ne passant pas par le centre, la tangente à la section à l'extrémité du diamètre sera parallèle à la droite coupée en deux parties égales.*

Soit une ellipse ou une circonférence de cercle, de diamètre AB, et que AB coupe une droite ΓΔ ne passant pas par le centre en deux parties égales en un point E.

Je dis que la tangente à la section au point A est parallèle à ΓΔ.

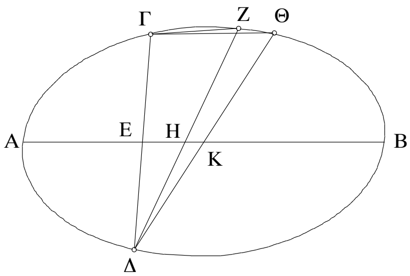


Fig. 6

Qu'elle ne le soit pas, mais, si c'est possible, soit une parallèle ΔZ à la tangente en A ; ΔH est donc égale à ZH[37] ; or ΔE est aussi égale à EΓ ; ΓZ est donc parallèle à HE[38], ce qui est absurde. En effet, si le point H est le centre de la section AB, la droite ΓZ rencontrera AB[39] ; s'il ne l'est pas, que ce soit, par hypothèse, un point K ; que soit menée une droite de jonction ΔK et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Θ, et que soit menée une droite de jonction ΓΘ.

[34] I.46-47.
[35] *Éléments*, VI.2.
[36] I.22.
[37] I.47.
[38] *Éléments*, VI.2.
[39] I.23.

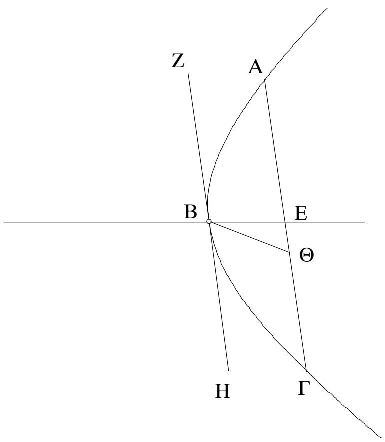
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΘ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΘ τῇ ΑΒ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΖ, ὅπερ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλος ἐστι τῇ ΓΔ.

– ζʹ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ καὶ δίχα τμηθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ΖΗ, καὶ τῇ ΖΗ παράλληλος ἡ ΑΓ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ.

Λέγω ὅτι ἡ ΒΕ διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.



Μὴ γάρ, ἀλλ᾽ εἰ δυνατόν, ἔστω διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ, ὅπερ ἄτοπον· ἡ γὰρ ΑΕ τῇ ΕΓ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἄρα ἡ ΒΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΕ.

2 ΓΘ fere evan. V ‖ 4 ζʹ Ψ : om. V ‖ 6 διάμετρος Ψ : διάμετρον V.

Dès lors, puisque ΔK est égale à KΘ et que ΔE l'est aussi à EΓ, alors la droite ΓΘ est parallèle à AB ; mais ΓZ lui est aussi parallèle, ce qui est absurde.

La tangente en A à la section est donc parallèle à ΓΔ.

– 7 – *Si une droite est tangente à une section de cône ou à une circonférence de cercle, qu'est menée une parallèle à cette tangente dans la section et qu'elle est coupée en deux parties égales, la droite joignant le point de contact et le milieu de la droite coupée sera un diamètre de la section.*

Soit une section de cône ou une circonférence de cercle ABΓ ; soit une droite ZH tangente à la section ; soit une parallèle AΓ à ZH ; qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point E, et que soit menée une droite de jonction BE.

Je dis que la droite BE est un diamètre de la section.

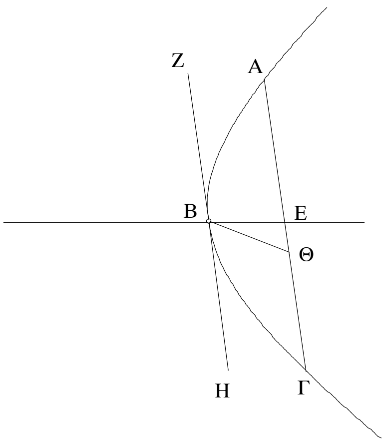


Fig. 7

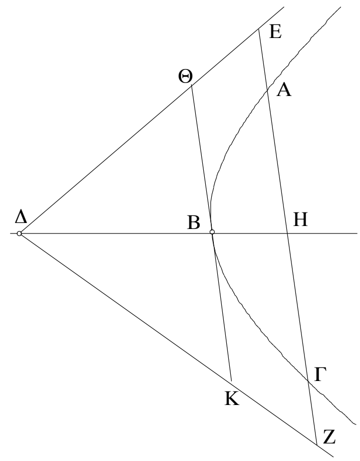
Qu'elle ne le soit pas, mais, si c'est possible, soit un diamètre BΘ de la section ; AΘ est donc égale à ΘΓ, ce qui est absurde, puisque AE est égale à EΓ. La droite BΘ ne sera donc pas un diamètre de la section.

On démontrera pareillement que ce n'est pas non plus le cas d'aucune autre droite que BE.

– η′ – Ἐὰν ὑπερβολῇ εὐθεῖα συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ᾽ αὐτῆς ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ τῇ ΑΒΓ συμπιπτέτω τις ἡ ΑΓ.

Λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις.



Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς. Ἡ ἄρα κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ· ἔστω οὖν ἐφαπτομένη ἡ ΘΒΚ· συμπεσεῖται δὴ ταῖς ΕΔ, ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΚΘ, καὶ ἡ ΚΘ συμπίπτει ταῖς ΔΚ, ΔΘ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα συμπεσεῖται ταῖς ΔΕ, ΔΖ· συππιπτέτω κατὰ τὰ Ε, Ζ· καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΒΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ, ὥστε καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΕ.

1 η′ Ψ : om. V || 2 αἱ Ψ : om. V || 5 post δὲ fort. addendum αὐτῆς || 13 ΔΘ Ψ : ΚΘ V.

– 8 – *Si une droite rencontre une hyperbole en deux points, son prolongement de part et d'autre rencontrera les asymptotes, et les droites découpées sur elle par la section du côté des asymptotes seront égales.*

Soit une hyperbole ΑΒΓ, d'asymptotes ΕΔ et ΔΖ, et qu'une certaine droite ΑΓ rencontre l'hyperbole ΑΒΓ.

Je dis que son prolongement de part et d'autre rencontrera les asymptotes.

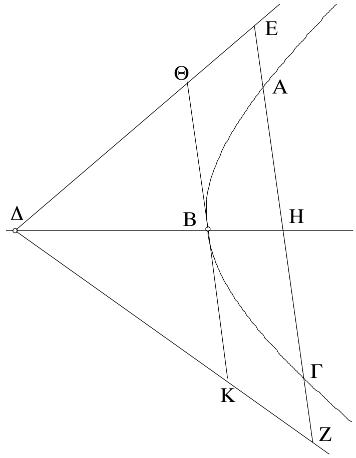


Fig. 8

Que ΑΓ soit coupée en deux parties égales en un point Η, et que soit menée une droite de jonction ΔΗ ; cette droite est donc un diamètre de la section[40]. La tangente en Β est donc parallèle à ΑΓ[41] ; soit une tangente ΘΒΚ ; elle rencontrera alors les droites ΕΔ et ΔΖ.

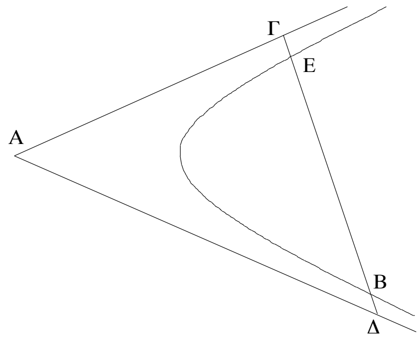
Dès lors, puisque ΑΓ est parallèle à ΚΘ et que ΚΘ rencontre les droites ΔΚ et ΔΘ[42], alors ΑΓ rencontrera aussi les droites ΔΕ et ΔΖ ; qu'elle les rencontre en des points Ε et Ζ ; d'autre part, ΘΒ est égale à ΒΚ ; ΖΗ est donc aussi égale à ΗΕ[43], de sorte que ΓΖ est aussi égale à ΑΕ.

[40] Prop. 7.
[41] Prop. 5.
[42] Prop. 3.
[43] *Éléments*, VI.4.

– θʹ – Ἐὰν εὐθεῖα συμπίπτουσα ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνηται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς, καθ᾿ ἓν μόνον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΓΔ συμπίπτουσα ταῖς ΓΑΔ ἀσυμπτώτοις δίχα τεμνέσθω ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Ε σημεῖον.

Λέγω ὅτι κατ᾿ ἄλλο σημεῖον οὐχ ἅπτεται τῆς τομῆς.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἁπτέσθω κατὰ τὸ Β· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΒΔ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση.

Οὐκ ἄρα καθ᾿ ἕτερον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

– ιʹ – Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν συμπτίπτῃ ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διχοτομούσῃ διαμέτρῳ τὰς ἀγομένας παρὰ τὴν ἠγμένην εὐθεῖαν.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αὐτῆς αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΔΖ τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΘ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΘΕΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΜ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΘ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΜ.

1 θʹ Ψ : om. V ‖ 3 ΓΑ]Δ e corr. V[1] ‖ 9 ιʹ Ψ : om. V ‖ 12 εἴδους fere evan. V.

– 9 – *Si une droite rencontrant les asymptotes est coupée en deux parties égales par l'hyperbole*[44]*, elle touche*[45] *la section en un seul point.*

Qu'une droite ΓΔ rencontrant les asymptotes ΓΑ et ΑΔ soit coupée en deux parties égales par l'hyperbole au point Ε[46].

Je dis qu'elle ne touche pas la section en un autre point.

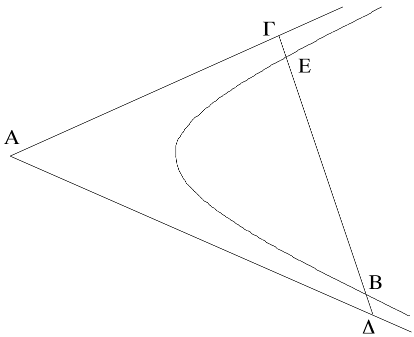


Fig. 9

Qu'elle la touche en un point Β, si c'est possible ; ΓΕ est donc égale à ΒΔ[47], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΓΕ est égale à ΕΔ.

Elle ne touche donc pas la section en un autre point.

– 10 – *Si une certaine droite coupant la section rencontre chacune des asymptotes, le rectangle compris par les droites découpées entre les asymptotes et la section*[48] *est égal au quart de la figure appliquée au diamètre coupant en deux parties égales les parallèles à la droite menée.*

Soit une hyperbole ΑΒΓ, d'asymptotes ΔΕ et ΕΖ ; que soit menée une certaine droite ΔΖ coupant la section et les asymptotes ; qu'une droite ΑΓ soit coupée en deux parties égales en un point Η ; que soit menée une

[44] L'expression est définie, ici, pour la mention de l'hyperbole (appelée aussi « la section » dans les énoncés suivants). La proposition 8 semble avoir donné la première occurrence du terme pour tout le groupe 9-14.

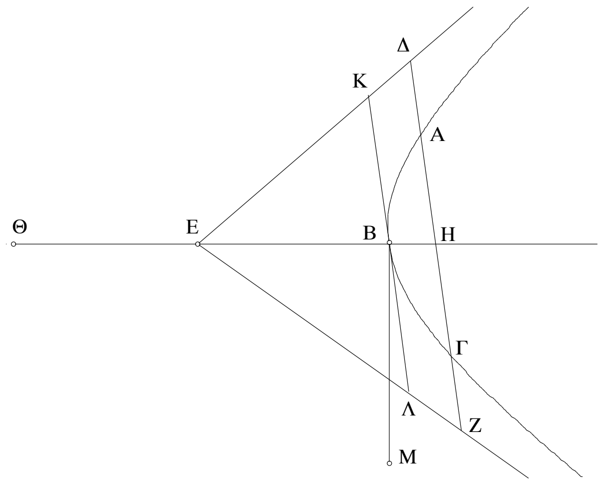
[45] La proposition fournit les quatre seules occurrences dans les *Coniques* de l'emploi du verbe simple ἅπτεσθαι pour une tangente à une courbe.

[46] Voir Note complémentaire [11].

[47] Prop. 8.

[48] Cette imprécision de la formulation se retrouve dans les énoncés des prop. 11, 22 et 23.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ· ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΖ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΚΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΖ.

Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΜ, τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΔΗ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΘΗΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ. Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ἀπὸ ΒΚ.

7-8 ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΗ [τῆς ΕΗ Ψ ut semper] πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ τὸ [οὕτω τὸ Ψ] — ΗΑ Ψ : om. V.

droite de jonction ΗΕ ; que soit placée une droite ΕΘ égale à la droite ΒΕ, et que soit menée de Β une droite ΒΜ à angles droits avec ΘΕΒ ; ΒΘ est donc un diamètre[49], et ΒΜ est le côté droit[50].

Je dis que le rectangle ΔΑ,ΑΖ est égal au quart du rectangle ΘΒ,ΒΜ ; pareillement aussi pour le rectangle ΔΓ,ΓΖ.

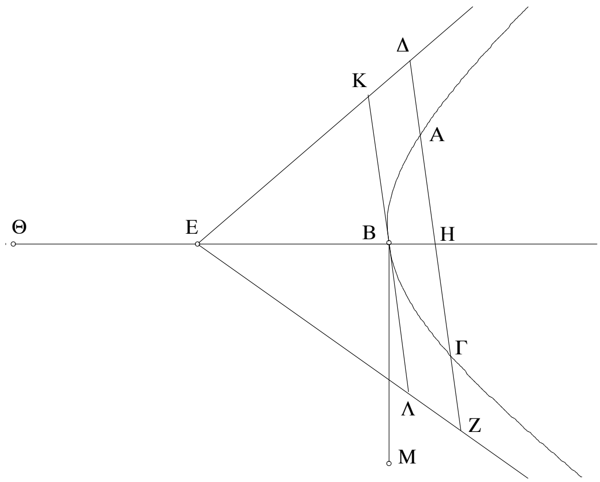


Fig. 10

Que soit menée par Β une tangente ΚΛ à la section ; elle est donc parallèle à ΔΖ[51].

Puisqu'on a démontré que le carré sur ΕΒ était à celui sur ΒΚ, c'est-à-dire le carré sur ΕΗ était à celui sur ΗΔ[52], comme ΘΒ est à ΒΜ[53], et que le rectangle ΘΗ,ΗΒ était au carré sur ΗΑ comme ΘΒ est à ΒΜ[54], alors le rectangle ΘΗ,ΗΒ est au carré sur ΗΑ comme le carré sur ΕΗ est à celui sur ΗΔ.

Dès lors, puisque le rectangle retranché ΘΗ,ΗΒ est au carré retranché sur ΑΗ comme le carré entier sur ΕΗ est au carré entier sur ΔΗ, alors le carré restant sur ΕΒ[55] est aussi au rectangle restant ΔΑ,ΑΖ[56] comme le carré sur ΕΗ est à celui sur ΗΔ, c'est-à-dire comme le carré sur ΕΒ est à

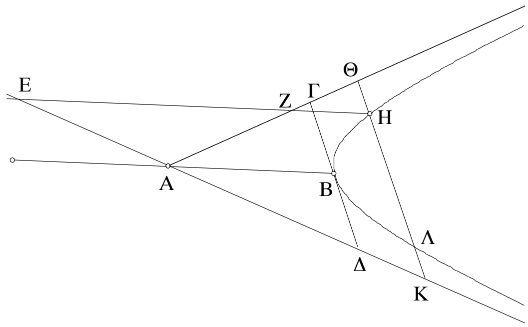
[49] Prop. 7.
[50] La présentation du côté droit est pour le moins négligée ; voir Note complémentaire [12].
[51] Prop. 5.
[52] *Éléments*, VI.4.
[53] Voir prop. 1.
[54] I.21.
[55] *Éléments*, II.6.
[56] *Éléments*, II.5.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ ΔΓΖ τῷ ἀπὸ ΒΛ < ἴσον>.

Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΚΒ τῷ ἀπὸ ΒΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ὑπὸ ΖΓΔ.

– ια′ – Ἐὰν ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν τέμνῃ τις εὐθεῖα, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ διά [τινος σημείου] τοῦ Ε διήχθω ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς ΕΑ, ΑΓ.



Ὅτι μὲν οὖν συμπίπτει τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, φανερόν· ἡ γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη ὡς ἡ ΑΒ τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΓΑΔ γωνίαν καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἔσται· ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η.

1 ΔΓΖ V : ΔΓΖ ἴσον Ψ ‖ τῷ V^1 : τὸ V ‖ ἴσον addidi (jam Heiberg) ‖ 4 ια′ Ψ : om. V ‖ 10 ΑΔ V^1 : ΓΔ V ‖ 11 τινος σημείου del. Federspiel[2].

celui sur BK[57] ; le rectangle ZA,AΔ est donc égal au carré sur BK.

On démontrera pareillement que le rectangle ΔΓ,ΓZ est aussi égal au carré sur BΛ.

Or le carré sur KB est égal au carré sur BΛ[58] ; le rectangle ZA,AΔ est donc aussi égal au rectangle ZΓ,ΓΔ.

– 11 – *Si une certaine droite coupe chacune des droites comprenant un angle adjacent à l'angle comprenant l'hyperbole, elle rencontrera la section en un seul point, et le rectangle compris par les droites découpées entre les droites comprenant l'angle adjacent et la section sera égal au quart du carré sur le diamètre parallèle à la sécante.*

Soit une hyperbole, d'asymptotes ΓA et AΔ ; que soit prolongée ΔA jusqu'en un point E, et que, par [un certain point] E, soit menée une droite EZ coupant EA et AΓ.

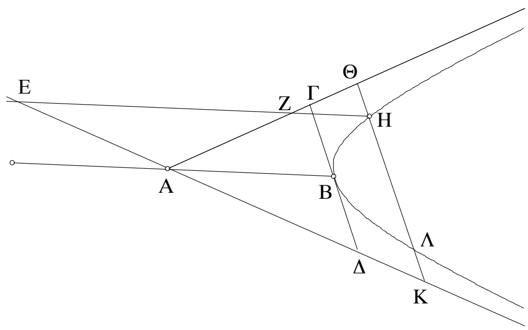


Fig. 11

Il est évident d'abord[59] qu'elle rencontre la section[60] en un seul point, puisque la parallèle AB à EZ, menée par A, coupera l'angle ΓAΔ, rencontrera la section[61] et en sera un diamètre[62] ; EZ rencontrera donc la section en un seul point[63] ; qu'elle la rencontre en un point H.

[57] *Éléments*, VI. 4.
[58] Prop. 3.
[59] Sur le sens de μὲν οὖν, voir Note complémentaire [13].
[60] Ce point fait l'objet d'une variante de démonstration chez Eutocius.
[61] Prop. 2.
[62] I.51, épilogue.
[63] I.26.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Η τεταγμένως ἡ ΘΗΛΚ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΗΘ· ἔστω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ καὶ τοῦ τῆς ΔΒ πρὸς ΒΑ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΗΚ πρὸς ΗΕ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΖ καὶ τῆς ΚΗ πρὸς ΗΕ· ἀλλὰ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ.

Ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΗΘ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐδείχθη.

Ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΗΖ τῷ ἀπὸ ΑΒ.

– ιβ΄ – Ἐὰν ἐπὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχούσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν αἷς αἱ παράλληλοι ἤχθωσαν.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η ταῖς ΕΔ, ΔΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ.

1 δὴ Halley : δὲ V ‖ 10 ΕΗΖ V^{pc} Ψ : ΕΖΗ V^{ac} ‖ 15 ιβ΄ Ψ : om. V ‖ 16 δύο] β΄ V ‖ 17 post τινος fort. addendum ἑτέρου ‖ 21 ἤχθωσαν Federspiel[2] : κατήχθωσαν V.

Je dis maintenant que, de plus, le rectangle ΕΗ, ΗΖ est égal au carré sur ΑΒ.

Que soit menée par Η une droite ΘΗΛΚ de manière ordonnée ; la tangente passant par Β est donc parallèle à ΗΘ[64] ; soit ΓΔ cette tangente.

Dès lors, puisque ΓΒ est égale à ΒΔ[65], alors le carré sur ΓΒ, c'est-à-dire le rectangle ΓΒ,ΒΔ, a, avec le carré sur ΒΑ, un rapport composé des rapports de ΓΒ à ΒΑ et de ΔΒ à ΒΑ ; mais ΘΗ est à ΗΖ comme ΓΒ est à ΒΑ[66] et ΗΚ est à ΗΕ comme ΔΒ est à ΒΑ ; le rapport du carré sur ΓΒ à celui sur ΒΑ est donc composé des rapports de ΘΗ à ΗΖ et de ΚΗ à ΗΕ ; mais le rapport du rectangle ΚΗ,ΗΘ au rectangle ΕΗ,ΗΖ est aussi composé des mêmes rapports ; le carré sur ΓΒ est donc à celui sur ΒΑ comme le rectangle ΚΗ,ΗΘ est au rectangle ΕΗ,ΗΖ.

Par permutation, le rectangle ΕΗ,ΗΖ est au carré sur ΑΒ comme le rectangle ΚΗ,ΗΘ est au carré sur ΓΒ. Or on a démontré que le rectangle ΚΗ,ΗΘ était égal au carré sur ΓΒ[67].

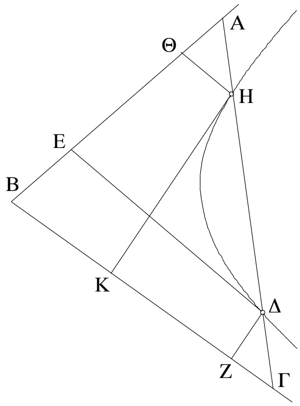
Le rectangle ΕΗ,ΗΖ est donc aussi égal au carré sur ΑΒ.

– 12 – *Si, d'un certain point parmi ceux qui sont sur la section, sont menées jusqu'aux asymptotes deux droites sous des angles quelconques, et que sont menées des parallèles à ces droites d'un certain point de la section, le rectangle compris par les parallèles sera égal au rectangle compris par les droites auxquelles ont été menées les parallèles.*

Soit une hyperbole, d'asymptotes ΑΒ et ΒΓ ; que soit pris un certain point Δ sur la section ; que, de ce point, soient menées des droites ΔΕ et ΔΖ sur les droites ΑΒ et ΒΓ ; que soit pris un autre point Η sur la section, et que, par Η, soient menées des parallèles ΗΘ et ΗΚ aux droites ΕΔ et ΔΖ.

[64] Prop. 5.
[65] Prop. 3.
[66] *Éléments*, VI. 4.
[67] Prop. 10.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Γ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΗΘ πρὸς ΕΔ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ· ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς ΔΕ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ.

– ιγ′ – Ἐὰν ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τις εὐθεῖα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ.

Λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

1-3 ΕΔΖ — pr. ὑπὸ c Ψ : iter. V ‖ 4 ΕΔ Ψ : τὸ ΕΔ V ‖ 8 ιγ′ Ψ : om. V ‖ 11 ΓΑ V[1] : ΓΔ V.

Je dis que le rectangle ΕΔ,ΔΖ est égal au rectangle ΘΗ,ΗΚ.

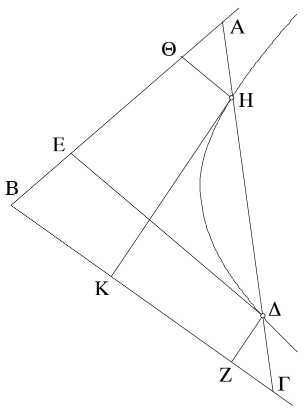


Fig. 12

Que soit menée une droite de jonction ΔΗ et qu'elle soit prolongée jusqu'aux points Α et Γ.

Dès lors, puisque le rectangle ΑΔ,ΔΓ est égal au rectangle ΑΗ,ΗΓ[68], alors ΔΓ est à ΓΗ comme ΑΗ est à ΑΔ ; mais ΗΘ est à ΕΔ comme ΑΗ est à ΑΔ et ΔΖ est à ΗΚ comme ΔΓ est à ΓΗ[69] ; ΔΖ est donc à ΗΚ comme ΘΗ est à ΔΕ.

Le rectangle ΕΔ,ΔΖ est donc égal au rectangle ΘΗ,ΗΚ[70].

– 13 – *Si, dans le lieu délimité*[71] *par les asymptotes et la section, est menée une certaine droite parallèle à l'une des asymptotes, elle rencontrera la section en un seul point*.

Soit une hyperbole, d'asymptotes ΓΑ et ΑΒ ; que soit pris un certain point Ε[72], et que, par ce point, soit menée une parallèle ΕΖ à ΑΒ.

Je dis qu'elle rencontrera la section.

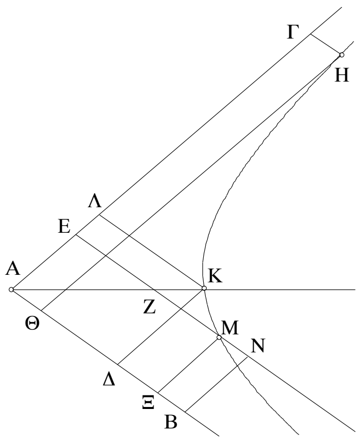
[68] Prop. 10.

[69] *Éléments*, VI.4.

[70] Dans son commentaire (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 292, 19-294, 2), Eutocius signale que certains de ses manuscrits présentaient une autre démonstration, qui faisait appel à deux parallèles à la tangente, l'une passant par Δ, l'autre par Η ; il affirme avoir « choisi » (ἐπελεξάμεθα) pour sa simplicité la démonstration éditée ici.

[71] L'emploi ici du verbe ἀφορίζω est un *hapax* dans le *corpus* mathématique classique.

[72] On attend après σημεῖον la précision <ἐπὶ τῆς ΑΓ> (« sur la droite ΑΓ »).



Εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰς ΓΑ, ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΗΓ, ΗΘ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ παρὰ τὰς ΓΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΚΔ· ὑπόκειται δὲ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΛΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ, ὅπερ ἀδύνατον· μεῖζον γάρ ἐστι καὶ ἡ ΚΛ τῆς ΕΖ καὶ ἡ ΛΑ τῆς ΑΕ.

Συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΖ τῇ τομῇ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Μ.

Λέγω δὴ <ὅτι> <καὶ> κατ' ἄλλο οὐ συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τῶν Μ, Ν τῇ ΓΑ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ, ΝΒ. Τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΝΒ, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

2 ΗΓ, ΗΘ V : an ΗΘ, ΗΓ ? || 5 π[αρὰ V^1 : κ V || 10 ὅτι add. Heiberg || καὶ addidi || 12 ΕΜ]Ξ V^1 : Ζ V.

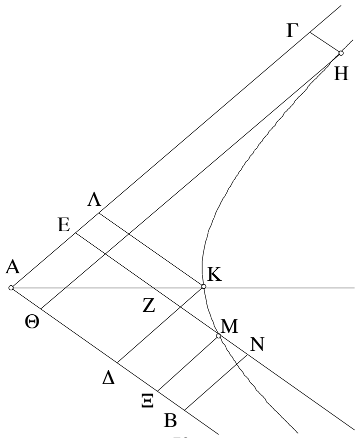


Fig. 13[73]

Qu'elle ne la rencontre pas, si c'est possible. Que soit pris un certain point H sur la section ; que, par H, soient menées des parallèles HΘ et HΓ à ΓA et à AB ; que le rectangle ΓH,HΘ soit égal au rectangle AE,EZ ; que soit menée une droite de jonction AZ et qu'elle soit prolongée ; elle rencontrera alors la section[74] ; qu'elle la rencontre en un point K, et que, par K, soient menées des parallèles KΛ et KΔ à ΓA et à AB ; le rectangle ΓH,HΘ est donc égal au rectangle ΛK,KΔ[75] ; or, par hypothèse, il est aussi égal au rectangle AE,EZ ; le rectangle ΔK,KΛ, c'est-à-dire le rectangle KΛ,ΛA, est donc égal au rectangle AE,EZ , ce qui est impossible, puisque KΛ est plus grande que EZ et ΛA que AE.

EZ rencontrera donc la section ; qu'elle la rencontre en un point M.

Je dis maintenant <que> <,de plus,> elle ne la rencontrera en aucun autre point.

Qu'elle la rencontre aussi en un point N, si c'est possible, et que, par les points M et N, soient menées des parallèles MΞ et NB à ΓA ; le rectangle EM,MΞ est donc égal au rectangle NE,NB, ce qui est impossible.

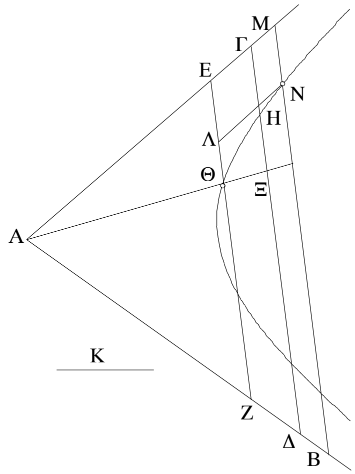
Elle ne rencontrera donc pas la section en un autre point.

[73] La figure est inachevée dans **V**.
[74] Prop. 2.
[75] Prop. 12.

– ιδʹ – Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, δοθὲν δὲ διάστημα τὸ Κ.

Λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΓ καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ εἰς ἔλασσον ἀφίξονται διάστημα τοῦ Κ.



Ἤχθωσαν γὰρ [τῇ] ἐφαπτομένῃ παράλληλοι αἱ ΕΘΖ, ΓΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘΕ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΕ πρὸς ΓΗ· μείζων δὲ ἡ ΔΗ τῆς ΖΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΓΗ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἐλάττονές εἰσιν.

Εἰλήφθω δὴ τοῦ Κ διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΝ· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝΒ. Ἡ ἄρα ΜΝ ἴση ἐστὶ τῇ ΕΛ καὶ διὰ τοῦτο ἐλάττων τῆς Κ.

1 ιδʹ Ψ : om. V ‖ 8 τῇ delevi ‖ 9 Α[Θ V ut vid. v Ψ : Ε c ‖ 12 ἐλάττονές Ψ : ἔλαττον V ‖ 17 ΜΝΒ Ψ : ΝΜΒ V.

– 14 – *Les asymptotes et la section, prolongées indéfiniment, s'approchent toujours plus l'une de l'autre et parviennent à un intervalle plus petit que tout intervalle donné.*

Soit une hyperbole, d'asymptotes ΑΒ et ΑΓ, et soit un intervalle donné Κ.

Je dis que les asymptotes ΑΒ, ΑΓ, ainsi que la section, prolongées, s'approchent toujours plus l'une de l'autre et parviendront à un intervalle plus petit que Κ.

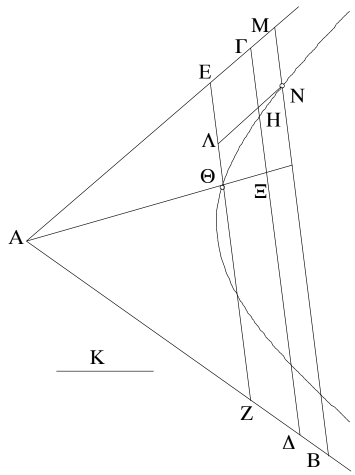


Fig. 14

Que soient menées des parallèles ΕΘΖ et ΓΗΔ à une tangente ; que soit menée une droite de jonction ΑΘ et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Ξ[76].

Dès lors, puisque le rectangle ΓΗ,ΗΔ est égal au rectangle ΖΘ,ΘΕ[77], alors ΘΕ est à ΓΗ comme ΔΗ est à ΖΘ ; or ΔΗ est plus grande que ΖΘ ; ΕΘ est donc aussi plus grande que ΓΗ. On démontrera pareillement que les droites suivantes aussi sont plus petites.

Que soit pris un intervalle ΕΛ[78] plus petit que l'intervalle Κ, et que, par

[76] Voir Note complémentaire [14].

[77] Prop. 10.

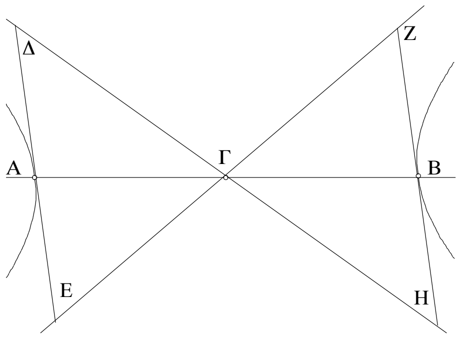
[78] On attendrait ici la précision <ἐπὶ τῆς ΕΖ> (« sur la droite ΕΖ »).

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πασῶν ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ ἔγγιόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ περιεχομένη γωνία ἐλάσσων ἐστὶ δηλαδὴ τῆς ὑπὸ ἑτέρων ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ περιεχομένης.

– ιε′ – Τῶν ἀντικειμένων τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμτωτοι.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ.

Λέγω ὅτι τῶν Α, Β τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.



Ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β σημείων ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΑΕ, ΖΒΗ· παράλληλοι ἄρα εἰσίν. Ἀπειλήφθω δὴ ἑκάστη τῶν ΔΑ, ΑΕ, ΖΒ, ΒΗ ἴσον δυναμένη τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους· ἴσαι ἄρα αἱ ΔΑ, ΑΕ, ΖΒ, ΒΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΗ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ διὰ τὰς παραλλήλους.

Ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΑ, ΑΕ δύναται τὸ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους, ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΔΓ, ΓΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῇ

1 ἀ[συμπτώτων V^{1sl} || 4 ιε′ Ψ : om. V || 13 ΓΖ Ψ : ΕΖ V.

Λ, soit menée une parallèle ΛN à AΓ ; elle rencontrera donc la section[79] ; qu'elle la rencontre en N, et que, par N, soit menée une parallèle MNB à EZ. MN est donc égale à EΛ ; en vertu de quoi, MN est plus petite que K.

Il suit évidemment de là que, parmi toutes les asymptotes de la section, ce sont les droites AB et AΓ qui sont plus rapprochées de la section, et que l'angle BAΓ est plus petit que l'angle compris par d'autres asymptotes de la section[80].

– 15 – *Les asymptotes de sections opposées sont communes*.

Soient des sections opposées, de diamètre AB et de centre Γ.

Je dis que les asymptotes des sections A et B sont communes.

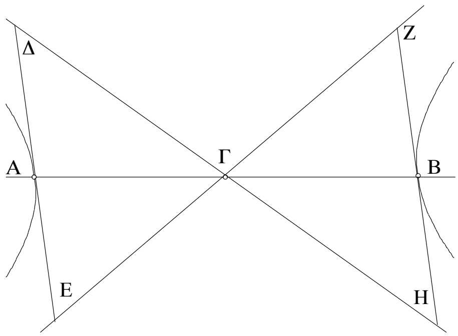


Fig. 15

Que soient menées par les points A et B des tangentes ΔAE et ZBH aux sections ; elles sont donc parallèles[81]. Que soient découpées des droites ΔA, AE, ZB et BH, et que le carré sur chacune d'elles soit équivalent au quart de la figure appliquée à AB ; les droites ΔA, AE, ZB et BH sont donc égales.

Que soient menées des droites de jonction ΓΔ, ΓE, ΓZ et ΓH ; il est évident que ΔΓ est dans le prolongement en ligne droite de ΓH et ΓE dans le prolongement de ΓZ, à cause des parallèles.

Dès lors, puisque l'on a une hyperbole, de diamètre AB et de tangente

[79] Prop. 13.
[80] Voir Note complémentaire [15].
[81] Voir I.44.

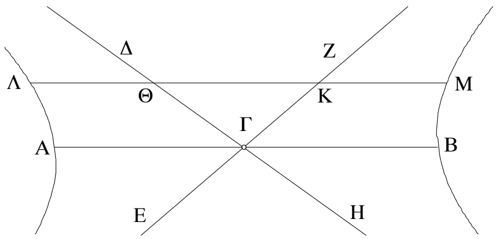
Β ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΖΓ, ΓΗ.

Τῶν ἀντικειμένων ἄρα κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

– ιϛʹ – Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομάς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ᾽ αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

Ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΓΗ, ΕΓΖ, καὶ διήχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν ΔΓ, ΓΖ ἡ ΘΚ.

Λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν καθ᾽ ἓν σημεῖον μόνον.



Ἐπεὶ γὰρ τῆς Α τομῆς ἀσύμπτωτοι εἰσιν αἱ ΔΓ, ΓΕ, καὶ διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΚ τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΓΖ, ἡ ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ· ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Β· συμπιπτέτω κατὰ τὰ Λ, Μ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΛΜ παράλληλος ἡ ΑΓΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ

2 αἱ Ψ : om. V ‖ 3 ιϛʹ Ψ : om. V ‖ 9 ΔΓΗ, ΕΓΖ Ψ : ΔΓ ἢ ΕΖ V ‖ 10 ΓΖ V^1 : ΔΖ V ‖ ἡ Ψ : ἢ V ‖ 16 τὰ Ψ : τὸ V.

ΔΕ, et que le carré sur chacune des droites ΔΑ et ΑΕ est équivalent au quart de la figure appliquée à ΑΒ, alors ΔΓ et ΓΕ sont les asymptotes[82]. Pour les mêmes raisons, ΖΓ et ΓΗ sont aussi les asymptotes de la section Β.

Les asymptotes d'opposées sont donc communes.

– 16 – *Si, dans des opposées, est menée une certaine droite coupant chacune des droites comprenant l'angle adjacent aux angles comprenant les sections, elle rencontrera chacune des opposées en un seul point, et les droites découpées sur elle par les sections du côté des asymptotes seront égales*.

Soient[83] des opposées Α et Β, de centre Γ et d'asymptotes ΔΓΗ et ΕΓΖ ; que soit menée une certaine droite ΘΚ coupant chacune des droites ΔΓ et ΓΖ.

Je dis que son prolongement rencontrera chacune des sections en un seul point.

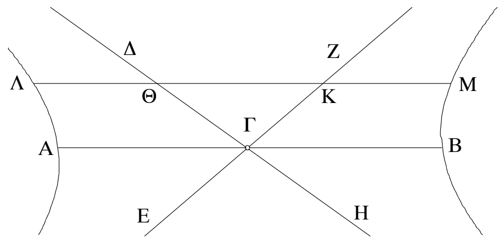


Fig. 16

Puisque ΔΓ et ΓΕ sont les asymptotes de la section Α et qu'est menée une certaine droite ΘΚ coupant chacune des droites comprenant l'angle adjacent ΔΓΖ, alors le prolongement de ΚΘ rencontrera la section[84] ; il rencontrera pareillement aussi la section Β ; qu'il les rencontre en des points Λ et Μ.

Que soit menée par Γ une parallèle ΑΓΒ à ΛΜ ; le rectangle ΚΛ,ΛΘ

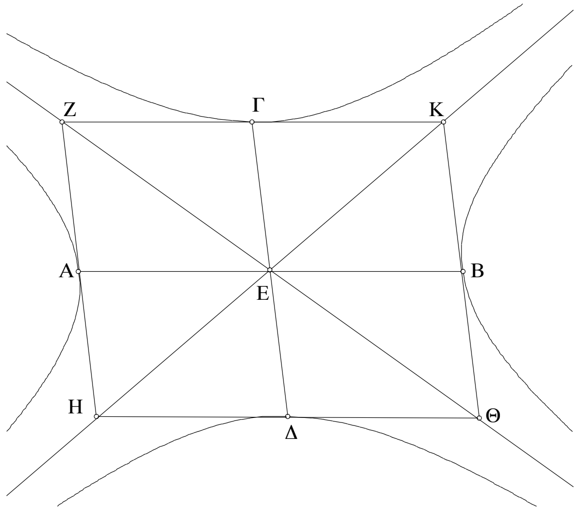
[82] Prop. 1.
[83] Voir Note complémentaire [16].
[84] Prop. 11.

μὲν ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΚ τῷ ἀπὸ ΓΒ, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ὑπὸ ΘΜΚ ἐστιν ἴσον, καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΚΜ.

– ιζʹ – Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

Ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι ὧν [αἱ] διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε.

Λέγω ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.



Ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων αἱ ΖΑΗ, ΗΔΘ, ΘΒΚ, ΚΓΖ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ.

Ἐπεζεύχθωσαν οὖν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ· εὐθεῖαι ἄρα εἰσὶ καὶ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ δίχα τέμνονται πᾶσαι κατὰ τὸ Ε σημεῖον.

Καὶ ἐπεὶ τὸ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδος ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, ἕκαστον ἄρα τῶν ἀπὸ ΖΑ, ΑΗ, ΚΒ,

3 ιζʹ Ψ : om. V ‖ 5 αἱ del. Federspiel[2] ‖ 12 πᾶσαι V : an αὗται ? ‖ 15 ἀπὸ Canon. : ὑπὸ V.

est donc égal au carré sur ΑΓ[85] et le rectangle ΘΜ,ΜΚ est égal au carré sur ΓΒ, de sorte que le rectangle ΚΛ,ΛΘ est aussi égal au rectangle ΘΜ,ΜΚ, et que ΛΘ est égale à ΚΜ.

– 17 – *Les asymptotes d'opposées conjuguées sont communes.*

Soient des opposées conjuguées, de diamètres conjugués ΑΒ et ΓΔ et de centre Ε.

Je dis que leurs asymptotes sont communes.

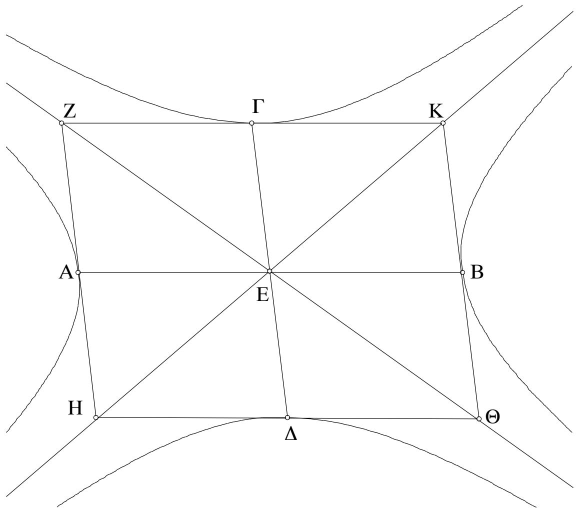


Fig. 17

Que soient menées par les points Α, Β, Γ et Δ des tangentes ΖΑΗ, ΗΔΘ, ΘΒΚ et ΚΓΖ aux sections ; le quadrilatère ΖΗΘΚ est donc un parallélogramme[86].

Que soient menées des lignes[87] de jonction ΖΕΘ et ΚΕΗ ; elles sont donc des droites et les diagonales du parallélogramme, et toutes[88] sont coupées en deux parties égales au point Ε.

Puisque la figure appliquée à la droite ΑΒ est égale au carré sur ΓΔ[89] et

[85] Prop. 11.
[86] Voir I.44.
[87] Il faut sous-entendre ici devant αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ non pas εὐθεῖαι, mais γραμμαί.
[88] L'emploi de πᾶσαι pour désigner deux droites est surprenant.
[89] I.60.

ΒΘ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους . Ἀσύπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῶν Α, Β τομῶν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ.

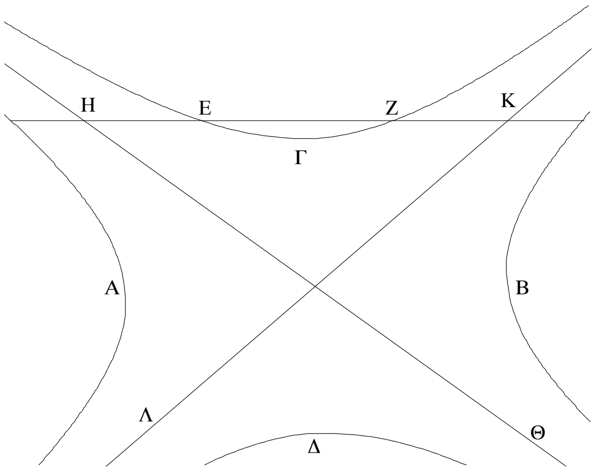
Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῶν Γ, Δ τομῶν αἱ αὐταί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

Τῶν ἄρα κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

– ιη′ – Ἐὰν μιᾷ τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συμπίπτουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῇ Γ τις εὐθεῖα συμπιπτέτω ἡ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς.

Λέγω ὅτι συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν Α, Β τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.



Ἔστωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΗΘ, ΚΛ. Ἡ ΕΖ ἄρα συμπίπτει ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΚΛ· φανερὸν οὖν ὡς καὶ ταῖς Α, Β τομαῖς συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

5 αἱ Ψ : om. V || 7 ιη′ Ψ : om. V || ἐὰν Canon. : ἐν V || 8 πίπτῃ V[1] : πίπη V.

que ΓΕ est égale à ΕΔ, chacun des carrés sur ΖΑ, ΑΗ, ΚΒ et ΒΘ est le quart de la figure appliquée à ΑΒ. Les droites ΖΕΘ et ΚΕΗ sont donc les asymptotes des sections Α et Β[90].

On démontrera pareillement que les mêmes droites sont aussi les asymptotes des sections Γ et Δ.

Les asymptotes d'opposées conjuguées sont donc communes.

– 18 – *Si une droite rencontre l'une de deux opposées conjuguées et que son prolongement de part et d'autre tombe à l'extérieur de la section, elle rencontrera chacune des deux sections adjacentes en un seul point*.

Soient des sections opposées conjuguées Α, Β, Γ et Δ ; qu'une certaine droite ΕΖ rencontre la section Γ, et que son prolongement de part et d'autre tombe à l'extérieur de la section.

Je dis qu'elle rencontrera chacune des sections Α et Β en un seul point.

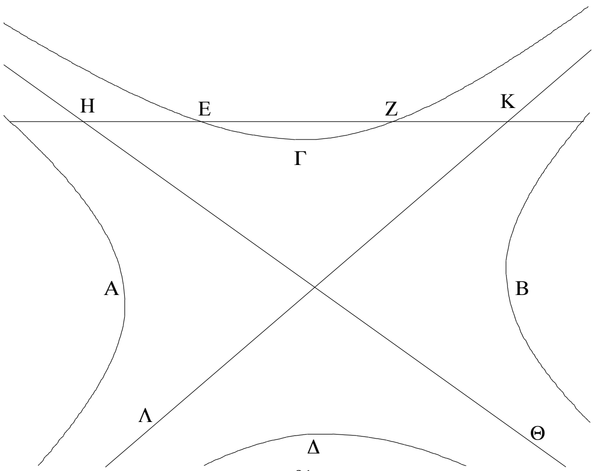


Fig. 18[91]

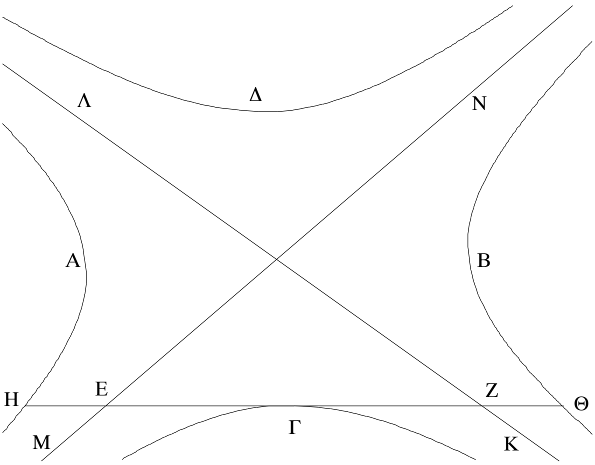
Soient des asymptotes ΗΘ et ΚΛ aux sections. ΕΖ rencontre donc chacune des droites ΗΘ et ΚΛ[92] ; il est donc évident qu'elle rencontrera aussi les sections Α et Β en un seul point[93].

[90] Prop. 1.
[91] J'ai reproduit ici la figure de **V**, qui ne représente que le cas de la sécante.
[92] Prop. 3 et 8.
[93] Prop. 16.

– ιθʹ – Ἐὰν <μιᾶς> τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπιψαύουσα ἧς ἔτυχε τῶν τομῶν, συμπεσεῖται ταῖς ἐφεξῆς τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῆς Γ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΓΖ.

Λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Γ.



Ὅτι μὲν οὖν συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς, φανερόν· συπιπτέτω κατὰ τὰ Η, Θ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ.

Ἤχθωσαν γὰρ αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΚΛ, ΜΝ. Ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΘ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ, καὶ ὅλη ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ ἐστιν ἴση.

– κʹ – Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν διὰ τῆς ἁφῆς, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἕως οὗ συμπέσῃ μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν, ἡ κατὰ τὴν σύμπτωσιν ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα

1 ιθʹ Ψ : om. V ‖ μιᾶς addidi vide adn. ‖ 5 ΕΓΖ Heiberg : ΓΕΖ V ‖ 13 κʹ Ψ : om. V ‖ 15 ἡ c v : iter. V ‖ 16 κατὰ c v Ψ : κατὰ τὰ V.

– 19 – *Si une certaine tangente est menée à l'une quelconque de deux sections opposées conjuguées*[94]*, elle rencontrera les sections adjacentes et sera coupée en deux parties égales au point de contact*.

Soient des sections opposées conjuguées Α, Β, Γ et Δ, et qu'une certaine droite ΕΓΖ soit tangente à la section Γ.

Je dis que son prolongement rencontrera les sections Α et Β et qu'elle sera coupée en deux parties égales en Γ.

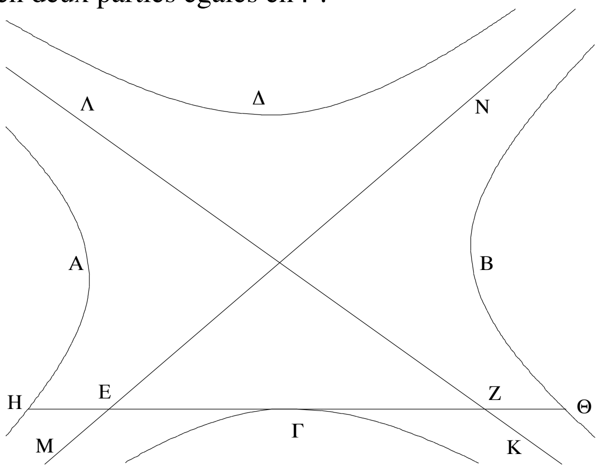


Fig. 19

Il est évident d'abord qu'elle rencontrera les sections Α et Β[95] ; qu'elle les rencontre en des points Η et Θ.

Je dis[96] que ΓΗ est égale à ΓΘ.

Que soient menées les asymptotes ΚΛ et ΜΝ des sections ; ΕΗ est donc égale à ΖΘ[97], ΓΕ est égale à ΓΖ[98], et la droite entière ΓΗ est égale à la droite ΓΘ.

– 20 – *Si une droite est tangente à l'une de deux opposées conjuguées, et que, par leur centre, sont menées deux droites, dont l'une passe par le point de contact et l'autre est parallèle à la tangente et est prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre l'une des sections adjacentes, la tangente à la*

[94] Sur la syntaxe de cet énoncé, voir Note complémentaire [17].

[95] Prop. 18.

[96] Il s'agit d'un second *diorisme*, même si la forme canonique du tour semble avoir été éliminée. Voir Tome 1.2, Note complémentaire [25].

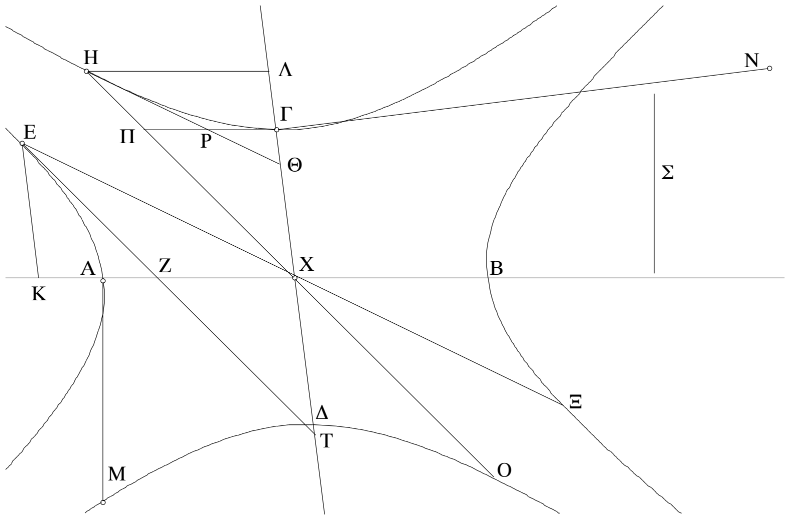
[97] Prop. 16.

[98] Prop. 3.

παράλληλος ἔσται τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ, αἱ δὲ διὰ τῶν ἁφῶν καὶ τοῦ κέντρου συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ τῆς Α τομῆς ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΓΧ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ Χ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΧΗ, καὶ διὰ τοῦ Η ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘΗ.

Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΘΗ τῇ ΧΕ, αἱ δὲ ΗΟ, ΕΞ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.



Ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΚΕ, ΗΛ, ΓΡΠ, παρ᾽ ἃς δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἔστωσαν αἱ ΑΜ, ΓΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ, ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ, τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ· ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ

6 τὸ c^{corr} v^{corr} Ψ : om. V ‖ 9 ΕΞ Ψ : ΕΖΞ V ‖ 14 ἡ e corr. V^1.

section au point de rencontre sera parallèle à la droite menée par le point de contact et le centre, et les droites passant par les points de contact et le centre seront des diamètres conjugués des opposées.

Soient des opposées conjuguées, de diamètres conjugués ΑΒ et ΓΔ et de centre Χ ; que soit menée une tangente ΕΖ à la section Α, et que son prolongement rencontre ΓΔ en un point Τ ; que soit menée une droite de jonction ΕΧ et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Ξ ; que, par Χ, soit menée une parallèle ΧΗ à ΕΖ, et que, par Η, soit menée une tangente ΘΗ à la section.

Je dis que ΘΗ est parallèle à ΧΕ et que les droites ΗΟ et ΕΞ sont des diamètres conjugués.

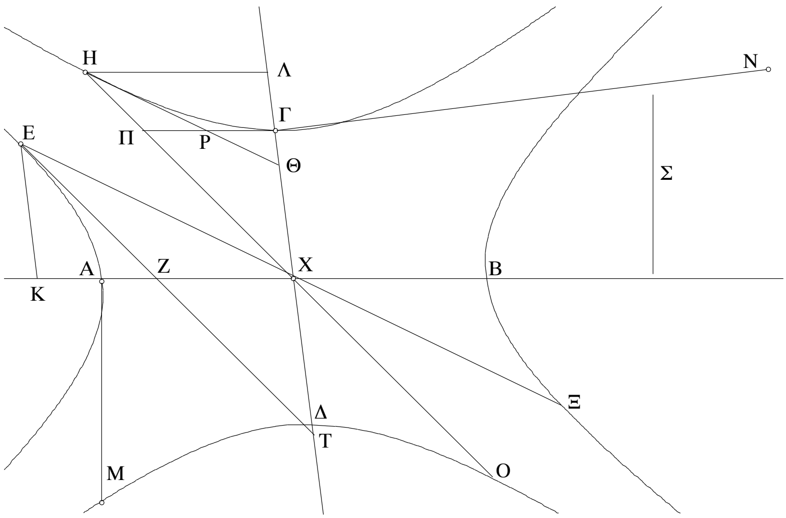


Fig. 20

Que soient menées des droites ΚΕ, ΗΛ et ΓΡΠ[99] de manière ordonnée, et soient des droites ΑΜ et ΓΝ auxquelles s'appliquent les aires équivalentes aux carrés des droites abaissées.

Dès lors, puisque ΝΓ est à ΓΔ comme ΒΑ est à ΑΜ[100], que, d'autre part, le rectangle ΧΚ,ΚΖ est au carré sur ΚΕ comme ΒΑ est à ΑΜ[101] et que le carré sur ΗΛ est au rectangle ΧΛ,ΛΘ comme ΝΓ est à ΓΔ, alors le

[99] La rédaction est rapide ; la droite ΓΡΠ est menée parallèlement aux ordonnées.
[100] Voir I.60.
[101] I.37.

τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ ἡ ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἐκ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὧν ὁ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ λόγῳ· ἑκάστη γὰρ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ ἑκάστῃ τῶν ΧΛ, ΛΗ, ΗΧ παράλληλός ἐστι· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ.

Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Κ, Λ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΚΧ τρίγωνον τῷ ΗΘΛ καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας ὑφ’ ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΧΚ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ· ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΚΧΗ τῇ ὑπὸ ΛΗΧ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΧΗ τῇ ὑπὸ ΘΗΧ ἐστιν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΗΘ.

Πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΠΗ πρὸς ΗΡ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς Σ· ἡ Σ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς παρ’ ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΗΟ διάμετρον καταγόμεναι ἐν ταῖς Γ, Δ τομαῖς.

Καὶ ἐπεὶ τῶν Α, Β τομῶν δευτέρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΕΤ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΚΧ παράλληλον ἀγάγωμεν, τὸ ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ ΓΧ.

Διὰ δὲ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ· ἀλλ’ ὡς μὲν ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ, ἡ ΤΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖΧ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΧ, τὸ ΧΤΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΧΓΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΘΧ· ὡς ἄρα τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΕΖΧ, τὸ ΤΖΧ πρὸς τὸ ΧΗΘ. Ἴσον ἄρα τὸ ΗΘΧ τρίγωνον τῷ ΧΕΖ· ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ΘΗΧ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΧΕΖ γωνίᾳ ἴσην·

15 πεποιήσθω c v Ψ : πεποιείσθω V ‖ 19 συμπίπτει Ψ : συμπίπτῃ V ‖ 20 ἀγάγωμεν Ψ : ἀγομένην V ‖ 28 alt. ὑπὸ Ψ : om. V ‖ ἴσην Ψ : om. V.

carré sur ΗΛ est aussi au rectangle ΧΛ,ΛΘ comme le rectangle ΧΚ,ΚΖ est au carré sur ΕΚ ; mais le rectangle ΧΚ,ΚΖ a, avec le carré sur ΚΕ, le rapport composé des rapports de ΧΚ à ΚΕ et de ΖΚ à ΚΕ, et le carré sur ΗΛ a, avec le rectangle ΧΛ,ΛΘ le rapport composé des rapports que ΗΛ a avec ΛΧ et que ΗΛ a avec ΛΘ ; le rapport composé des rapports de ΧΚ à ΚΕ et de ΖΚ à ΚΕ est donc identique au rapport composé des rapports de ΗΛ à ΛΧ et de ΗΛ à ΛΘ ; or, parmi ces rapports, celui de ΖΚ à ΚΕ est identique à celui de ΗΛ à ΛΧ[102], puisque chacune des droites ΕΚ, ΚΖ et ΖΕ est parallèle à chacune des droites ΧΛ, ΛΗ et ΗΧ ; le rapport restant de ΧΚ à ΚΕ est donc identique à celui de ΗΛ à ΛΘ.

D'autre part, les côtés comprenant des angles égaux en Κ et Λ sont en proportion ; le triangle ΕΚΧ est donc semblable au triangle ΗΘΛ, et ses angles sous-tendus par les côtés homologues seront égaux[103]. L'angle ΕΧΚ est donc égal à l'angle ΛΗΘ ; or l'angle entier ΚΧΗ est aussi égal à l'angle ΛΗΧ[104] ; l'angle restant ΕΧΗ est donc égal à l'angle ΘΗΧ ; ΕΧ est donc parallèle à ΗΘ[105].

Qu'il soit fait en sorte que ΘΗ soit à Σ comme ΠΗ est à ΗΡ ; Σ est donc la moitié de la droite à laquelle s'applique l'aire égale au carré sur les droites abaissées sur le diamètre ΗΟ dans les sections Γ et Δ[106].

Puisque ΓΔ est le second diamètre des sections Α et Β[107], et que ΕΤ la rencontre, alors le rectangle ΤΧ,ΕΚ est égal au carré sur ΓΧ ; en effet, si, du point Ε, nous menons une parallèle à ΚΧ, le rectangle compris par ΤΧ et la droite découpée par la parallèle sera égal au carré sur ΓΧ[108].

En vertu de quoi, le carré sur ΤΧ est à celui sur ΧΓ comme ΤΧ est à ΕΚ ; mais ΤΖ est à ΖΕ, c'est-à-dire le triangle ΤΧΖ est au triangle ΕΖΧ[109],

[102] *Éléments*, I.29 et VI.4.
[103] *Éléments*, VI.6.
[104] *Éléments*, I.29.
[105] *Éléments*, I.27. Voir Note complémentaire [18].
[106] Voir I.51.
[107] I.60.
[108] I.38. Voir Note complémentaire [19].
[109] *Éléments*, VI.1.

παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ μὲν ΕΧ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΗΧ· ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΧ, ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ὡς δὲ ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ· παράλληλοι γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Σ πρὸς ΘΗ, τῆς ΧΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, ὡς δὲ ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ.

Ἐναλλάξ ὡς τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΧ, τὸ ὑπὸ ΘΗΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΕΧ· ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ τῷ ἀπὸ ΕΧ.

Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ Σ,ΗΧ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΗΟ εἴδους· ἥ τε γὰρ ΗΧ τῆς ΗΟ ἐστιν ἡμίσεια, καὶ ἡ Σ τῆς παρ' ἣν δύνανται· τὸ δὲ ἀπὸ ΕΧ τέταρτον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΞ· ἴση γὰρ ἡ ΕΧ τῇ ΧΞ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΞ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΗΟ εἴδει.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΗΟ δύναται τὸ παρὰ τὴν ΕΞ εἶδος.

Αἱ ἄρα ΕΞ, ΗΟ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντικειμένων.

– κα′ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων δεικτέον ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων πρὸς μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων ἐστίν.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ ὧν [αἱ] διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ.

Λέγω ὅτι τὸ Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

3 pr. ἡ Ψ : om. V ‖ ΕΧ Ψ : ΕΧ τῇ ΗΘ V ‖ 12 Ζ]Ε[Χ e corr. V^1 ‖ 15 ἡ Σ Ψ : ἧς V ‖ 18 ἡ Ψ : om. V ‖ 19 ΗΟ Ψ : ΗΟΣ V ‖ 21 κα′ Ψ : om. V ‖ 22 μιᾷ Federspiel^2 (jam Heiberg) : μίαν V ‖ 23 ante τομαὶ del. αἱ V^1 ‖ αἱ del. Federspiel^2.

comme ΤΧ est à ΕΚ[110], et le triangle ΧΤΖ est au triangle ΧΓΠ, c'est-à-dire au triangle ΗΘΧ[111], comme le carré sur ΤΧ est à celui sur ΓΧ[112] ; le triangle ΤΖΧ est donc au triangle ΧΗΘ comme le triangle ΤΧΖ est au triangle ΕΖΧ. Le triangle ΗΘΧ est donc égal au triangle ΧΕΖ ; or il a aussi l'angle ΘΗΧ égal à l'angle ΧΕΖ[113], puisque ΕΧ est parallèle à ΗΘ et que ΕΖ l'est à ΗΧ ; les côtés comprenant les angles égaux sont donc inversement proportionnels[114] ; ΕΖ est donc à ΗΧ comme ΗΘ est à ΕΧ, et le rectangle ΘΗ,ΗΧ est donc égal au rectangle ΧΕ,ΕΖ.

Puisque ΡΗ est à ΗΠ comme Σ est à ΘΗ et que ΧΕ est à ΕΖ comme ΡΗ est à ΗΠ[115] – car ces droites sont parallèles –, alors ΧΕ est aussi à ΕΖ comme Σ est à ΘΗ ; mais, si la droite ΧΗ est prise comme hauteur commune, le rectangle Σ,ΧΗ est au rectangle ΘΗ,ΗΧ comme Σ est à ΘΗ, et le carré sur ΧΕ est au rectangle ΧΕ,ΕΖ comme ΧΕ est à ΕΖ ; le carré sur ΧΕ est donc aussi au rectangle ΧΕ,ΕΖ comme le rectangle Σ,ΧΗ est au rectangle ΘΗ,ΗΧ.

Par permutation, le rectangle ΘΗ,ΗΧ est au rectangle ΖΕ,ΕΧ comme le rectangle Σ,ΗΧ est au carré sur ΕΧ ; or le rectangle ΘΗ,ΗΧ est égal au rectangle ΧΕ,ΕΖ ; le rectangle Σ,ΗΧ est donc aussi égal au carré sur ΕΧ.

D'autre part, le rectangle Σ,ΗΧ est le quart de la figure appliquée à ΗΟ, puisque ΗΧ est la moitié de ΗΟ et que Σ est la moitié de la droite à laquelle s'applique l'aire égale au carré ; or le carré sur ΕΧ est le quart du carré sur ΕΞ, puisque ΕΧ est égale à ΧΞ ; le carré sur ΕΞ est donc égal à la figure appliquée à ΗΟ.

On démontrera pareillement que le carré sur ΗΟ est aussi équivalent à la figure appliquée à ΕΞ.

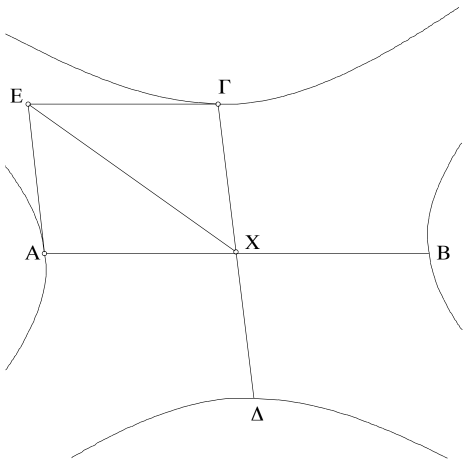
Les droites ΕΞ et ΗΟ sont donc des diamètres conjugués des opposées Α, Β, Γ et Δ.

– 21 – *Les mêmes hypothèses étant faites, il faut démontrer que le point de concours des tangentes est sur l'une des asymptotes*.

Soient des sections opposées conjuguées, de diamètres ΑΒ et ΓΔ, et que soient menées des tangentes ΑΕ et ΕΓ.

Je dis que le point Ε est sur l'asymptote.

[110] *Éléments*, VI.4.
[111] Voir Note complémentaire [20].
[112] *Éléments*, VI.19.
[113] *Éléments*, I.29.
[114] *Éléments*, VI.15. Voir Note complémentaire [21].
[115] *Éléments*, VI.4.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, τῷ δὲ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· ἀσύμπτωτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ.

Τὸ ἄρα Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

– κβ′ – Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καὶ ταῖς ἀσυμπτώτοις, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων <τῶν> γινομένων μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτώτων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνῳ.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἀσύμπτωτοι δὲ τῶν τομῶν ἔστωσαν αἱ ΕΧΖ, ΗΧΘ καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Χ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΧΓΔ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω τέμνουσα τήν τε ἐφεξῆς τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἡ ΘΕ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.

3 τοῦ c v Ψ : iter. V ‖ 6 κβ′ Ψ : om. V ‖ 9 τῶν add. Heiberg ‖ 13 ΕΧΖ Ψ : ΧΕΖ V ‖ ΗΧΘ Ψ : ΧΗΘ V ‖ 15 ΧΓΔ V : an ΧΓ ? ‖ 16 ΘΕ Mont. (ΕΘ Canon.) : ΘΧ V.

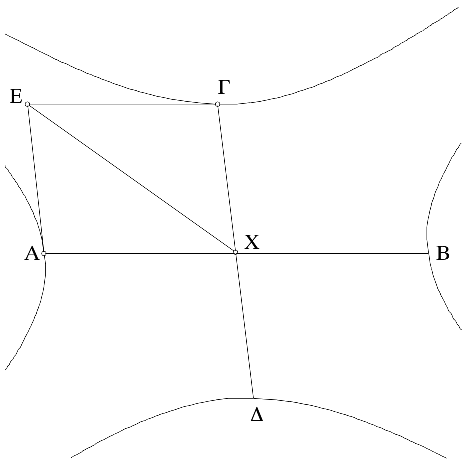


Fig. 21

Puisque le carré sur ΓΧ est égal au quart de la figure appliquée à ΑΒ[116] et que le carré sur ΑΕ est égal à celui sur ΓΧ, alors le carré sur ΑΕ est aussi égal au quart de la figure appliquée à ΑΒ.

Que soit menée la droite de jonction ΕΧ ; ΕΧ est donc une asymptote[117].

Le point Ε est donc sur l'asymptote.

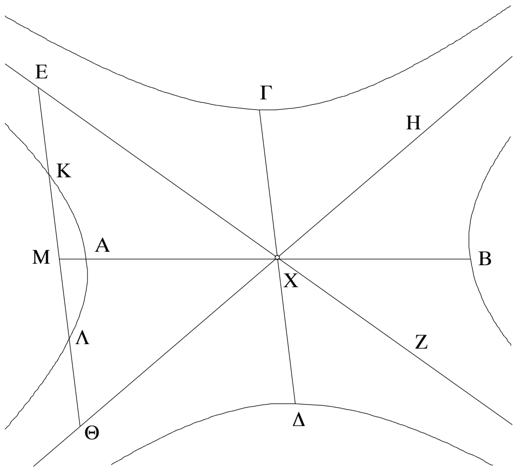
– 22 – *Si, dans des opposées conjuguées, une droite est menée du centre jusqu'à l'une quelconque des sections, et qu'est menée une parallèle à cette droite, rencontrant l'une des sections adjacentes et les asymptotes, le rectangle compris par les segments de la parallèle, situés entre la section et les asymptotes, est égal au carré sur la droite menée du centre.*

Soient des sections opposées conjuguées Α, Β, Γ et Δ, d'asymptotes ΕΧΖ et ΗΧΘ ; que, du centre Χ, soient menées une certaine droite ΓΧΔ et une parallèle ΘΕ à cette droite, coupant la section adjacente et les asymptotes.

Je dis que le rectangle ΕΚ,ΚΘ est égal au carré sur ΓΧ.

[116] I.60.

[117] Prop. 1.



Τετμήσθω δίχα ἡ ΚΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΧ ἐκβεβλήσθω· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῶν Α, Β τομῶν.

Καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ, ἡ ἄρα ΕΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐστὶ κατηγμένη· καὶ κέντρον τὸ Χ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. Τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους· τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ· καὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΧ.

– κγʹ – Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου τις <εὐθεῖα> ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα ταῖς ἐφεξῆς τρισὶ τομαῖς, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων τῶν γινομένων μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνου.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τοῦ Χ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν προσπιπτέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΧ, καὶ τῇ ΓΧ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομὰς ἡ ΚΛ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

10 κγʹ Ψ : om. V ‖ 11 εὐθεῖα add. Federspiel[2] ‖ 17 ὁποιανοῦν v^{pc} Ψ : ποιανοῦν V v^{ac}.

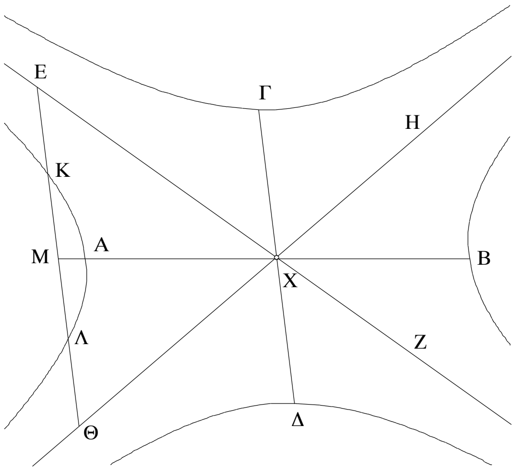


Fig. 22

Que ΚΛ soit coupée en deux parties égales en un point Μ, et que soit prolongée une droite de jonction ΜΧ ; ΑΒ est donc un diamètre des sections Α et Β.

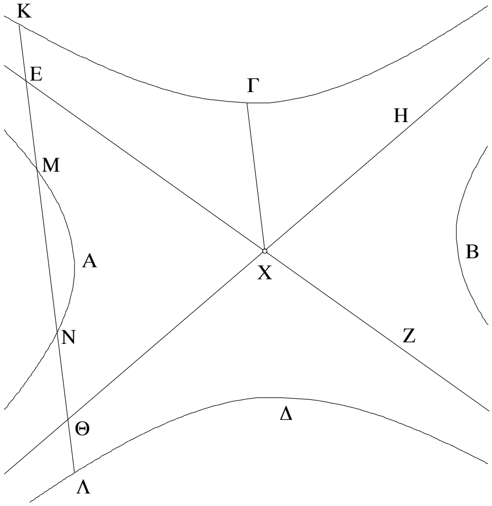
Puisque la tangente en Α est parallèle à ΕΘ[118], alors ΕΘ est abaissée sur ΑΒ de manière ordonnée ; d'autre part, Χ est le centre ; les droites ΑΒ et ΓΔ sont donc des diamètres conjugués. Le carré sur ΓΧ est donc égal au quart de la figure appliquée à ΑΒ[119] ; or le rectangle ΘΚ,ΚΕ est égal au quart de la figure appliquée à ΑΒ[120] ; le rectangle ΘΚ,ΚΕ est donc aussi égal au carré sur ΓΧ.

– 23 – *Si, dans des opposées conjuguées, une certaine droite est menée du centre jusqu'à l'une quelconque des sections, et qu'est menée une parallèle à cette droite, rencontrant les trois sections adjacentes, le rectangle compris par les segments de la parallèle situés entre les trois sections est le double du carré sur la droite menée du centre.*

Soient des sections opposées conjuguées Α, Β, Γ et Δ ; soit un centre Χ des sections ; que, de Χ, soient menées une certaine droite ΓΧ jusqu'à l'une quelconque des sections et une parallèle ΚΛ à la droite ΓΧ, coupant les trois sections adjacentes.

Je dis que le rectangle ΚΜ,ΜΛ est le double du carré sur ΓΧ.

[118] Prop. 5.
[119] I.60.
[120] Prop. 10.



Ἤχθωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν ὑπὸ ΘΜΕ, ΘΚΕ· τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι· καὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΚ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

– κδʹ – Ἐὰν παραβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι συμπιπτέτωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιεχέσθω.

Λέγω ὅτι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις <ἐκτὸς τῆς τομῆς>.

TEST. 2-3 EUT., *Comm. in Con.* (éd. Heiberg 302, 9-10).

1 ἀσύμπτωτοι Ψ : σύμπτωτοι V ‖ 5 κδʹ Ψ : om. V ‖ 11 συμπτώσεων v^{pc} : συμτώσεως V v^{ac} ‖ 12-13 ἐκτὸς τῆς τομῆς add. Federspiel[2].

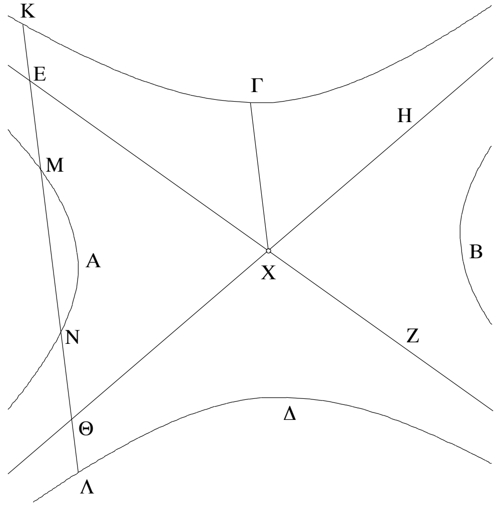


Fig. 23

Que soient menées des asymptotes ΕΖ et ΗΘ aux sections ; le carré sur ΓΧ est donc égal à chacun des rectangles ΘΜ,ΜΕ[121] et ΘΚ,ΚΕ[122] ; or la somme du rectangle ΘΜ,ΜΕ et du rectangle ΘΚ,ΚΕ est égale au rectangle ΛΜ,ΜΚ[123], parce que les droites extrêmes sont égales[124] ; le rectangle ΛΜ,ΜΚ est donc aussi le double du carré sur ΓΧ.

– 24 – *Si deux droites rencontrent chacune une parabole en deux points, et qu'un point de rencontre d'aucune des deux n'est entouré par les points de rencontre de l'autre, les droites se rencontreront entre elles à l'extérieur de la section.*

Soit une parabole ΑΒΓΔ ; que deux droites ΑΒ et ΓΔ rencontrent la parabole, et qu'un point de rencontre d'aucune des deux ne soit entouré par les points de rencontre de l'autre.

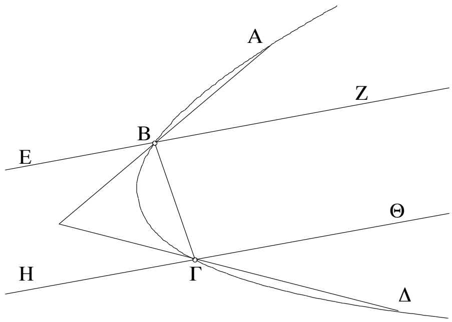
Je dis que leurs prolongements se rencontreront entre elles <à l'extérieur de la section>.

[121] Prop. 22

[122] Prop. 11.

[123] Ce résultat fait l'objet d'un lemme chez Pappus et Eutocius, voir Note complémentaire [22].

[124] Prop. 8 et 16.



Ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΕΒΖ, ΗΓΘ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ καὶ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρα τὴν τομὴν τέμνει.

Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν, αἱ δὲ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι ἐλάττονας ποιοῦσι δύο ὀρθῶν.

Συμπεσοῦνται ἄρα ἀλλήλαις ἐκτὸς τῆς τομῆς.

– κε´ – Ἐὰν ὑπερβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ τεμνέτωσαν δύο εὐθεῖαι τὴν τομὴν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ μηδετέρας αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας περιεχέσθω.

Λέγω ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας.

4 ΗΓΒ Canon. (ΒΓΗ Ψ) : om. V || 7 κε´ Ψ : om. V || 9 συμπτώσεων v^{pc} : συμπτώσεως V v^{ac} || 10 γωνίας Ψ : γωνίαν V.

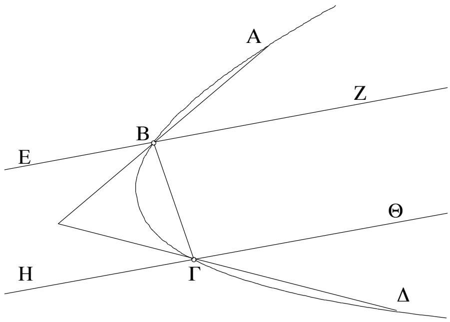


Fig. 24

Que soient menés par les points Β et Γ des diamètres ΕΒΖ et ΗΓΘ de la section ; ils sont donc parallèles[125], et chacun coupe la section en un seul point[126].

Que soit menée une droite de jonction ΒΓ ; la somme des angles ΕΒΓ et ΗΓΒ[127] est donc égale à deux droits[128], et les prolongements des droites ΔΓ et ΒΑ font des angles plus petits que deux droits.

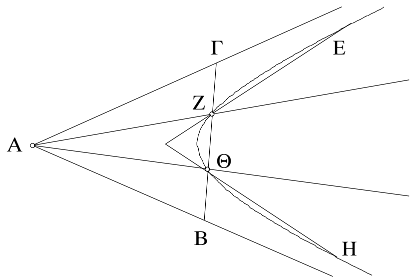
Ils se rencontreront donc entre eux à l'extérieur de la section[129].

– 25 – *Si deux droites rencontrent chacune une hyperbole en deux points, et qu'un point de rencontre d'aucune des deux n'est entouré par les points de rencontre de l'autre, les droites se rencontreront entre elles à l'extérieur de la section et à l'intérieur de l'angle comprenant la section.*

Soit une hyperbole, d'asymptotes ΑΒ et ΑΓ ; que deux droites ΕΖ et ΗΘ coupent la section, et qu'un point de rencontre d'aucune des deux ne soit entouré par les points de rencontre de l'autre.

Je dis que les prolongements des droites ΕΖ et ΗΘ se rencontreront à l'extérieur de la section et à l'intérieur de l'angle ΓΑΒ.

[125] I.51, épilogue.
[126] I.26.
[127] Voir Note complémentaire [23].
[128] *Éléments*, I.29.
[129] *Éléments*, I, postulat 5.



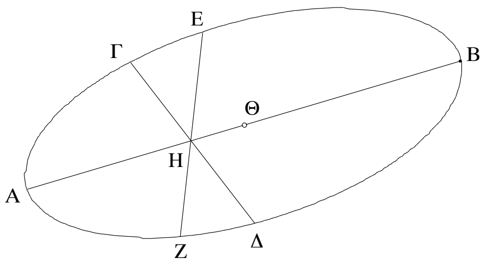
Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΖ, ΑΘ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς ὑπὸ ΑΖΘ, ΑΘΖ γωνίας, εἰσὶ δὲ αἱ εἰρημέναι γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν κἂν ἐφαπτόμεναι ὦσι τῆς τομῆς αἱ ΕΖ, ΗΘ.

– κϛ΄ – Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΕΖ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Β.



7 κἂν Ψ : καὶ V || τῆς τομῆς Federspiel[2] : τῶν τομῶν V || ΕΖ Ψ : ΕΞ V ut vid. || 8 κϛ΄ Ψ : om. V || 13 τὰ Ψ : τὸ V.

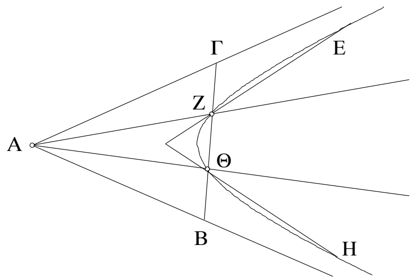


Fig. 25

Que soient menées des droites de jonction ΑΖ et ΑΘ et qu'elles soient prolongées ; que soit menée une droite de jonction ΖΘ.

Puisque les prolongements des droites ΕΖ et ΗΘ coupent les angles ΑΖΘ et ΑΘΖ, et que la somme des angles en question est plus petite que deux droits[130], les prolongements des droites ΕΖ et ΗΘ se rencontreront entre eux à l'extérieur de la section et à l'intérieur de l'angle ΒΑΓ.

On fera la même démonstration si les droites ΕΖ et ΗΘ sont tangentes à la section[131].

– 26 – *Si, dans une ellipse ou une circonférence de cercle, deux droites se coupent l'une l'autre sans passer par le centre, elles ne se coupent pas en deux parties égales.*

Que, dans une ellipse ou une circonférence de cercle, deux droites ΓΔ et ΕΖ ne passant pas par le centre se coupent l'une l'autre en deux parties égales en un point Η, si c'est possible ; soit un centre Θ de la section ; que soit menée une droite de jonction ΗΘ et qu'elle soit prolongée jusqu'en des points Α et Β[132].

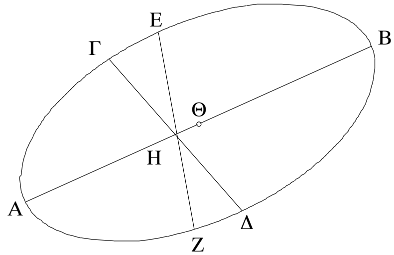


Fig. 26

[130] *Éléments*, I.17.

[131] Eutocius avait pris soin de signaler le fait pour la proposition 24.

[132] Sur la rédaction de ce passage, voir Note complémentaire [24].

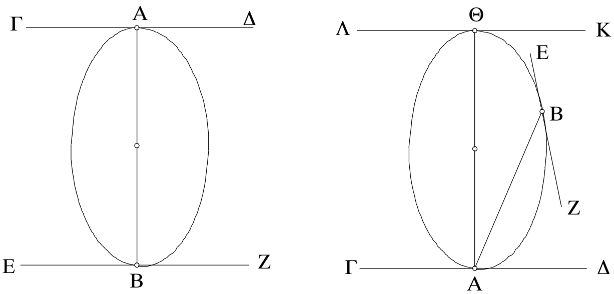
Ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τὴν ΕΖ δίχα τέμνουσα, ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῇ ΓΔ, ὥστε καὶ ἡ ΕΖ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα αἱ ΓΔ, ΕΖ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

– κζʹ – Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσιν, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ᾖ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου.

Ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου.

Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.



Ἐπεὶ γὰρ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς τομῆς, καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α ἡ ΓΔ, ἡ ΓΔ ἄρα παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως κατηγμέναις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΖ παράλληλός ἐστι ταῖς αὐταῖς· καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστιν.

5 δίχα Ψ : om. V || 6 κζʹ Ψ : om. V || 10 ἢ c Ψ : ἡ V || 11 ΕΒΖ Ψ : ΒΕΖ V.

Dès lors, puisque AB, qui coupe en deux parties égales la droite EZ, est un diamètre, alors la tangente en A est parallèle à EZ[133]. On démontrera pareillement qu'elle est aussi parallèle à ΓΔ, de sorte que EZ est aussi parallèle à ΓΔ, ce qui est impossible.

Les droites ΓΔ et EZ ne se coupent donc pas l'une l'autre en deux parties égales.

– 27 – *Si deux droites sont tangentes à une ellipse ou à une circonférence de cercle, et que la droite joignant les points de contact passe par le centre de la section, les tangentes seront parallèles ; si elle ne passe pas par le centre, les tangentes se rencontreront du même côté du centre*[134].

Soit une ellipse ou une circonférence de cercle AB ; que soient menées des tangentes ΓΑΔ et EBZ à la section ; que soit menée une droite de jonction AB et qu'elle passe d'abord par le centre.

Je dis que ΓΔ est parallèle à EZ.

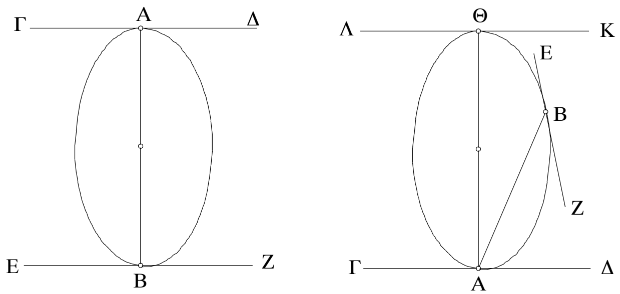


Fig. 27.1 27.2

Puisque AB est un diamètre de la section et que ΓΔ est tangente à la section en un point A, alors ΓΔ est parallèle aux droites abaissées sur AB de manière ordonnée[135]. Pour les mêmes raisons, BZ est aussi parallèle aux mêmes droites abaissées ; ΓΔ est donc aussi parallèle à EZ[136].

[133] Prop. 6.

[134] La traduction « du même côté du centre » n'est que le calque d'un texte grec lacunaire, si l'on en juge par l'expression correcte de la *conclusion*.

[135] Voir I.17.

[136] *Éléments*, I.30.

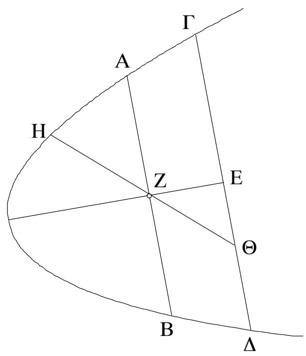
Μὴ ἐρχέσθω δὴ ἡ ΑΒ διὰ τοῦ κέντρου, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἤχθω διάμετρος ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΓΔ.

Ἡ ἄρα ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου ἐν οἷς ἐστιν ἡ ΑΒ.

– κη′ – Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖά τις δίχα τέμνῃ, διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

Ἐν γὰρ κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ ἐκβεβλήσθω.

Λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.



Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΗΖΘ. Ἡ ἄρα κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ, ὥστε ἡ αὐτὴ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ· καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΓΘ τῇ ΘΔ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση. Οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΘ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΕΖ.

Ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

6 κη′ Ψ : om. V ‖ 12 ΗΖΘ Ψ : ΗΘΖ V.

Que AB ne passe pas par le centre, comme c'est le cas sur la deuxième figure ; que soit mené un diamètre AΘ, et que, par Θ, soit menée une tangente KΘΛ ; KΛ est donc parallèle à ΓΔ[137].

Le prolongement de EZ rencontrera donc ΓΔ du même côté du centre que la droite AB[138].

– 28 – *Si, dans une section de cône ou une circonférence de cercle, une certaine droite coupe deux parallèles en deux parties égales, elle sera un diamètre de la section.*

Que, dans une section de cône, deux parallèles AB et ΓΔ soient coupées en deux parties égales en deux points E et Z ; que soit menée une droite de jonction EZ et qu'elle soit prolongée.

Je dis que cette droite est un diamètre de la section.

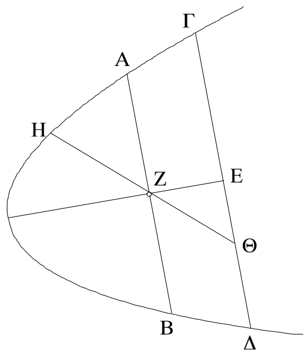


Fig. 28

Si ce n'est pas le cas, que ce soit une droite HZΘ, si c'est possible. La tangente en H est donc parallèle à AB[139], de sorte qu'elle est aussi parallèle à ΓΔ[140] ; d'autre part, HΘ est un diamètre ; ΓΘ est donc égale à ΘΔ, ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΓE est égale à EΔ. HΘ n'est donc pas un diamètre.

On démontrera pareillement que ce n'est pas non plus le cas d'aucune autre droite que EZ.

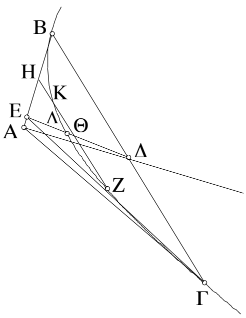
La droite EZ sera donc un diamètre de la section.

[137] Voir I.17.
[138] *Éléments*, I, postulat 5.
[139] Prop. 5 et 6.
[140] *Éléments*, I.30.

– κθʹ – Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι ἤχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ.

Λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω διάμετρος ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· τεμεῖ δὴ τὴν τομήν· τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΓΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ, ἴση καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΘΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΒΓ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΓ παράλληλος, καὶ ἡ ΖΗ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ. Ἴση ἄρα ἡ ΖΘ τῇ ΘΚ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ.

– λʹ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη διάμετρος δίχα τεμεῖ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

1 κθʹ Ψ : om. V ‖ 2 ἡ Ψ : om. V ‖ 9 ΔΕ V^1 : ΒΕ V ‖ 11 ΖΚΗ edd. : ΖΗΚ V ‖ 12 ἐστὶν — ἴση Canon. : om. V ‖ 13 Λ V^1 : Α V ‖ ἔστι Canon. : καὶ ἔστι.

– 29 – *Si, dans une section de cône ou une circonférence de cercle, deux tangentes se rencontrent, la droite menée de leur intersection jusqu'au milieu de la droite joignant les points de contact sera un diamètre de la section.*

Soit une section de cône ou une circonférence de cercle, de tangentes ΑΒ et ΑΓ se rencontrant en un point Α ; que soit menée une droite de jonction ΒΓ et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Δ, et que soit menée une droite de jonction ΑΔ.

Je dis que cette droite est un diamètre de la section.

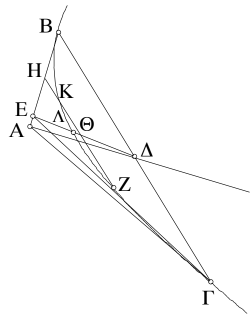


Fig. 29[141]

Soit un diamètre ΔΕ, si c'est possible, et que soit menée une droite de jonction ΕΓ ; elle coupera alors la section[142] ; qu'elle la coupe en un point Ζ, et que, par Ζ, soit menée une parallèle ΖΚΗ à ΓΔΒ.

Dès lors, puisque ΓΔ est égale à ΔΒ, ΖΘ est aussi égale à ΘΗ[143].

Puisque la tangente en Λ est parallèle à ΒΓ[144] et que ΖΗ est aussi parallèle à ΒΓ, alors ΖΗ est aussi parallèle à la tangente en Λ. ΖΘ est donc égale à ΘΚ[145], ce qui est impossible ; ΔΕ n'est donc pas un diamètre.

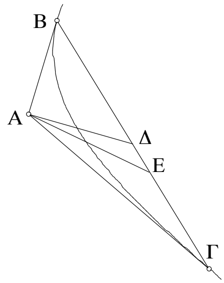
On démontrera pareillement que ce n'est pas non plus le cas d'aucune autre droite que ΑΔ.

– 30 – *Si deux droites tangentes à une section de cône ou à une circonférence de cercle se rencontrent, le diamètre mené de leur point de rencontre coupera en deux parties égales la droite joignant les points de contact.*

[141] ΖΚ n'est pas prolongée jusqu'au point Η dans **V**, et la lettre Κ est omise.
[142] I.35 et 36.
[143] *Éléments*, VI.4.
[144] Prop. 5 et 6.
[145] I.46 et 47.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο ἐφαπτόμεναι αἱ ΒΑ, ΑΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΑΔ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΔΓ.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἴση ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΔ, ὅπερ ἄτοπον.

Εἴτε γὰρ ἔλλειψίς ἐστιν ἡ τομή, τὸ Α καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι κέντρον ἔσται τῆς τομῆς ἐκτός, ὅπερ ἀδύνατον.

Εἴτε παραβολή ἐστιν ἡ τομή, συμπίπτουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι.

Εἴτε ὑπερβολή ἐστι, καὶ συμπίπτουσι τῇ τομῇ αἱ ΒΑ, ΑΓ μὴ περιέχουσαι τὰς ἑαυτῶν συμπτώσεις, ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν γωνίας <τὸ Α>· ἀλλὰ καὶ ἐπ' αὐτῆς· κέντρον γὰρ ὑπόκειται διαμέτρων οὐσῶν τῶν ΔΑ, ΑΕ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ ἐστιν ἴση.

– λα΄ – Ἐὰν ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

5 εἰ v^{pc} Ψ : ἢ V v^{ac} ‖ 8 καθ' ὅ] καθὸ V ut semper ‖ 15 τὸ Α addidi vide adn. ‖ 18 λα΄ Ψ : om. V ‖ 20 αἱ Ψ : om. V.

Soit une section de cône ou une circonférence de cercle ΒΓ ; que soient menées deux tangentes ΒΑ et ΑΓ à la section et qu'elles se rencontrent en un point Α ; que soient menées une droite de jonction ΒΓ et, par Α, un diamètre ΑΔ de la section.

Je dis que ΔΒ est égale à ΔΓ.

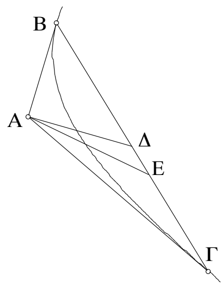


Fig. 30

Qu'elle ne le soit pas, mais qu'une droite ΒΕ soit égale à une droite ΕΓ, si c'est possible, et que soit menée une droite de jonction ΑΕ ; ΑΕ est donc un diamètre de la section[146] ; or ΑΔ est aussi un diamètre de la section, ce qui est absurde.

En effet, si la section est une ellipse, le point Α de concours des diamètres sera le centre de la section, à l'extérieur, ce qui est impossible.

Si la section est une parabole, les diamètres sont concourants[147].

Si la section est une hyperbole, et que les droites ΒΑ et ΑΓ rencontrent la section sans comprendre leurs points de rencontre[148], <le point Α> est à l'intérieur de l'angle comprenant l'hyperbole[149] ; mais il est aussi au sommet de l'angle, puisque, par hypothèse, il est le centre, les droites ΔΑ et ΑΕ étant des diamètres, ce qui est absurde[150].

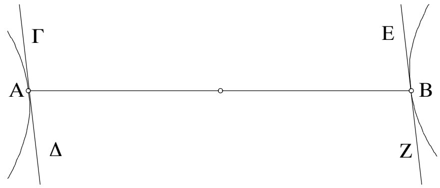
ΒΕ n'est donc pas égale à ΕΓ.

– 31 – *Si deux droites*[151] *sont tangentes <chacune> à chacune de deux opposées, et que la droite joignant les points de contact passe*[152] *par le*

[146] Prop. 29.
[147] Ce qui est impossible selon I.51, épilogue.
[148] Voir Note complémentaire [25].
[149] Prop. 25.
[150] Sur l'ensemble de cette explication postposée, voir Note complémentaire [26].
[151] δύο εὐθεῖαι est un pluriel distributif.
[152] Voir Note complémentaire [27].

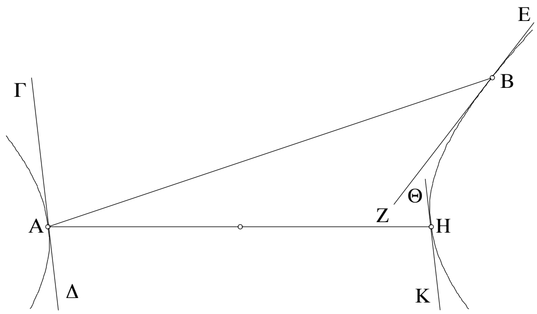
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ κατὰ τὰ Α, Β, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη πιπτέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν.

Λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.



Ἐπεὶ γὰρ ἀντικείμεναί εἰσι τομαί ὧν διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, καὶ μιᾶς αὐτῶν ἐφάπτεται ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Α, ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ ΕΖ· παράλληλός ἐστιν ἄρα ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν, καὶ ἤχθω διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΑΗ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘΚ· ἡ ΘΚ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.



Καὶ ἐπεὶ ὑπερβολῆς εὐθεῖαι ἐφάπτονται αἱ ΕΖ, ΘΚ, συμπεσοῦνται ἄρα· καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΘΚ τῇ ΓΔ· καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ

11 pr. ΘΚ V : ΘΚ κατὰ τὸ Η Federspiel[3].

centre, les tangentes seront parallèles ; si elle ne passe pas par le centre, les tangentes se rencontreront du même côté que le centre[153].

Soient des sections opposées Α et Β et des tangentes ΓΑΔ et ΕΒΖ à ces sections en des points Α et en Β, et que la droite joignant les points Α et Β passe d'abord par le centre des sections.

Je dis que ΓΔ est parallèle à ΕΖ.

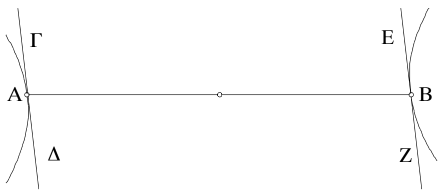


Fig. 31.1

Puisque l'on a des sections opposées, de diamètre ΑΒ, et qu'une droite ΓΔ est tangente à l'une d'elles en un point Α, la parallèle à ΓΔ menée par Β est tangente à la section[154] ; or ΕΖ est aussi une tangente ; ΓΔ est donc parallèle à ΕΖ.

Que la droite joignant Α et Β ne passe pas par le centre des sections ; que soit menés un diamètre ΑΗ des sections et une tangente ΘΚ à la section ; ΘΚ est donc parallèle à ΓΔ[155].

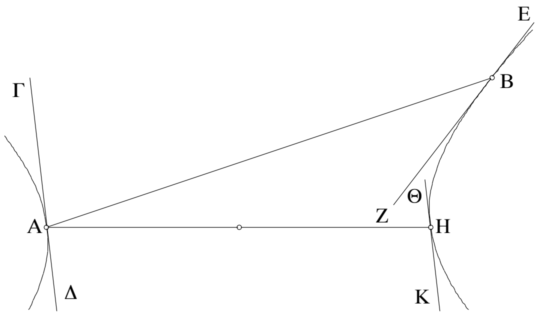


Fig. 31.2

Puisque des droites ΕΖ et ΘΚ sont tangentes à une hyperbole, alors

[153] C'est-à-dire, par rapport à la droite qui joint les points de contact, du même côté que le centre ; voir Note complémentaire [28].

[154] Voir I.44.

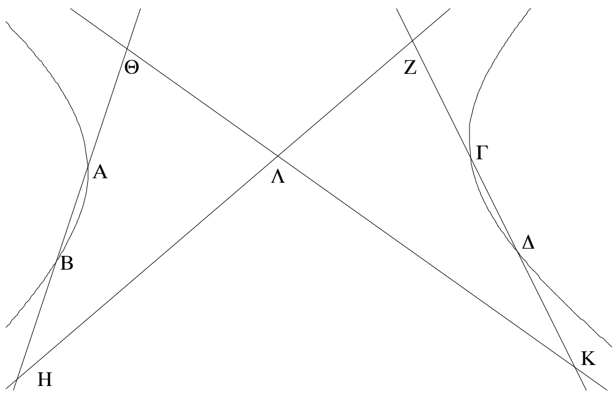
[155] Voir I.44.

ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται· καὶ φανερὸν ὅτι ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

– λβʹ – Ἐὰν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι συμπίπτωσι καθʼ ἓν ἐφαπτόμεναι ἢ κατὰ δύο τέμνουσαι, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἤτοι καθʼ ἕν ἐφαπτόμεναι ἤτοι κατὰ δύο τέμνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν.

Λέγω ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.



Ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἡ ΑΒ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις· συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Η.

Καὶ ἐπεὶ ὑπόκεινται συμπίπτουσαι αἱ ΖΚ, ΘΗ, φανερὸν ὅτι ἤτοι ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΘΛΖ γωνίαν τόπῳ συμπεσοῦνται ἢ ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΚΛΗ.

3 λβʹ Ψ : om. V ‖ συμπίπτωσι Ψ : συμπίπτουσι V ‖ 5 συμπίπτωσιν Ψ : συμπίπτουσιν V ‖ 12 ἀσύμπτωτοι Ψ : σύμπτωτοι V ‖ 15 ΖΚ Mont. : ΖΗ V ‖ 16 τὴν Ψ : om. V.

elles se rencontreront[156] ; d'autre part, ΘΚ est parallèle à ΓΔ ; les prolongements des droites ΓΔ et ΕΖ se rencontreront donc aussi, et il est évident qu'elles se rencontreront du même côté que le centre[157].

– 32 – *Si des droites rencontrent <chacune> chacune de deux opposées, soit en les touchant en un point, soit en les coupant en deux points, et que les prolongements de ces droites se rencontrent, leur point de rencontre sera dans l'angle adjacent à l'angle qui comprend la section.*

Soient des sections opposées et des droites ΑΒ et ΓΔ ou bien tangentes aux sections en un point ou bien sécantes en deux points, et que leurs prolongements se rencontrent.

Je dis que leur point de rencontre sera dans l'angle adjacent à l'angle qui comprend la section.

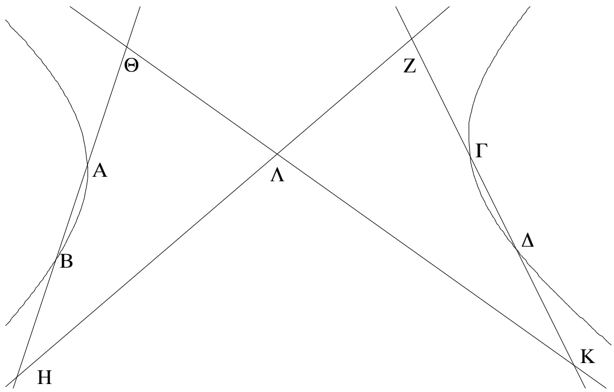


Fig. 32

Soient des asymptotes ΖΗ et ΘΚ des sections. Le prolongement de ΑΒ rencontrera donc les asymptotes[158] ; qu'il les rencontre en des points Θ et Η.

Puisque, par hypothèse, les droites ΖΚ et ΘΗ se rencontrent, il est évident qu'elles se rencontreront ou bien dans le lieu situé sous l'angle[159] ΘΛΖ ou bien dans le lieu situé sous l'angle ΚΛΗ.

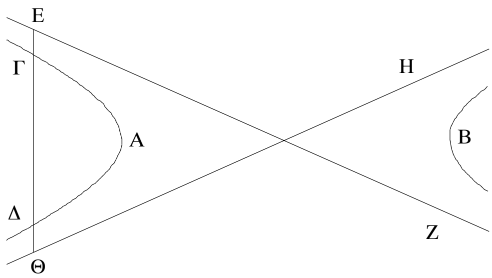
[156] Prop. 25.
[157] C'est-à-dire, par rapport à la droite ΑΒ, du même côté que le centre.
[158] Prop. 8.
[159] L'expression est rare ; voir Note complémentaire [29].

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐφάπτωνται.

– λγ΄ – Ἐὰν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα συμπίπτουσα ἐκβληθεῖσα ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἀλλὰ πεσεῖται διὰ τῶν τριῶν τόπων ὧν ἐστιν εἷς μὲν ὁ ὑπὸ τὴν περιέχουσαν γωνίαν τὴν τομήν, δύο δὲ οἱ ὑπὸ τὰς γωνίας τὰς ἐφεξῆς τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τὴν Α τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς.

Λέγω ὅτι ἡ ΓΔ οὐ συμπίπτει τῇ Β τομῇ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. Οὐ συμπίπτει δὲ κατ᾽ ἄλλα ἢ τὰ Ε, Θ, ὥστε οὐ συμπεσεῖται οὐδὲ τῇ Β τομῇ.

Καὶ φανερὸν ὅτι διὰ τῶν τριῶν τόπων πεσεῖται.

Ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ τις εὐθεῖα, οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα· εἰ γὰρ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα, διὰ τὸ προδεδειγμένον τῇ ἑτέρᾳ τομῇ οὐ συμπεσεῖται.

2 λγ΄ edd. : λβ΄ Ψ om. V || εὐθεῖα c v Ψ : εὐθείᾳ V.

Pareillement aussi si ces droites sont tangentes aux sections[160].

– 33 – *Si une droite rencontre l'une de deux opposées, et que son prolongement de part et d'autre tombe à l'extérieur de la section*[161]*, elle ne rencontrera pas l'autre section, mais passera par trois lieux, dont l'un est celui qui est situé sous l'angle qui comprend la section, et les deux autres sont situés sous les angles adjacents à l'angle qui comprend la section.*

Soient des sections opposées Α et Β ; qu'une certaine droite ΓΔ coupe la section Α, et que son prolongement de part et d'autre tombe à l'extérieur de la section.

Je dis que ΓΔ ne rencontre pas la section Β.

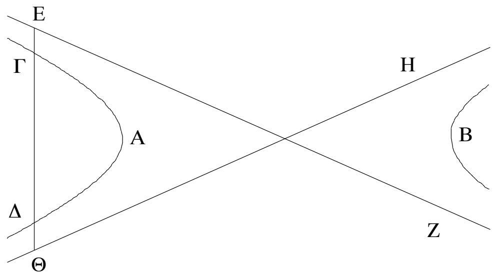


Fig. 33

Que soient menées des asymptotes ΕΖ et ΗΘ des sections ; le prolongement de ΓΔ rencontrera donc les asymptotes[162]. Or il ne les rencontre pas en d'autres points que Ε et Θ, de sorte qu'il ne rencontrera pas non plus la section Β.

D'autre part, il est évident qu'il passera par les trois lieux.

Si[163] une certaine droite rencontre chacune de deux opposées, elle ne rencontrera aucune des opposées en deux points ; en effet, si elle rencontre <l'une des sections> en deux points, elle ne rencontrera pas l'autre section, en vertu de ce qui a été démontré antérieurement.

[160] Prop. 3.

[161] **V** ne représente que le cas de la sécante.

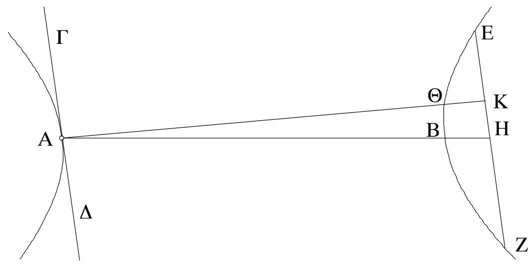
[162] Prop. 8.

[163] On a ici les éléments d'un corollaire. Le passage se présente dans **V** comme une explication postposée de l'assertion précédente.

– λδʹ – Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ μέσην τὴν παράλληλον ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς Α ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Α, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ.

Λέγω ὅτι ἡ ΑΗ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΑΘΚ. Ἡ ἄρα κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ· καὶ ἡ κατὰ τὸ Θ ἄρα ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γὰρ ΕΗ τῇ ΗΖ ἐστιν ἴση.

Οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΘ τῶν ἀντικειμένων. Ἡ ΑΒ ἄρα.

– λεʹ – Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἑτέρας τομῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ ΑΒ τεμνέτω ἐν τῇ Β τομῇ δίχα τὴν ΓΔ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Ε.

Λέγω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.

1 λδʹ edd. : om. V ‖ 3 διάμετρος Ψ : διάμετρον V ‖ 6 τὸ c v Ψ : iter. V (extr. et init. lin.) ‖ λεʹ edd. : om. V ‖ 18 Β Ψ : δίχα V.

– 34 – *Si une certaine droite est tangente à l'une de deux opposées, et qu'une parallèle à cette droite est menée dans l'autre section, la droite menée du point de contact jusqu'au milieu de la parallèle sera un diamètre des sections opposées.*

Soient des sections opposées Α et Β ; qu'une certaine droite ΓΔ soit tangente à l'une d'elles, la section Α, en un point Α ; que soit menée une parallèle ΕΖ à ΓΔ dans l'autre section ; qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Η, et que soit menée une droite de jonction ΑΗ.

Je dis que ΑΗ est un diamètre des opposées.

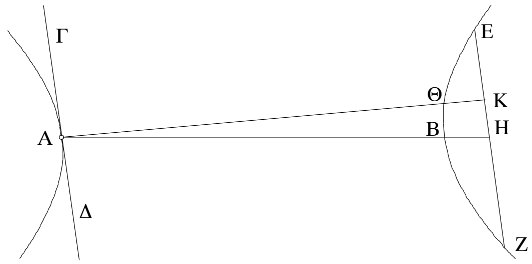


Fig. 34

Soit un diamètre ΑΘΚ, si c'est possible. La tangente en Θ est donc parallèle à ΓΔ[164] ; mais ΓΔ est aussi parallèle à ΕΖ ; la tangente en Θ est donc aussi parallèle à ΕΖ[165]. ΕΚ est donc égale à ΚΖ[166], ce qui est impossible, puisque ΕΗ est égale à ΗΖ.

ΑΘ n'est donc pas un diamètre des opposées. C'est donc ΑΒ.

– 35 – *Si, dans l'une de deux opposées, un diamètre coupe une certaine droite en deux parties égales, la tangente à l'autre section à l'extrémité du diamètre sera parallèle à la droite coupée en deux parties égales.*

Soient des sections opposées Α et Β, et que, dans la section Β, le diamètre ΑΒ de ces sections coupe la droite ΓΔ en deux parties égales en un point Ε.

Je dis que la tangente en Α à la section est parallèle à ΓΔ.

[164] Prop. 31.
[165] *Éléments*, I.30.
[166] I.47.

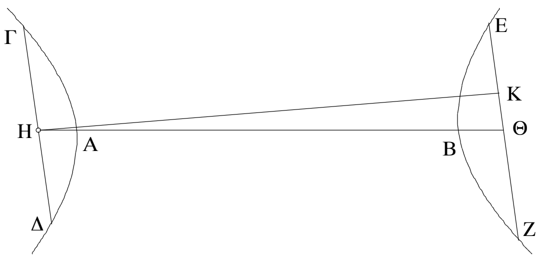
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΖ · ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση · παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἀδύνατον· ἐκβαλλομένη γὰρ αὐτῇ συμπίπτει.

Οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΓΔ.

– λς΄ – Ἐὰν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἀχθῶσι παράλληλοι οὖσαι, ἡ τὰς διχοτομίας αὐτῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐν ἑκατέρᾳ αὐτῶν ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Λέγω ὅτι ἡ ΗΘ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.



7 λς΄ edd. : om. V.

Fig. 35

Soit une parallèle ΔZ à la tangente en A à la section, si c'est possible ; ΔH est donc égale à HZ[167] ; or ΔE est aussi égale à EΓ ; ΓZ est donc parallèle à EH[168], ce qui est impossible, puisque son prolongement rencontre cette droite[169].

ΔZ n'est donc pas parallèle à la tangente en A à la section, ni non plus une autre droite que ΓΔ.

– 36 – *Si, dans chacune de deux opposées, est menée une droite*[170]*, et que ces droites sont parallèles, la droite joignant leur milieu sera un diamètre des opposées*.

Soient des sections opposées A et B ; que, dans l'une, soit menée une droite ΓΔ et, dans l'autre, une droite EZ, et que ces droites soient parallèles ; que chacune soit coupée en deux parties égales en des points H et Θ, et que soit menée une droite de jonction HΘ.

Je dis que HΘ est un diamètre des opposées.

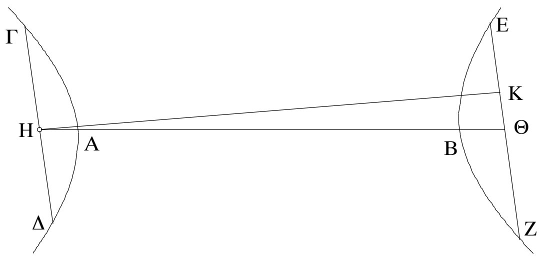


Fig. 36

[167] I.48.
[168] *Éléments*, VI.2.
[169] I.22.
[170] Nouvel exemple de pluriel distributif en grec ; il y en a encore deux autres dans cette proposition. Toutes ces occurrences sont traduites par des moyens appropriés à la stylistique du français.

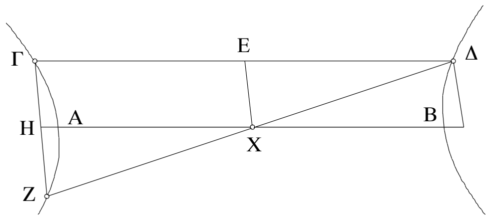
Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ ΗΚ. Ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, ὥστε καὶ τῇ ΕΖ. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΖ ἐστιν ἴση.

Οὐκ ἄρα ἡ ΗΚ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων. Ἡ ΗΘ ἄρα.

– λζʹ – Ἐὰν ἀντικειμένας εὐθεῖα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου <οὖσα>, ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ δίχα τεμνομένῃ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τὰς Α, Β τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΕ, καὶ διὰ τοῦ Χ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΒ.

Λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΕΧ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν τομῶν.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΧ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΧ τῇ ΧΖ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΖΓ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Η.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΧ τῇ ΧΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΧ τῇ ΖΗ, ὥστε καὶ ἡ ΓΗ ἴση τῇ ΖΗ. Ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΖ, ὥστε καὶ τῇ ΕΧ.

5 λζʹ edd. : om. V ‖ 6 οὖσα add. Federspiel[3].

Si elle ne l'est pas, qu'une droite ΗΚ le soit. La tangente en Α est donc parallèle à ΓΔ[171], et donc aussi à ΕΖ[172]. ΕΚ est donc égale à ΚΖ[173], ce qui est impossible, puisque ΕΘ est aussi égale à ΘΖ.

ΗΚ n'est donc pas un diamètre des opposées. C'est donc ΗΘ.

– 37 – *Si une droite ne passant pas par le centre coupe des opposées, la droite joignant son milieu et le centre est ce qu'on appelle un diamètre droit des opposées, et la parallèle menée du centre à la droite coupée en deux parties égales est un diamètre transverse conjugué au premier diamètre.*

Soient des sections opposées Α et Β ; qu'une certaine droite ΓΔ coupe les sections sans passer par le centre, et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Ε ; que le centre des sections soit le point Χ ; que soit menée une droite de jonction ΧΕ, et que, par Χ, soit menée une parallèle ΑΒ à ΓΔ.

Je dis que les droites ΑΒ et ΕΧ sont des diamètres conjugués des sections.

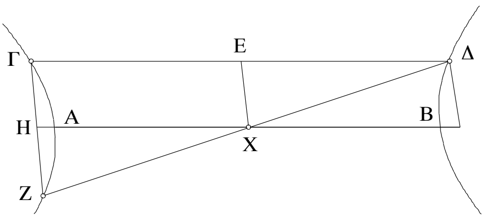


Fig. 37

Que soit menée une droite de jonction ΔΧ ; qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Ζ, et que soit menée une droite de jonction ΓΖ. ΔΧ est donc égale à ΧΖ[174] ; or ΔΕ est aussi égale à ΕΓ ; ΕΧ est donc parallèle à ΖΓ[175].

Que ΒΑ soit prolongée jusqu'en un point Η.

Puisque ΔΧ est égale à ΧΖ, ΕΧ est aussi égale à ΖΗ[176], de sorte que ΓΗ est aussi égale à ΖΗ[177]. La tangente en Α est donc parallèle à ΓΖ[178] et

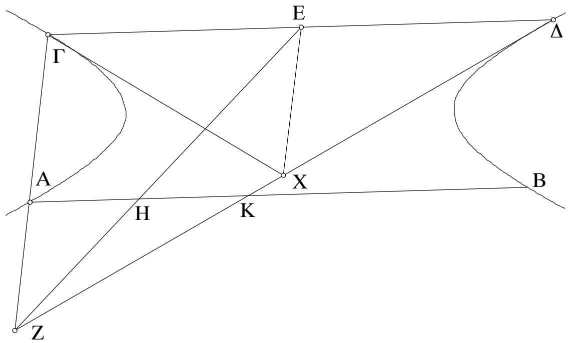
[171] Prop. 5.
[172] *Éléments*, I.30.
[173] I.48.
[174] I.30.
[175] *Éléments*, VI.2.
[176] *Éléments*, VI.4.
[177] *Éléments*, I.34.
[178] Prop. 5.

Αἱ ΕΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

– λη′ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσι συμπίπτουσαι, ἡ ἀπὸ τῆς συμπώσεως ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓΧ, ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ.

Λέγω ὅτι ἡ ΕΧ διάμετρός ἐστιν ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη.



Ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, διάμετρος ἡ ΕΖ, † καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΧ τῇ ΕΖ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ †, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ· συμβαλεῖ ἄρα ἡ ΓΖ τῇ τομῇ· συμβαλέτω κατὰ τὸ Α, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΒ.

2 λη′ edd. : om. V ‖ 12-14 καὶ — Ζ locus corruptus ‖ 14 alt. ΓΖ c Ψ V^{pc} : ΓΔ V^{ac} ut vid. v.

donc aussi à EX[179].

Les droites EX et AB sont donc des diamètres conjugués[180].

– 38 – *Si deux droites qui se rencontrent sont tangentes à des opposées*[181]*, la droite qui joint leur point de rencontre et le milieu de la droite joignant les points de contact sera ce qu'on appelle un diamètre droit des opposées, et la droite menée par le centre parallèlement à la droite joignant les points de contact sera un diamètre transverse conjugué au premier diamètre*

Soient des sections opposées A et B et des tangentes ΓX et XΔ aux sections ; que soit menée une droite de jonction ΓΔ ; qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point E, et que soit menée une droite de jonction EX.

Je dis que EX est ce qu'on appelle un diamètre droit et que la droite passant par le centre parallèlement à ΓΔ est un diamètre transverse conjugué au premier diamètre.

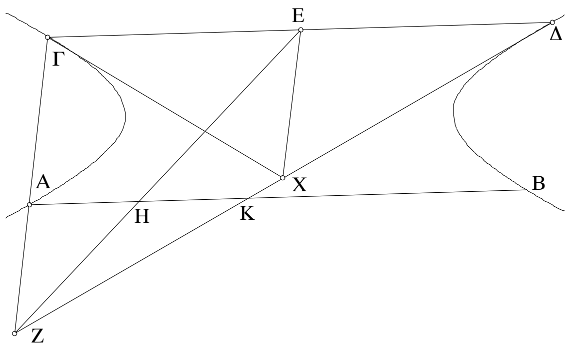


Fig. 38

Soit un diamètre EZ, si c'est possible, † et que soit pris un point quelconque Z ; ΔX rencontrera donc EZ ; qu'elle la rencontre en un point Z †, et que soit menée une droite de jonction ΓZ ; ΓZ rencontrera donc la section[182] ; qu'elle la rencontre en un point A, et que, par A, soit menée

[179] *Éléments*, I.30.

[180] I.16.

[181] Les propositions 38 et 39 offrent les deux seules occurrences dans le traité d'une telle rédaction ; l'énoncé de la proposition 40 donne le texte attendu.

[182] I.32.

Ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ, καὶ τὴν ΓΔ δίχα τέμνει, καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ δίχα τέμνει. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ.

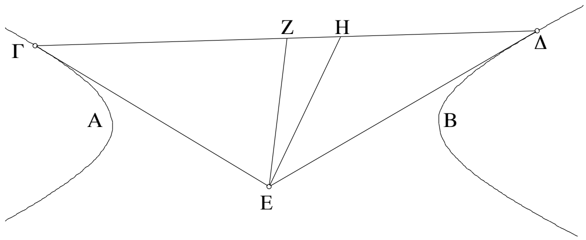
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, καὶ ἔστιν ἐν τριγώνῳ τῷ ΓΖΔ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΚ, ὥστε καὶ ἡ ΗΚ τῇ ΗΒ ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ διάμετρος ἔσται.

– λθʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται συμπίπτουσαι, ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη δίχα τέμνει τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διάμετρος ἤχθω ἡ ΕΖ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ.



Εἰ γὰρ μή, τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ· ἡ ΗΕ ἄρα διάμετρός ἐστιν· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΖ· κέντρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε. Ἡ ἄρα σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῶν τομῶν, ὅπερ ἄτοπον.

3 ΓΖΔ Ψ : ΖΔ V ‖ 7 λθʹ edd. : om. V ‖ 15 ἡ ΗΕ Ψ : om. V.

une parallèle ΑΒ à ΓΔ.

Dès lors, puisque ΕΖ est un diamètre et qu'elle coupe ΓΔ en deux parties égales, elle coupe aussi les parallèles à ΓΔ en deux parties égales[183]. ΑΗ est donc égale à ΗΒ.

Puisque ΓΕ est égale à ΕΔ et qu'elle est dans un triangle ΓΖΔ, alors ΑΗ est aussi égale à ΗΚ[184], de sorte que ΗΚ est aussi égale à ΗΒ, ce qui est impossible.

ΕΖ ne sera donc pas un diamètre[185].

– 39 – *Si deux droites qui se rencontrent sont tangentes à des opposées*[186]*, la droite menée par le centre et le point de rencontre des tangentes*[187] *coupe en deux parties égales la droite joignant les points de contact.*

Soient des sections opposées Α et Β ; que soient menées deux tangentes ΓΕ et ΕΔ aux sections Α et Β ; que soient menés une droite de jonction ΓΔ et un diamètre ΕΖ.

Je dis que ΓΖ est égale à ΖΔ.

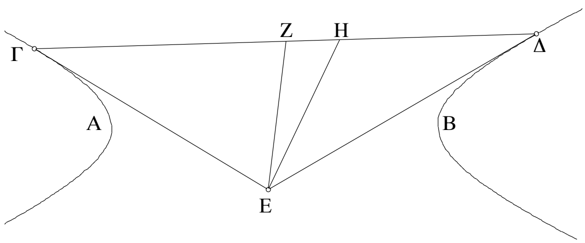


Fig. 39

Si elle ne l'est pas, que soit coupée ΓΔ en deux parties égales en un point Η, et que soit menée une droite de jonction ΗΕ ; ΗΕ est donc un

[183] I. *Premières définitions* 4.

[184] *Éléments*, VI.4.

[185] On observe une nouvelle anomalie : la deuxième partie de l'énoncé, reprise dans le *diorisme* ne fait pas l'objet d'un traitement.

[186] Impossible, dans cette proposition et dans la suivante, de rendre la distributivité autrement qu'en calquant le grec.

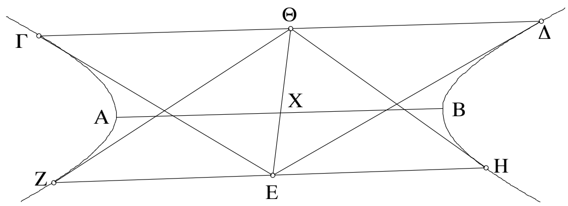
[187] Il est sans exemple qu'un diamètre soit exprimé par une telle périphrase. L'énoncé correspondant de la proposition 30 offre le bon texte.

<Οὐκ ἄρα ἄνισός> ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ· ἴση ἄρα.

– μʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ταῖς τομαῖς, αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΗ.

Λέγω ὅτι αἱ ΖΘ, ΘΗ ἐφάπτονται τῶν τομῶν.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Χ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΧΒ· αἱ ΘΕ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· καὶ τεταγμένως ἧκται ἡ ΓΘ ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓΕ συμπίπτουσα τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΧΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους.

1 οὐκ ἄρα ἄνισός add. Heiberg ‖ 2 μʹ edd. : om. V ‖ 6 ἐφάπτονται c Ψ : ἐφάπτωνται V ‖ 11 ἐφάπτονται c^1 (ο supra ω) Ψ : ἐφάπτωνται V (ο infra ω ut vid.) c ‖ 14 ΑΧΒ Ψ : ΧΑΒ V ‖ 18-19 τουτέστι — εἴδους fort. delendum.

diamètre[188] ; or ΕΖ est aussi un diamètre ; Ε est donc le centre. La rencontre des tangentes se fait donc au centre des sections, ce qui est absurde[189].

ΓΖ n'est donc pas inégale à ΖΔ ; elle lui est donc égale.

– 40 – *Si deux droites tangentes à des opposées se rencontrent, et que, par le point de rencontre, est menée, parallèlement à la droite joignant les points de contact, une droite rencontrant les sections, les droites menées des points de rencontre jusqu'au milieu de la droite joignant les points de contact sont tangentes aux sections.*

Soient des sections opposées Α et Β ; que soient menées deux tangentes ΓΕ et ΕΔ aux sections Α et Β ; que soit menée une droite de jonction ΓΔ ; que, par Ε, soit menée une parallèle ΖΕΗ à ΓΔ ; que ΓΔ soit coupée en deux parties égales en un point Θ, et que soient menées des droites de jonction ΖΘ et ΘΗ.

Je dis que ΖΘ et ΘΗ sont tangentes aux sections.

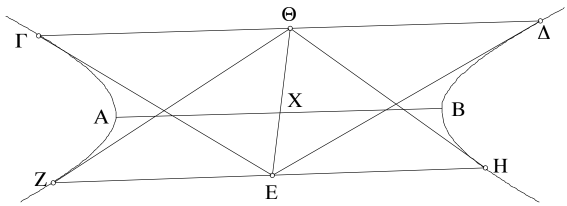


Fig. 40

Que soit menée une droite de jonction ΕΘ ; ΕΘ est donc un diamètre droit, et la parallèle menée par le centre à ΓΔ est son diamètre transverse conjugué[190]. Que soit pris le centre Χ et que soit menée une parallèle ΑΧΒ à ΓΔ ; ΘΕ et ΑΒ sont donc des diamètres conjugués ; d'autre part, ΓΘ est une droite menée sur le second diamètre de manière ordonnée, et ΓΕ est une tangente à la section, qui rencontre le second diamètre ; le rectangle

[188] Prop. 38.
[189] Prop. 32.
[190] Prop. 38.

Καὶ ἐπεὶ τεταγμένως μὲν ἦκται ἡ ΖΕ, ἐπέζευκται δὲ ἡ ΖΘ, διὰ τοῦτο ἐφάπτεται ἡ ΖΘ τῆς Α τομῆς.

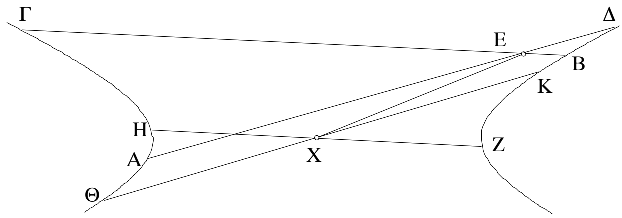
Ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΗΘ ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς.

Αἱ ΖΘ, ΘΗ ἄρα ἐφάπτονται τῶν Α, Β τομῶν.

– μα′ – Ἐὰν ἐν ταῖς ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου <οὖσαι>, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐν ταῖς Α, Β δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΓΒ, ΑΔ κατὰ τὸ Ε μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι.

Λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ. Ἤχθω διὰ τοῦ Χ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΧΖ· ἡ ΧΖ ἄρα διάμετρός ἐστι καὶ συζυγὴς τῇ ΕΧ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΧ.

Κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΘΚ τῇ ΑΔ ἡ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΧ, ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένῃ, ὅπερ ἄτοπον· ἐδείχθη γὰρ καὶ συμπίπτουσα.

1 ἐπεὶ Ψ : ἐπὶ V ‖ 5 μα′ edd. : om. V ‖ 6 οὖσαι add. Federspiel[3] ‖ 8 ἀλλήλας Ψ : ἀλλήλαις V.

EX,XΘ est donc égal au carré sur la moitié du second diamètre[191], c'est-à-dire au quart de la figure appliquée à AB[192].

Puisque ZE est une droite menée de manière ordonnée, et qu'est menée une droite de jonction ZΘ, alors ZΘ est tangente à la section A[193].

Pareillement, HΘ est aussi tangente à la section B.

ZΘ et ΘH sont donc tangentes aux sections A et B.

– 41 – *Si, dans des opposées, deux droites ne passant pas par le centre se coupent l'une l'autre, elles ne se coupent pas en deux parties égales.*

Soient des sections opposées A et B, et que, dans ces sections, deux droites ΓB et AΔ *ne passant pas par le centre* se coupent l'une l'autre en un point E.

Je dis qu'elles ne se coupent pas l'une l'autre en deux parties égales.

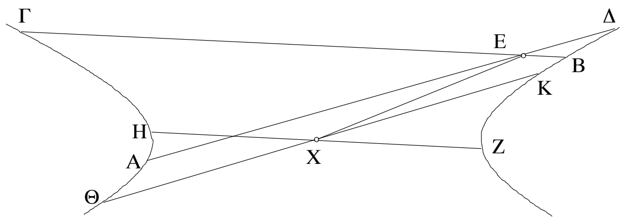


Fig. 41[194]

Qu'elles le fassent, si c'est possible ; que le centre des sections soit le point X, et que soit menée une droite de jonction EX ; EX est donc un diamètre[195]. Que soit menée par X une parallèle XZ à BΓ ; XZ est donc un diamètre et un diamètre conjugué à EX[196] ; la tangente en Z est donc parallèle à EX[197].

Pour les mêmes raisons, une droite ΘK étant menée parallèlement à AΔ, la tangente en Θ est parallèle à EX, de sorte que la tangente en Z est aussi parallèle à la tangente en Θ[198], ce qui est absurde, puisqu'on a

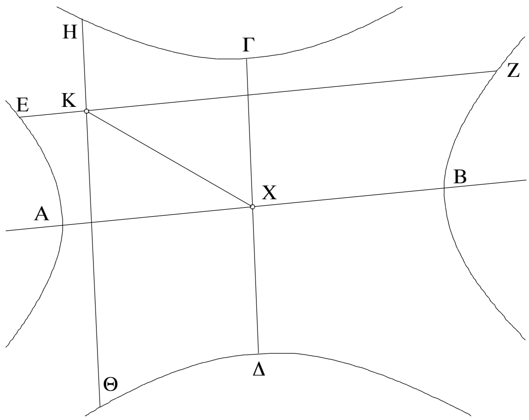
[191] I.38.
[192] I. *Secondes définitions* 3.
[193] I.38.
[194] La lettre Z est omise dans **V**, et le point H est sur la section B.
[195] Prop. 37.
[196] Prop. 37.
[197] I. *Premières définitions* 6.
[198] *Éléments*, I.30.

Οὐκ ἄρα αἱ ΓΒ, ΑΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τέμνουσι ἀλλήλας δίχα.

– μβʹ – Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἐν ταῖς Α, Β, Γ, Δ τομαῖς δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΕΖ, ΗΘ κατὰ τὸ Κ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι.

Λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ τῇ μὲν ΕΖ ἤχθω παράλληλος ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΘΗ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΧ· αἱ ΚΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. Ὁμοίως καὶ αἱ ΧΚ, ΓΔ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι, ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῇ κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένῃ παράλληλός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γάρ, ἐπειδὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη

3 μβʹ edd. : om. V ‖ 7 ἀλλήλας Ψ : ἀλλήλαις V ‖ 8 τὸ Ψ : τοῦ V.

démontré aussi qu'elle la rencontrait[199].

Les droites ΓB et AΔ ne passant pas par le centre ne se coupent donc pas l'une l'autre en deux parties égales.

– 42 – *Si, dans des opposées conjuguées, deux droites ne passant pas par le centre se coupent l'une l'autre, elles ne se coupent pas en deux parties égales.*

Soient des sections opposées conjuguées A, B, Γ et Δ, et que, dans ces sections, deux droites EZ et HΘ *ne passant pas par le centre* se coupent en un point K.

Je dis qu'elles ne se coupent pas l'une l'autre en deux parties égales.

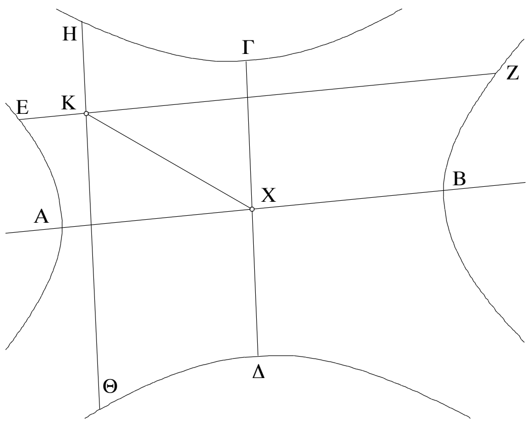


Fig. 42

Qu'elles le fassent, si c'est possible ; que le centre des sections soit le point X ; que soient menées une parallèle AB à EZ et une parallèle ΓΔ à ΘH, et que soit menée une droite de jonction KX ; les droites KX et AB sont donc des diamètres conjugués[200]. Pareillement, les droites XK et ΓΔ sont aussi des diamètres conjugués, de sorte que la tangente en A aussi est

[199] Prop. 31.
[200] Prop. 37.

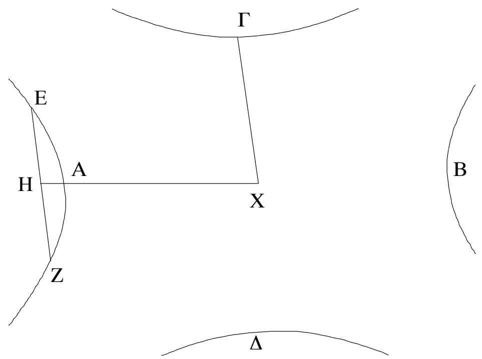
τέμνει τὰς Α, Β τομάς, ἡ δὲ κατὰ τὸ Α τὰς Δ, Γ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΑΧΓ γωνίαν τόπῳ ἐστίν.

Οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

– μγʹ – Ἐὰν μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἡ μὲν ἐπὶ μέσην τὴν τέμνουσαν ἀχθῇ, ἡ δὲ παρὰ τὴν τέμνουσαν, συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τεμνέτω τὴν Α εὐθεῖά τις κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΕ τῷ Η, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΗ, παράλληλος δὲ ἤχθω τῇ ΕΖ ἡ ΓΧ.

Λέγω ὅτι αἱ ΑΧ, ΧΓ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.



Ἐπεὶ γὰρ διάμετρος ἡ ΑΧ καὶ τὴν ΕΖ δίχα τέμνει, ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ, ὥστε καὶ τῇ ΓΧ.

4 δίχα Ψ : om. V || 5 μγʹ edd. : om. V || 11 ἔστω Ψ : τὸ V.

parallèle à la tangente en Γ[201], ce qui est impossible ; en effet, elle la rencontre, puisque la tangente en Γ coupe les sections A et B, et que la tangente en A coupe les sections Δ et Γ[202]. D'autre part, il est évident que leur point de rencontre est dans le lieu sous l'angle AXΓ[203].

Les droites EZ et HΘ ne passant pas par le centre ne se coupent donc pas l'une l'autre en deux parties égales.

– 43 – *Si une droite coupe l'une de deux opposées conjuguées en deux points, et que, par le centre, sont menées deux droites, l'une jusqu'au milieu de la sécante et l'autre parallèlement à la sécante, ces droites seront des diamètres conjugués des opposées.*

Soient des sections opposées conjuguées A, B, Γ et Δ ; qu'une certaine droite coupe la section A en deux points E et Z ; que la droite ZE soit coupée en deux parties égales par un point H[204] ; soit un centre X, et que soient menées une droite de jonction XH et une parallèle ΓX à EZ.

Je dis que les droites AX et XΓ sont des diamètres conjugués.

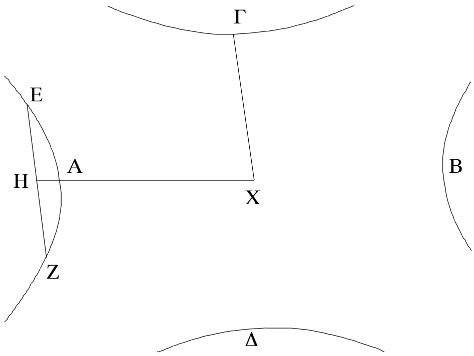


Fig. 43

Puisque AX est un diamètre et coupe EZ en deux parties égales, la tangente en A est parallèle à EZ[205] et donc aussi à ΓX[206].

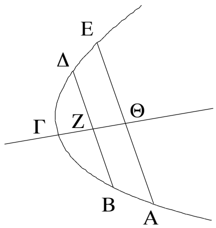
[201] I. *Premières définitions* 6 et *Éléments*, I.30.
[202] Prop. 19.
[203] Prop. 21.
[204] Voir Note complémentaire [30].
[205] Prop. 5.
[206] *Éléments*, I.30.

Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς Α ἦκται ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ Χ ἡ μὲν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύγνυται ἡ ΧΑ, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἦκται ἡ ΓΧ, αἱ ΧΑ, ΓΧ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

– μδʹ – Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ ἐφ᾽ ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ <, Ε> σημεῖα.

Δεῖ δὴ αὐτῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.



Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΘ. Ἀχθεισῶν δὴ τεταγμένως τῶν ΔΖ, ΕΘ καὶ ἐκβληθεισῶν ἔσται ἴση ἡ μὲν ΔΖ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΘΑ. Ἐὰν οὖν τάξωμεν τὰς ΒΔ, ΕΑ θέσει οὔσας παραλλήλους, ἔσται δοθέντα τὰ Θ, Ζ σημεῖα, ὥστε θέσει ἔσται ἡ ΘΖΓ.

[– μεʹ –] Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ ἐφ᾽ ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ζ, Θ. Καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

Τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀπείρους εὑρήσομεν διαμέτρους.

4 ΧΑ edd. : ΓΑ V ‖ 5 μδʹ edd. : om. V ‖ 6 Ε add. Heiberg (jam Comm.) ‖ 12 μεʹ V (sed litt. om.).

Dès lors, puisque l'on a des sections opposées, qu'à l'une d'elles, la section Α, est menée une tangente en un point Α, que, du centre Χ au point de contact est menée une droite de jonction ΧΑ, et qu'est menée une parallèle ΓΧ à la tangente, les droites ΧΑ et ΓΧ sont des diamètres conjugués[207], ce qui a été démontré plus haut[208].

– 44 – *Trouver un diamètre d'une section de cône donnée*[209].

Soit une section de cône donnée, marquée des points Α, Β, Γ, Δ <, Ε>. Il faut trouver un diamètre de la section.

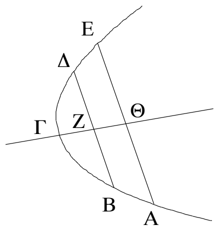


Fig. 44

Soit le problème résolu, et soit un diamètre ΓΘ. Des droites ΔΖ et ΕΘ ayant été menées de manière ordonnée et prolongées, ΔΖ sera égale à ΖΒ et ΕΘ sera égale à ΘΑ[210]. Si donc nous plaçons de manière ordonnée en position les droites ΒΔ et ΕΑ, qui sont parallèles, les points Θ et Ζ seront donnés, de sorte que ΘΖΓ sera donnée en position[211].

– [45 V] – La construction sera la suivante[212].

Soit une section de cône donnée, marquée des points Α, Β, Γ, Δ et Ε ; que soient menées des parallèles ΒΔ et ΑΕ et qu'elles soient coupées en deux parties égales en des points Ζ et Θ. La droite de jonction ΖΘ sera un diamètre de la section[213].

On trouvera aussi de la même façon une infinité de diamètres.

[207] Prop. 20.

[208] La formule finale τοῦτο γὰρ προδέδεικται est un *hapax* dans les *Coniques*.

[209] Voir Note complémentaire [31].

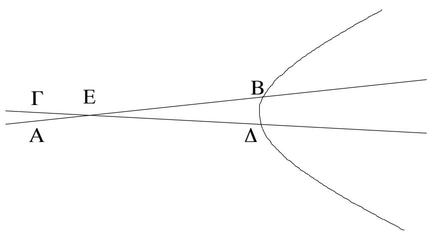
[210] I. *Premières définitions* 4.

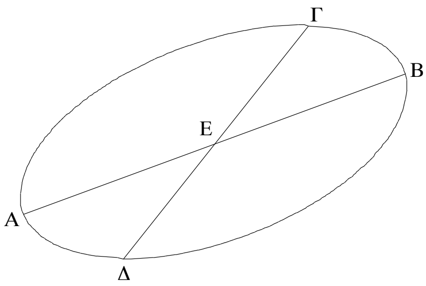
[211] Sur la rédaction de la proposition, voir Note complémentaire [32].

[212] La *synthèse* fait l'objet d'une nouvelle division dans **V** ; voir Note complémentaire [33].

[213] I. *Premières définitions* 4.

– μεʹ – Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον εὑρεῖν.



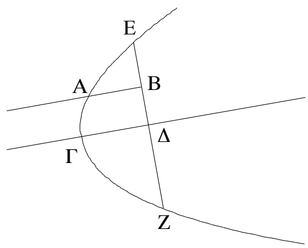


Τοῦτο δὲ φανερόν· ἐὰν γὰρ διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ, καθ' ὃ τένμνουσιν ἀλλήλας ἔσται τῆς τομῆς τὸ κέντρον, ὡς ὑπόκειται.

– μςʹ – Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολὴ ἐφ' ἧς τὰ Ζ, Γ, Ε.

Δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.



Ἤχθω γὰρ αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστί, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν.

1 μεʹ edd. : μςʹ V (sed litt. om.) || 5 μςʹ edd. : μζʹ V (sed litt. om.).

– 45 [46 V] – *Trouver le centre d'une ellipse ou d'une hyperbole données.*

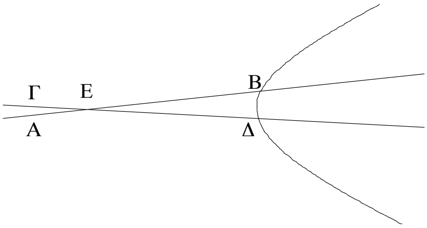


Fig. 45.1

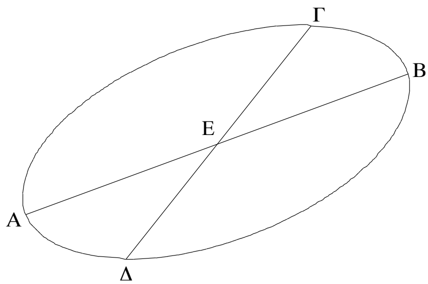


Fig. 45.2

C'est une chose évidente : si sont menés deux diamètres AB et ΓΔ de la section[214], leur intersection sera le centre de la section, comme on le voit sur les figures[215].

– 46 [47 V] – *Trouver l'axe d'une section de cône donnée.*

Que la section de cône donnée soit d'abord une parabole, marquée des points Z, Γ et E.

Il faut trouver son axe.

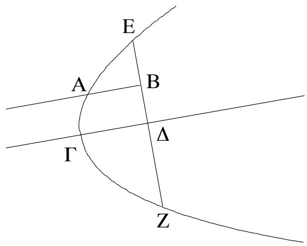


Fig. 46

Que soit mené un diamètre AB de la section[216].

Si d'abord AB est l'axe, le problème proposé sera résolu.

[214] Prop. 44.

[215] L'expression ὡς ὑποκεῖται, utilisée pour renvoyer aux figures, est absente des œuvres d'Euclide et d'Archimède. On la retrouve en III.25 et 26, avec le même sens donné au verbe (« être placé sous les yeux »).

[216] Prop. 44.

Εἰ δὲ οὔ, γεγονέτω, καὶ ἔστω ἄξων ὁ ΓΔ. Ὁ ΓΔ ἄρα ἄξων παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ καὶ τὰς ἀγομένας ἐπ' αὐτὸν καθέτους δίχα τέμνει· αἱ δὲ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετοί εἰσιν, ὥστε ἡ ΓΔ τὰς ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτους δίχα τέμνει.

Ἐὰν οὖν τάξω τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἔσται θέσει, καὶ διὰ τὰ εἰρημένα ἴση ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. Διὰ δεδομένου ἄρα τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

[– μη' –] Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα παραβολὴ ἐφ' ἧς τὰ Ζ, Ε, Α, καὶ ἤχθω αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΒΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΖ, φανερὸν ὅτι ἡ ΑΒ ἄξων ἐστίν.

Εἰ δὲ οὔ, τετμήσθω ἡ ΕΖ δίχα τῷ Δ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΓΔ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς· παράλληλος γὰρ οὖσα τῇ διαμέτρῳ, τουτέστι διάμετρος οὖσα, τὴν ΕΖ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

Τῆς ἄρα δοθείσης παραβολῆς ὁ ἄξων ηὕρηται ὁ ΓΔ.

Καὶ φανερὸν ὅτι εἷς ἄξων ἐστὶ τῆς παραβολῆς. Εἰ γὰρ ἄλλος ἔσται ὡς ὁ ΑΒ, ἔσται τῇ ΓΔ παράλληλος· καὶ τὴν ΕΖ τέμνει, ὥστε καὶ δίχα. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΖ, ὅπερ ἄτοπον.

– μζ' – Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ.

2 αὐτὸν Federspiel[3] : αὐτὴν V ‖ 6 τὰ εἰρημένα ego (*et ob causam quam indicavimus* Heiberg) : τοῦτο V ‖ 9 μη' V (sed litt. om.) ‖ 12 ἐπὶ Ψ : om. V ‖ 18 ηὕρηται] ηὕρηται V ‖ 22 μζ' edd. : μθ' V (sed litt. om.) ‖ 23 ἐλλειψις V[1] : ἔλειψις V.

S'il ne l'est pas, soit le problème résolu, et soit l'axe ΓΔ. L'axe ΓΔ est donc parallèle à AB[217], et il coupe en deux parties égales les perpendiculaires menées à lui-même[218] ; or les perpendiculaires menées à ΓΔ sont aussi perpendiculaires à AB, de sorte que ΓΔ coupe en deux parties égales les perpendiculaires à AB.

Si donc je place de manière ordonnée la perpendiculaire EZ à la droite AB, elle sera donnée en position[219], et, en vertu de ce qu'on vient de dire, EΔ est égale à ΔZ ; le point Δ est donc donné. Par un point donné Δ est donc menée une parallèle ΓΔ à une droite AB donnée en position ; ΓΔ est donc donnée en position[220].

– [48 V] – La construction sera la suivante.

Soit une parabole donnée, marquée des points Z, E et A ; que soit mené un diamètre AB de la parabole[221] ; que soit menée une perpendiculaire BE au diamètre et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Z.

Si d'abord EB est égale à BZ, il est évident que AB est l'axe.

Sinon, que EZ soit coupée en deux parties égales par un point Δ, et que soit menée une parallèle ΓΔ à AB ; il est évident que ΓΔ est l'axe de la section[222], car, étant parallèle au diamètre, c'est-à-dire étant elle-même un diamètre[223], elle coupe EZ en deux parties égales et à angles droits.

L'axe ΓΔ de la parabole donnée est donc trouvé.

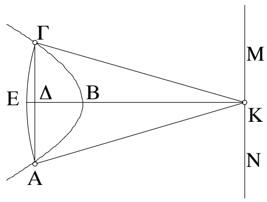
D'autre part, il est évident qu'il n'y a qu'un seul axe de la parabole. En effet, s'il y avait un autre axe AB, il serait parallèle à ΓΔ[224] ; d'autre part, il coupe EZ ; il le coupe donc aussi en deux parties égales[225]. BE est donc égale à BZ, ce qui est absurde.

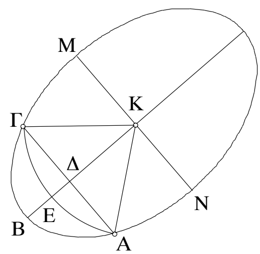
– 47 [49 V] – *Trouver l'axe d'une hyperbole ou d'une ellipse données.*

Soit une hyperbole ou une ellipse ABΓ.

[217] I.51, épilogue.
[218] I. *Premières définitions* 7.
[219] *Données*, 30.
[220] *Données*, 28.
[221] Prop. 44.
[222] I. *Premières définitions* 7.
[223] I. 51, épilogue.
[224] I. 51, épilogue.
[225] I. *Premières définitions* 4.

Δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.





Εὑρήσθω καὶ ἔστω ὁ ΚΔ, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ Κ· ἡ ἄρα ΚΔ τὰς ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καταγομένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΓΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΑ. Ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓΚ, ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α καὶ ἔσται θέσει δεδομένος· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ τομὴ δοθεῖσα θέσει· δοθὲν ἄρα τὸ Α · ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ · καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ· ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· δοθεῖσα ἄρα τῇ θέσει ἡ ΔΚ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆς κέντρον τὸ Κ· εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΑ, καὶ διήχθω ἡ ΚΔ ἐπὶ τὸ Β.

2 ΚΔ Ψ : ΑΔ V || 5 ΚΑ Ψ : ΚΔ V || 11 δοθεῖσα Ψ : δοθὲν V || 12 δὴ Ψ : δὲ V || 17 ΚΓ, ΚΑ Halley : ΚΓ καὶ ΚΑ V ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ Ψ.

Il faut trouver son axe.

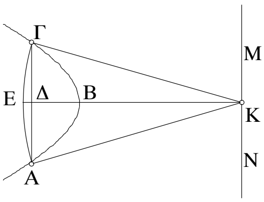


Fig. 47.1[226]

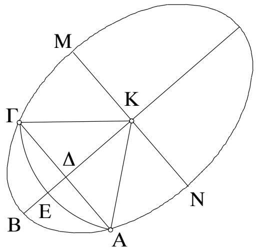


Fig. 47.2

Qu'il soit trouvé ; soient un axe ΚΔ et un centre Κ de la section. ΚΔ coupe donc en deux parties égales et à angles droits les droites abaissées sur elle de manière ordonnée[227].

Que soit menée une perpendiculaire ΓΔΑ, et que soient menées des droites de jonction ΚΑ et ΚΓ.

Dès lors, puisque ΓΔ est égale à ΔΑ, alors la droite ΓΚ est égale à la droite ΚΑ[228]. Si donc nous plaçons le point Γ dans une position donnée[229], la droite ΓΚ sera donnée[230], de sorte qu'un cercle décrit de centre Κ et d'intervalle[231] ΚΓ, passera aussi par Α et sera donné en position[232] ; or la section ΑΒΓ est aussi donnée en position ; Α est donc donné[233] ; or Γ est aussi donné ; la droite ΓΑ est donc donnée en position[234] ; d'autre part, ΓΔ est égale à ΔΑ ; Δ est donc donné[235] ; mais Κ est aussi donné ; la droite ΔΚ est donc donnée en position[236].

La construction sera la suivante.

Soit une hyperbole ou une ellipse ΑΒΓ données, et que soit pris son centre Κ[237] ; que soit pris sur la section un point quelconque Γ, et que soit

[226] Voir Note complémentaire [34].

[227] I. *Premières définitions* 7.

[228] *Éléments*, I.4.

[229] La position n'est que sous-entendue en grec ; elle est introduite ici explicitement pour des raisons de correction langagière.

[230] *Données*, 26.

[231] Traduction littérale.

[232] *Données*, *définition* 6.

[233] *Données*, 25.

[234] *Données*, 26.

[235] *Données*, 7 et 27.

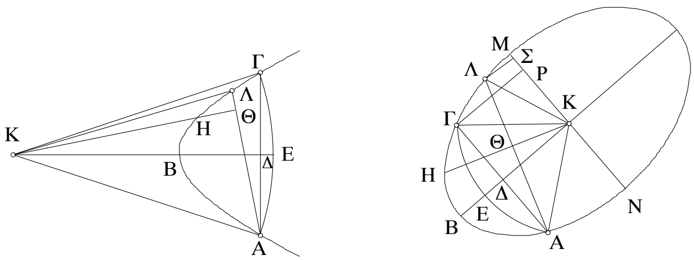
[236] *Données*, 26.

[237] Prop. 45.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΚ, δύο ἄρα αἱ ΓΔΚ δύο ταῖς ΑΔΚ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΚΑ τῇ ΚΓ ἴση· ἡ ἄρα ΚΒΔ τὴν ΑΔΓ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. Ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΜΚΝ· ἡ ἄρα ΜΝ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς συζυγὴς τῇ ΒΚ.

– μη′ – Δεδειγμένων δὴ τούτων ἑξῆς ἔστω δεῖξαι ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν οὐκ εἰσίν.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω καὶ ἕτερος ἄξων ὁ ΚΗ. Κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν ἀχθείσης καθέτου τῆς ΑΘ<Λ>, ἴση ἔσται ἡ ΑΘ τῇ ΘΛ, ὥστε καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΚΛ· ἀλλὰ καὶ τῇ ΚΓ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΚΓ, ὅπερ ἄτοπον.

Ὅτι μὲν οὖν καὶ ὁ ΑΕΓ κύκλος κατ’ ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ οὐ συμβάλλει τῇ τομῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς φανερόν.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΓΡ, ΛΣ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΚΛ· ἐκ κέντρου γάρ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΓΚ τῷ ἀπὸ ΚΛ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΓΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ, τῷ δὲ ἀπὸ ΛΚ ἴσα τὰ ἀπὸ ΚΣ, ΣΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ τοῖς ἀπὸ

2 ΚΒΔ V : ΚΔΒ Heiberg (*Prolegomena*) ‖ 6 μη′ edd. : ν′ V (sed litt. om.) ‖ 8 τὰ c v Ψ : iter. V ‖ 9 Λ addidi sec. Ar. ‖ 15 καὶ V^1 : om. V ‖ 16 alt. τῷ V^1 : τὸ V.

décrit un cercle ΓΕΑ de centre Κ et d'intervalle ΚΓ ; que soit menée une droite de jonction ΓΑ et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Δ ; que soient menées des droites de jonction ΚΓ et ΚΑ[238], et que soit menée une droite ΚΔ jusqu'en un point Β[239].

Dès lors, puisque ΑΔ est égale à ΔΓ et que ΔΚ est commune, les deux droites ΓΔ et ΔΚ sont égales aux deux droites ΑΔ et ΔΚ ; d'autre part, la base ΚΑ est égale à la base ΚΓ ; la droite ΚΒΔ[240] coupe donc la droite ΑΔΓ en deux parties égales et à angles droits[241]. ΚΔ est donc l'axe.

Que soit menée par Κ une parallèle ΜΚΝ à ΓΑ ; ΜΝ est donc l'axe de la section conjugué à l'axe ΒΚ.

– 48 [50 V] – Ces démonstrations faites, il faut démontrer ensuite que ces mêmes sections n'ont pas d'autres axes.

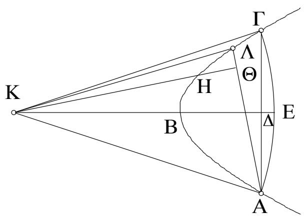


Fig. 48.1

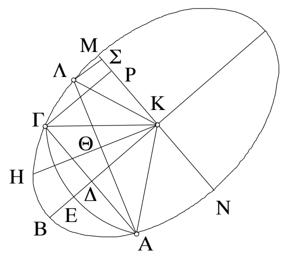


Fig. 48.2

Soit aussi un autre axe ΚΗ, si c'est possible. En vertu du raisonnement précédent, si une perpendiculaire ΑΘ est menée, ΑΘ<Λ> sera égale à ΘΛ[242], de sorte que ΑΚ sera aussi égale à ΚΛ[243] ; mais ΑΚ est aussi égale à ΚΓ ; ΚΛ est donc égale à ΚΓ, ce qui est absurde.

D'abord, dans le cas de l'hyperbole, il est évident que le cercle ΑΕΓ ne rencontre pas la section en un autre point situé entre les points Α, Β et Γ.

Dans le cas de l'ellipse, que soient menées des perpendiculaires ΓΡ et ΛΣ.

[238] Voir Note complémentaire [35].
[239] La construction ne convient qu'à l'ellipse.
[240] Le sens du tracé ne convient qu'à l'hyperbole.
[241] *Éléments*, I.8. Voir Note complémentaire [36].
[242] I. *Premières définitions* 7.
[243] *Éléments*, I.4.

ΛΣ, ΣΚ ἐστιν ἴσα. Ὧι ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ, τούτῳ διάφερει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ.

Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΜ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΚΜ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ. Ὧι ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ.

Ἐδείχθη δὲ ὅτι ᾧ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ· ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. Καὶ ἐπεὶ κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΡ, ΛΣ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣΝ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ αὐτὴ ὑπεροχή· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΓΡ τῷ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΛΣ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ.

Κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΓΜ γραμμή, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἔλλειψις.

– μθʹ – Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ' ἓν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή ἧς ἄξων ὁ ΒΔ.

Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου ὃ μή ἐστιν ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ὡς πρόκειται.

17 μθʹ edd. : ναʹ V (sed litt. om.).

Dès lors, puisque ΚΓ est égale à ΚΛ – elles sont menées du centre –, le carré sur ΓΚ est aussi égal à celui sur ΚΛ ; mais la somme des carrés sur ΓΡ et sur ΡΚ est égale au carré sur ΓΚ, et la somme des carrés sur ΚΣ et sur ΣΛ est égale au carré sur ΛΚ[244] ; la somme des carrés sur ΓΡ et sur ΡΚ est donc égale à la somme des carrés sur ΛΣ et sur ΣΚ. Le carré sur ΣΚ diffère donc de celui sur ΚΡ de l'aire dont diffère le carré sur ΓΡ de celui sur ΛΣ[245].

De même, puisque la somme du rectangle ΜΡ,ΡΝ et du carré sur ΡΚ est égale au carré sur ΚΜ, et que la somme du rectangle ΜΣ,ΣΝ et du carré sur ΣΚ est égale au carré sur ΚΜ[246], alors la somme du rectangle ΜΡ,ΡΝ et du carré sur ΡΚ est égale à la somme du rectangle ΜΣ,ΣΝ et du carré sur ΣΚ. Le rectangle ΜΡ,ΡΝ diffère donc du rectangle ΜΣ,ΣΝ de l'aire dont diffère le carré sur ΣΚ de celui sur ΚΡ.

Or on a démontré que le carré sur ΓΡ différait de celui sur ΛΣ de l'aire dont diffère le carré sur ΣΚ de celui sur ΚΡ ; le rectangle ΜΡ,ΡΝ diffère donc du rectangle ΜΣ,ΣΝ de l'aire dont diffère le carré sur ΓΡ de celui sur ΣΛ. D'autre part, puisque ΓΡ et ΛΣ sont des droites abaissées, le carré sur ΛΣ est au rectangle ΜΣ,ΣΝ comme le carré sur ΓΡ est au rectangle ΜΡ,ΡΝ[247] ; or on a démontré aussi que, dans les deux cas, la différence était la même ; le carré sur ΓΡ est donc égal au rectangle ΜΡ,ΡΝ, et le carré sur ΛΣ est égal au rectangle ΜΣ,ΣΝ.

La ligne ΛΓΜ est donc un cercle[248], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, c'est une ellipse.

– 49 [51V] – *Étant donnés une section de cône et un point non situé à l'intérieur de la section, mener du point une droite tangente à la section en un seul point.*

Que la section de cône donnée soit d'abord une parabole, d'axe ΒΔ.

Il faut, d'un point donné non situé à l'intérieur de la section, mener une droite de la manière qui est proposée[249].

[244] *Éléments*, I.47.

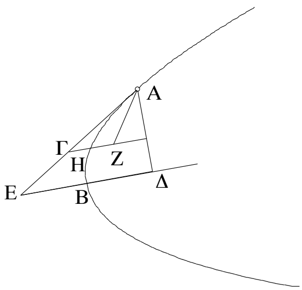
[245] Ce point est l'objet d'un lemme dans le commentaire d'Eutocius.

[246] *Éléments*, II.5.

[247] I.21.

[248] La même conclusion avait été directement déduite en I.5 (*cf.* Tome 1.2, p. 24, 12).

[249] La rédaction est abrégée. La formule est un *hapax*.



Τὸ δὴ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐστιν ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐν τῷ λοιπῷ ἐκτὸς τόπῳ.

Ἔστω οὖν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ Α.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ θέσει· καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ, καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ· καὶ ἔστι τὸ Β δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε· ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Ἔστω πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Ε.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ· καὶ δοθεῖσα ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΔ· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Β· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Δ· καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἡ ΔΑ. Δοθὲν ἄρα τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Ε· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΔ ὀρθὴ ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΑΕ.

5 alt. ΒΔ V^{pc} Ψ : ΓΔ V^{ac}.

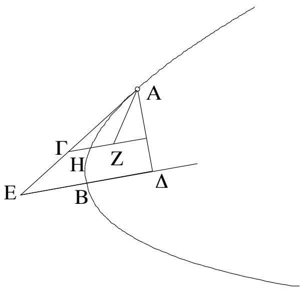


Fig. 49.1

Le point donné est situé ou sur la ligne, ou sur l'axe, ou dans le lieu restant[250] à l'extérieur de la section.

Qu'il soit donc sur la ligne, et soit un point A.

Soit le problème résolu, et soit <une tangente> AE[251], et que soit menée une perpendiculaire AΔ ; cette perpendiculaire sera alors donnée en position[252] ; d'autre part, BE est égale à BΔ[253] et BΔ est donnée ; BE est donc aussi donnée ; d'autre part, B est donné ; E est donc aussi donné[254] ; mais A est aussi donné ; AE est donc donnée en position[255].

La construction sera la suivante.

Que soit menée d'un point A une perpendiculaire AΔ ; que soit placée une droite BE égale à la droite BΔ, et que soit menée une droite de jonction AE ; il est évident qu'elle est tangente à la section[256].

Que le point donné E soit maintenant situé sur l'axe.

Soit le problème résolu, et que soit menées une tangente AE et une perpendiculaire AΔ ; BE est donc égale à BΔ[257] ; d'autre part, BE est donnée[258] ; BΔ est donc aussi donnée ; d'autre part, B est donné ; Δ est donc aussi donné[259] ; d'autre part, ΔA fait un angle droit[260] ; ΔA est donc donnée en position[261]. A est donc donné[262] ; mais E est aussi donné ; AE est

[250] C'est-à-dire « pas sur l'axe ».
[251] La rédaction est rapide.
[252] *Données*, 30.
[253] I.35.
[254] *Données*, 27.
[255] *Données*, 26.
[256] I.35.
[257] I.35.
[258] *Données*, 26.
[259] *Données*, 27.
[260] Sur le tour ὀρθὸς πρὸς (+ acc.), voir Note complémentaire [37].
[261] *Données*, 29.
[262] *Données*, 27.

Φανερὸν δὲ [ὅτι] καὶ, ἐὰν <τὸ> δοθὲν σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὀρθὴ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Ἔστω δὴ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῷ ἄξονι, τουτέστι τῇ ΒΔ, παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. Καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΖ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΑΖ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΓΗ τῇ ΖΗ· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ· καὶ ἀνῆκται ἡ ΖΑ τεταγμένως, τουτέστι παράλληλος τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΑ. Δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Γ, θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ.

Συντεθήσεται οὕτως.

Ἤχθω διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΒΔ ἡ ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΓΗ ἡ ΖΗ ἴση, καὶ τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ· φανερὸν δὴ ὅτι ποιήσει τὸ πρόβλημα.

[– νβ′ –] Ἔστω πάλιν ὑπερβολὴ ἧς ἄξων ὁ ΔΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΘΕ, ΘΖ.

Τὸ δὴ διδόμενον σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς τομῆς δοθήσεται ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας ἢ ἐν τῷ ἐφεξῆς τόπῳ ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν ἢ ἐν τῷ

1 ὅτι del. Halley ‖ τὸ add. Heiberg ‖ 4 ἡ V[1] : κ V ‖ 14 νβ′ V (sed litt. om.) ‖ ΔΒΓ Ψ : ΒΔΓ V ‖ 16 δὴ Heiberg : δὲ V ‖ διδόμενον V : δεδομένον Federspiel[3] fort. recte.

donc donnée en position[263].

La construction sera la suivante.

Que soit placée une droite ΒΔ égale à ΒΕ, et que, de Δ, soit placée[264] une droite ΔΑ faisant un angle droit avec ΕΔ, et que soit menée une droite de jonction ΑΕ ; il est évident que ΑΕ est une tangente[265].

D'autre part, il est évident que, si le point donné est le même que le point Β, la perpendiculaire menée de Β est aussi tangente à la section[266].

Soit un point donné Γ.

Soit le problème résolu, et soit <une tangente> ΓΑ, et que, par Γ, soit menée une parallèle ΓΖ à l'axe, c'est-à-dire à ΒΔ ; ΓΖ est donc donnée en position[267]. D'autre part, que, de Α, soit menée sur ΓΖ une droite ΑΖ de manière ordonnée ; ΓΗ sera alors égale à ΖΗ[268] ; d'autre part, le point Η est donné[269] ; le point Ζ est donc aussi donné[270] ; d'autre part, ΖΑ est une droite élevée de manière ordonnée, c'est-à-dire qu'elle est parallèle à la tangente en Η ; ΖΑ est donc donnée en position[271]. Α est donc aussi donné[272] ; mais Γ est aussi donné ; ΓΑ est donc donnée en position[273].

La construction sera la suivante.

Que soit menée par un point Γ une parallèle ΓΖ à ΒΔ ; que soit placée une droite ΖΗ égale à ΓΗ ; que soient menées une parallèle ΖΑ à la tangente en Η et une droite de jonction ΑΓ ; il est évident que cette droite résoudra le problème.

– [52 V] – Soit maintenant une hyperbole, d'axe ΔΒΓ, de centre Θ et d'asymptotes ΘΕ et ΘΖ.

Le point donné le sera alors ou sur la section, ou sur l'axe, ou à

[263] *Données*, 26.

[264] Voir Note complémentaire [38].

[265] I.35.

[266] I.17.

[267] *Données*, 28.

[268] I.35.

[269] *Données*, 25. Il manque le maillon qui précède : « d'autre part ΓΗ est donnée de position (*Données*, 26) ; ΖΗ est donc aussi donnée de position ».

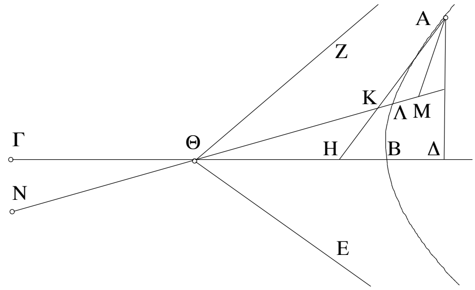
[270] *Données*, 27.

[271] *Données*, 28.

[272] *Données*, 27.

[273] *Données*, 26.

μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ ΖΘΕ γωνίας.



Ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς τομῆς ὡς τὸ Α.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΑΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἔστω ἡ ΒΓ· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ· λόγος δὲ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Η· ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΗ.

Συντεθήσεται οὕτως.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Πάλιν δὴ ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Η.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ ἐφαπτομένη, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ · καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ· καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει

5 ΔΒ Ψ : ΑΒ V ‖ 15 ΒΓ [ΓΒ Halley] edd. : ΒΓΔ V.

l'intérieur de l'angle ΕΘΖ, ou dans le lieu qui lui est adjacent, ou sur l'une des asymptotes qui comprennent la section, ou dans le lieu situé entre les droites comprenant l'angle opposé par le sommet à l'angle ΖΘΕ[274].

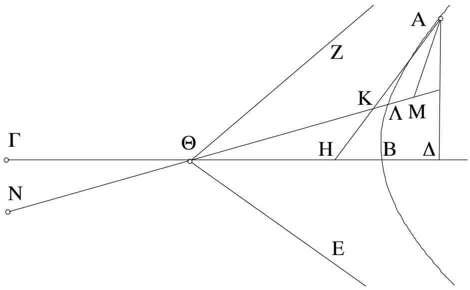


Fig. 49.2

Qu'il soit d'abord sur la section en Α.

Soit le problème résolu, et soit une tangente ΑΗ ; que soit menée une perpendiculaire ΑΔ, et soit le côté transverse ΒΓ de la figure ; ΓΗ sera alors à ΗΒ comme ΓΔ est à ΔΒ[275] ; or le rapport de ΓΔ à ΔΒ est donné[276], puisque chacune de ces droites est donnée ; le rapport de ΓΗ et de ΗΒ est donc aussi donné ; d'autre part, ΒΓ est donnée ; Η est donc donné[277] ; mais Α est aussi donné ; ΑΗ est donc donnée en position[278].

La construction sera la suivante.

Que soit menée d'un point Α une perpendiculaire ΑΔ ; que le rapport de ΓΗ à ΗΒ soit identique à celui de ΓΔ à ΔΒ, et que soit menée une droite de jonction ΑΗ ; il est évident que ΑΗ est une tangente de la section[279].

Que le point donné Η soit maintenant sur l'axe.

Soit le problème résolu, et que soient menées une tangente ΑΗ et une perpendiculaire ΑΔ ; alors, *en vertu du même raisonnement*, ΓΔ sera à ΔΒ comme ΓΗ est à ΗΒ[280] ; d'autre part, ΒΓ est donnée, Δ est donc donné[281] ;

[274] Voir Note complémentaire [39].
[275] I.36.
[276] *Données*, 1.
[277] *Données*, 7 et 27.
[278] *Données*, 26.
[279] I.34.
[280] I.36. Il faut sous-entendre ensuite : « d'autre part le rapport de ΓΗ à ΗΒ est donné (*Données*, 1) ; le rapport de ΓΔ à ΔΒ est donc aussi donné ».
[281] *Données*, 7 et 27.

ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ· θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Η· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τῷ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ, καὶ ὀρθὴ ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΗ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ Η ἀχθήσεται ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας τόπῳ τὸ Κ· καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς.

Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΛΘ ἴση ἡ ΘΝ. Πάντα ἄρα δοθέντα· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΛΝ δοθεῖσα.

Ἤχθω δὴ τεταγμένως ἡ ΑΜ ἐπὶ τὴν ΜΝ· ἔσται δὴ καὶ ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ· λόγος δὲ τῆς ΝΚ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς ΜΛ δοθείς· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Λ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ· καὶ τεταγμένως ἀνῆκται ἡ ΜΑ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΑ· θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΛΒ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΚ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΛΘ ἴση ἡ ΘΝ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ, καὶ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· ἡ ΚΑ ἄρα ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

9 ἐν τῷ ἐντὸς edd. : ἐντὸς V ‖ 17 καὶ τῆς c v Ψ : iter. V (extr. et init. lin.) ‖ ΜΛ Ψ : ΜΑ V ‖ 18 τεταγμένως Federspiel[3] : παρατεταγμένως V ‖ 21 δὴ Ψ : δὲ V ‖ 23 καὶ — ἴση Ψ : om. V.

d'autre part, ΔA fait un angle droit ; ΔA est donc donnée en position[282] ; or la section est aussi donnée ; A est donc donné[283] ; mais H est aussi donné ; AH est donc donnée en position[284].

La construction sera la suivante.

Dans les mêmes conditions, qu'il soit fait en sorte que le rapport de ΓΔ à ΔB soit identique à celui de ΓH à HB ; que soient menées une droite ΔA faisant un angle droit et une droite de jonction AH ; il est évident que la droite AH résoud le problème[285], et que, de H, sera menée une autre tangente à la section de l'autre côté.

Dans les mêmes conditions, qu'un point donné K soit situé à l'intérieur de l'angle EΘZ, et qu'il faille, de K, mener une tangente à la section.

Soit le problème résolu, et soit une tangente KA ; que soit menée une droite de jonction KΘ et qu'elle soit prolongée, et que soit placée une droite ΘN égale à ΛΘ. Tous ces éléments seront donc donnés ; la droite ΛN sera alors aussi donnée.

Que soit menée de manière ordonnée une droite AM sur la droite MN, alors MN sera *aussi* à MΛ comme NK est à KΛ[286] ; or le rapport de NK à KΛ est donné[287] ; le rapport de NM à MΛ est donc aussi donné ; d'autre part, Λ est donné ; M est donc aussi donné[288] ; d'autre part, MA est une droite élevée de manière ordonnée parallèlement à la tangente en Λ ; MA est donc donnée en position[289] ; or la section AΛB est aussi donnée en position ; A est donc donné[290] ; mais K est aussi donné ; AK est donc donnée[291].

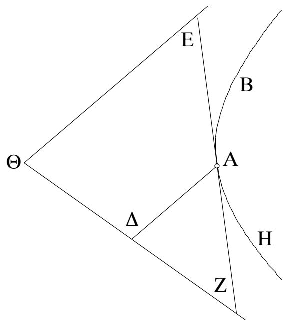
La construction sera la suivante.

Dans les mêmes conditions, qu'un point K soit aussi donné ; que soit menée une droite de jonction KΘ et qu'elle soit prolongée ; que soit placée une droite ΘN égale à la droite ΘΛ ; qu'il soit fait en sorte que NM soit à MΛ comme NK est à KΛ ; que soit menée une parallèle MA à la tangente en Λ, et que soit menée une droite de jonction KA ; KA est donc une tangente à la section[292].

[282] *Données*, 29.
[283] *Données*, 25.
[284] *Données*, 26.
[285] I.34.
[286] I.36.
[287] *Données*, 1.
[288] *Données*, 7 et 27.
[289] *Données*, 28.
[290] *Données*, 25.
[291] *Données*, 26.
[292] I.34.

Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ἑτέρα ἀχθήσεται ἀπὸ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

[– *νγʹ* –] Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ.



Καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένην τῆς τομῆς.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΔΖ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ ἴση ἐστί· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΖΘ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ· καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΕΘ παράλληλος ἧκται ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ· θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· θέσει ἄρα ἡ ΖΑΕ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ἔστω ἡ τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ αἱ ΕΘ, ΘΖ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΘ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΘΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ.

12 δὴ Ψ : δὲ V ‖ 14 alt. τῶν edd. (jam Comm.) : καὶ V.

Il est évident que sera aussi menée de K une autre tangente à la section de l'autre côté.

– [53 V] – *Dans les mêmes conditions*, qu'un point donné Z soit situé sur l'une des asymptotes comprenant la section.

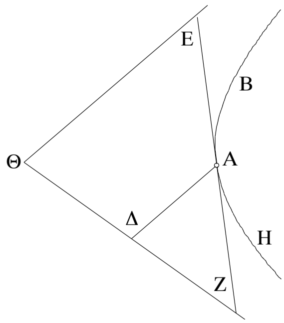


Fig. 49.3

Il faut, de Z, mener une tangente à la section.

Soit le problème résolu, et soit une tangente ZAE ; que, par A, soit menée une parallèle AΔ à EΘ ; ΔΘ sera alors égale à ΔZ[293], puisque ZA est aussi égale à AE[294] ; d'autre part, ZΘ est donnée ; Δ est donc donné[295] ; d'autre part, par un point donné Δ, une droite ΔA a été menée parallèlement à la droite EΘ donnée en position ; ΔA est donc donnée en position[296] ; or la section est aussi donnée en position ; A est donc donné[297] ; mais Z est aussi donné ; ZA est donc donnée en position[298].

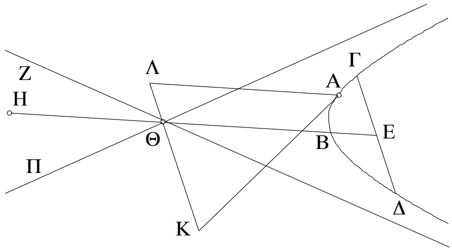
La construction sera la suivante.

Soit la section AB[299], d'asymptotes EΘ et ΘZ ; soit un point donné Z situé sur l'une des asymptotes comprenant la section ; que ZΘ soit coupée en deux parties égales en un point Δ ; que, par Δ, soit menée une parallèle ΔA à ΘE, et que soit menée une droite de jonction ZA.

[293] *Éléments*, VI.2.
[294] Prop. 3.
[295] *Données*, 7 et 27.
[296] *Données*, 28.
[297] *Données*, 25.
[298] *Données*, 26.
[299] On attendrait « *une* section », mais il ne faut pas attendre une rigueur linguistique parfaite de cette suite de périodes analytico-synthétiques simplifiées.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΔΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ, ὥστε διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΖΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

[– νδʹ –] Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ἑξῆς τόπῳ τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, καὶ ἔστω τὸ Κ.



Δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω· ἔσται δὴ θέσει.

Ἐὰν δὴ ἐπὶ τῆς τομῆς ληφθῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΘ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, ἔσται θέσει.

Καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΕ ἐκβληθῇ, ἔσται θέσει διάμετρος οὖσα συζυγὴς τῇ ΚΘ. Κείσθω δὴ τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΒΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ.

Ἔσται δὴ διὰ τὸ εἶναι τὰς ΚΛ, ΒΗ συζυγεῖς διαμέτρους καὶ ἐφαπτομένην τὴν ΑΚ καὶ τὴν ΑΛ ἀχθεῖσαν παρὰ τὴν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΛ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΒΗ εἴδους· δοθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΚΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΛ· ἀλλὰ

3 νδʹ V (sed litt. om.) ‖ 11 ΘΕ Canon. : ΘΕΒ V ΕΒΘ Ψ.

Puisque ΖΔ est égale à ΔΘ, alors ΖΑ est aussi égale à ΑΕ[300], de sorte que, en vertu des démonstrations précédentes, ΖΑΕ est une tangente à la section[301].

– [54 V] – *Dans les mêmes conditions*, que le point donné, soit Κ, soit situé dans le lieu sous l'angle adjacent aux droites comprenant la section.

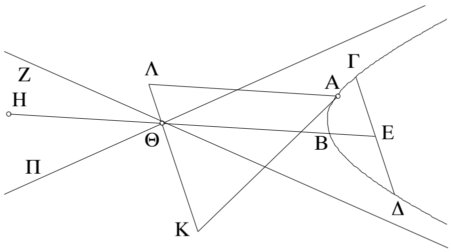


Fig. 49.4

Il faut, de Κ, mener une tangente à la section.

Soit le problème résolu, et soit une tangente ΚΑ ; que soit menée une droite de jonction ΚΘ et qu'elle soit prolongée ; elle sera alors donnée en position[302].

Si, sur la section, est pris un point donné Γ, et que, par Γ, est menée une parallèle ΓΔ à ΚΘ, elle sera donnée en position[303].

Si ΓΔ est coupée en deux parties égales en un point Ε, qu'est menée une droite de jonction ΘΕ et qu'elle est prolongée, cette droite, en tant que diamètre conjugué de ΚΘ[304], sera donnée en position. Que soit placée une droite ΘΗ égale à ΒΘ, et que, par Α, soit menée une parallèle ΑΛ à ΒΘ.

Alors, du fait que les droites ΚΛ et ΒΗ sont des diamètres conjugués, que ΑΚ est une tangente et que ΑΛ est menée parallèlement à ΒΗ, le rectangle ΚΘ,ΘΛ sera égal au quart de la figure appliquée à ΒΗ[305] ; le rectangle ΚΘ,ΘΛ est donc donné ; d'autre part, ΚΘ est donnée[306] ; ΘΛ est

[300] *Éléments*, VI.2.
[301] Prop. 9.
[302] *Données*, 26.
[303] *Données*, 28.
[304] I. *Premières définitions* 6.
[305] I.38 et *Secondes définitions* 3.
[306] *Données*, 26.

καὶ τῇ θέσει· καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ· καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ θέσει τῇ ΒΗ ἦκται ἡ ΛΑ· θέσει ἄρα ἡ ΛΑ· θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΑΚ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ ἐν τῷ προειρημένῳ τόπῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Γ, καὶ τῇ ΚΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΘΗ· ἡ ἄρα ΗΒ πλαγία διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ ΚΘΛ.

Κείσθω δὴ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΒΗ εἴδους ἴσον τὸ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΚΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ θεωρήματος.

Ἐὰν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν ΖΘΠ δοθῇ, ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα. Ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τεμεῖ τὴν ΗΘ, ὥστε συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘΠ, ὅπερ ἀδύνατον διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ λα′ τοῦ πρώτου καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τούτου τοῦ βιβλίου.

[– νε′ –] Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς.

14 ἀντιστροφὴν edd. : ἀναστροφὴν V ‖ 19 νε′ V (sed litt. om.).

donc aussi donnée[307] ; mais elle est aussi donnée en position, et Θ est donné ; Λ est donc aussi donné[308] ; d'autre part, par Λ, a été menée une parallèle ΛA à la droite BH donnée en position ; ΛA est donc donnée en position[309] ; or la section est aussi donnée en position ; A est donc donné[310] ; mais K est aussi donné ; AK est donc donnée en position[311].

La construction sera la suivante.

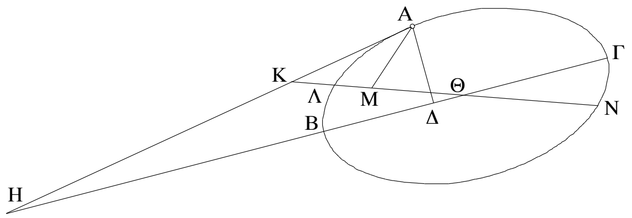
Dans les mêmes conditions, qu'un point K soit donné dans le lieu qu'on a dit ; que soit menée une droite de jonction KΘ et qu'elle soit prolongée ; que soit pris un certain point Γ ; que soit menée une parallèle ΓΔ à KΘ ; que la droite ΓΔ soit coupée en deux parties égales par un point E ; que soit menée une droite de jonction EΘ et qu'elle soit prolongée, et que soit placée une droite ΘH égale à la droite BΘ ; la droite HB est donc un diamètre transverse conjugué à la droite KΘΛ[312].

Que soit placé un rectangle KΘ,ΘΛ égal au quart de la figure appliquée à BH ; que, par Λ, soit menée une parallèle ΛA à BH, et que soit menée une droite de jonction KA ; il est évident que la droite KA est une tangente à la section, en vertu de la converse du théorème[313].

Si le point est donné dans le lieu situé entre les droites ZΘ et ΘΠ, le problème sera impossible. En effet, la tangente coupera la droite HΘ, de sorte qu'elle rencontrera chacune des droites ZΘ et ΘΠ, ce qui est impossible, en vertu des démonstrations déjà données dans la proposition 31 du premier Livre et de la proposition 3 du présent Livre[314].

– [55 V] – *Dans les mêmes conditions*, que la section soit une ellipse ; soit un point A donné sur la section, et qu'il faille, de A, mener une tangente à la section.

[307] *Données*, 57.
[308] *Données*, 27.
[309] *Données*, 28.
[310] *Données*, 25.
[311] *Données*, 26.
[312] I. *Premières définitions* 6.
[313] Le théorème en question (I.38) a été utilisé dans l'*analyse*.
[314] Sur ces références, voir le tome 1.2, Note complémentaire [83].



Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΗ, καὶ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸν ΒΓ ἄξονα ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ· καὶ ἔστι λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς·λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ Η· ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

Ἔστω δὴ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ· καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην.

Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛΘ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ν· ἔσται δὴ θέσει.

Καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΜ τεταγμένως, ἔσται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ· λόγος δὲ τῆς ΚΝ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΜΝ πρὸς ΛΜ δοθείς. Δοθὲν ἄρα τὸ Μ· καὶ ἀνῆκται ἡ ΜΑ· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἡ ΜΑ.

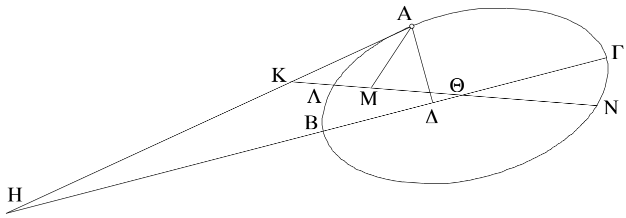


Fig. 49.5

Soit le problème résolu, et soit une tangente ΑΗ ; que, de Α, soit menée sur l'axe ΒΓ une droite ΑΔ de manière ordonnée ; le point Δ sera alors donné[315], et ΓΗ sera à ΗΒ comme ΓΔ est à ΔΒ[316] ; d'autre part, le rapport de ΓΔ à ΔΒ est donné[317] ; le rapport de ΓΗ à ΗΒ est donc aussi donné. Η est donc donné ; mais Α est aussi donné ; la droite ΑΗ est donc donnée en position[318].

La construction sera la suivante.

Que soit menée une perpendiculaire ΑΔ ; que le rapport de ΓΗ à ΗΒ soit identique à celui de ΓΔ à ΔΒ, et que soit menée une droite de jonction ΑΗ ; il est évident que ΑΗ est une tangente, comme dans le cas de l'hyperbole aussi[319].

Soit maintenant un point donné Κ, et qu'il faille, de Κ, mener une tangente.

Soit le problème résolu, et soit une tangente ΚΑ ; que soit menée une droite de jonction ΚΛΘ jusqu'au centre Θ[320] et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Ν ; elle sera alors donnée en position[321].

Si est menée une droite ΑΜ de manière ordonnée, ΝΜ sera à ΜΛ comme ΝΚ est à ΚΛ[322] ; or le rapport de ΚΝ à ΚΛ est donné[323] ; le rapport

[315] *Données*, 28 et 25.
[316] I.36.
[317] *Données*, 1.
[318] *Données*, 26.
[319] I.34.
[320] Sur cet emploi de ἐπιζευγνύναι, voir Note complémentaire [40].
[321] *Données*, 26.
[322] I.36.
[323] *Données*, 1.

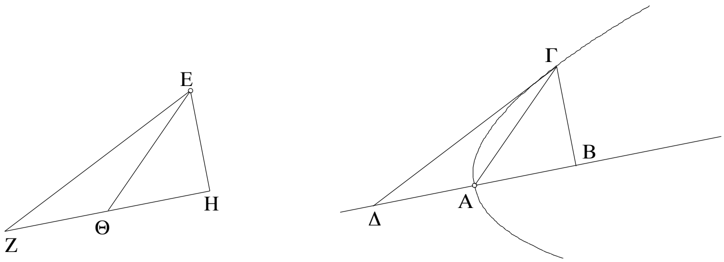
Δοθὲν ἄρα τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΚΑ.

Ἡ δὲ σύνθεσις ἡ αὐτὴ τῇ πρὸ αὐτοῦ.

– *ν*′ – Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

Ἔστω <ἡ> κώνου τομὴ πρότερον παραβολὴ ἧς ἄξων ὁ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς ἥτις πρὸς τῷ ΑΒ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθεῖσῃ ὀξείᾳ.



Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. Ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ· ἔσται δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β δοθεῖσα. Λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς ΒΓ δοθείς· τῆς δὲ ΒΔ πρὸς ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· καὶ ἔστι πρὸς θέσει τῇ ΒΑ καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ· θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ· καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως.

3 *ν*′ edd. : *νς*′ V (sed litt. om.) ‖ 5 ὀξεί]ᾳ V^{1sl} : ῃ V ‖ 6 ἡ addidi ‖ 10 ἔσται ego : ἔστι V ‖ δὴ edd. : δὲ V.

de MN à ΛM est donc aussi donné. M est donc donné[324] ; d'autre part, une droite MA a été élevée <de manière ordonnée>, car cette droite est parallèle à la tangente en Λ ; MA est donc donnée en position[325]. A est donc donné[326] ; mais K est aussi donné ; KA est donc donnée en position[327].

La construction est identique à la précédente.

– 50 [56 V] – *A une section de cône donnée, mener une tangente faisant avec l'axe, du même côté que la section, un angle égal à un angle aigu donné.*

Que la section de cône soit d'abord une parabole, d'axe AB.

Il faut mener à la section une tangente faisant avec l'axe AB, du même côté que la section, un angle égal à un angle aigu donné.

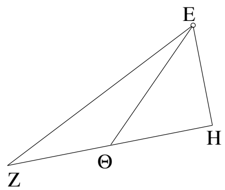


Fig. 50.1

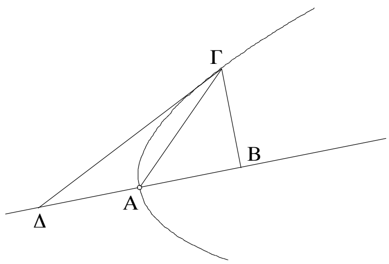


Fig. 50.2

Soit le problème résolu, et soit une tangente ΓΔ ; l'angle BΔΓ est donc donné. Que soit menée une perpendiculaire BΓ ; l'angle en B[328] sera alors aussi donné. Le rapport de ΔB à BΓ est donc donné[329] ; or le rapport de BΔ à BA est donné[330] ; le rapport de AB à BΓ est donc aussi donné[331] ; d'autre part, l'angle en B est donné ; l'angle BAΓ est donc aussi donné[332] ; d'autre part, il est appliqué à la droite BA qui est donnée en position et il est situé

[324] *Données*, 7 et 27.
[325] *Données*, 29.
[326] *Données*, 27.
[327] *Données*, 26.
[328] Voir Note complémentaire [41].
[329] *Données*, 40.
[330] I.35.
[331] *Données*, 8.
[332] *Données*, 41.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολὴ ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΗ τῷ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΕ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΒΑ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ · ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΗ ἐστιν ἴση.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Η, Β γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ.

[– νζʹ –] Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή.

Καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ καὶ κάθετος <ἤχθω> ἡ ΓΕ. Λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ δοθείς· ὁ αὐτὸς γάρ ἐστι τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν· τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΕ, ΔΕΓ· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ δοθείς, ὥστε καὶ τῆς ΧΕ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· <τῆς δὲ ΓΕ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὥστε καὶ τῆς ΧΕ πρὸς ΓΕ λόγος ἐστὶ δοθείς·> καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Χ.

11 ἴση c v Ψ : εἴση V ‖ 12 νζʹ V (sed litt. om.) ‖ 14 ἤχθω add. Halley ‖ 19-21 τῆς δὲ ΓΕ πρὸς ΕΔ [τὴν ΕΔ Halley] — δοθείς add. Halley.

en un point donné Α ; ΓΑ est donc donnée en position[333] ; or la section est aussi donnée en position ; Γ est donc donné[334] ; d'autre part, ΓΔ est une tangente ; ΓΔ est donc donnée en position.

La construction du problème sera la suivante.

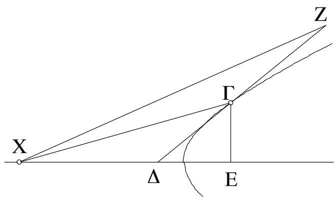
Que la section de cône donnée soit d'abord une parabole, d'axe ΑΒ ; soit un angle aigu donné ΕΖΗ ; que soit pris un point Ε sur ΕΖ ; que soit menée une perpendiculaire ΕΗ ; que ΖΗ soit coupée en deux parties égales par un point Θ ; que soit menée une droite de jonction ΘΕ ; que soit construit un angle ΒΑΓ égal à l'angle ΗΘΕ ; que soit menée une perpendiculaire ΒΓ ; que soit placée une droite ΑΔ égale à ΒΑ et que soit menée une droite de jonction ΓΔ ; ΓΔ est donc une tangente de la section[335].

Je dis maintenant que[336] l'angle ΓΔΒ est égal à l'angle ΕΖΗ.

Puisque ΔΒ est à ΒΑ comme ΖΗ est à ΗΘ et que ΑΒ est à ΒΓ comme ΘΗ est à ΗΕ, alors, *à intervalle égal*[337], ΔΒ est à ΒΓ comme ΖΗ est à ΗΕ ; d'autre part, les angles en Η et Β sont droits ; l'angle Ζ est donc égal à l'angle Δ[338].

– [57 V] – Que la section soit une hyperbole ; soit le problème résolu, et soit une tangente ΓΔ ; que soit pris le centre Χ de la section, et que soient menées une droite de jonction ΓΧ et une perpendiculaire ΓΕ. Le rapport du rectangle ΧΕ,ΕΔ au carré sur ΕΓ est donc donné, car il est identique à celui du côté transverse au côté droit[339] ; or le rapport du carré sur ΓΕ à celui sur ΕΔ est donné[340], puisque chacun des angles ΓΔΕ et ΔΕΓ est donné ; le rapport du rectangle ΧΕ,ΕΔ au carré sur ΕΔ est donc aussi donné[341], de sorte que celui de ΧΕ à ΕΔ est aussi donné ; <or le rapport de ΓΕ à ΕΔ est donné ; de sorte que celui de ΧΕ à ΓΕ est aussi donné[342] ;> d'autre part, l'angle en Ε est donné ; l'angle en Χ est donc aussi donné[343].

[333] *Données*, 29.
[334] *Données*, 25.
[335] I.33.
[336] On attend la formule canonique du second *diorisme* λέγω δὴ ὅτι καί.
[337] Sur la locution δι' ἴσου, voir Note complémentaire [42]. Sur les schémas marginaux qui illustrent cette opération dans **V**, voir p. XIII-XIV.
[338] *Éléments*, VI.6.
[339] I.37.
[340] *Données*, 40 et 50.
[341] *Données*, 8.
[342] *Données*, 8. Voir Note complémentaire [43].
[343] *Données*, 41.



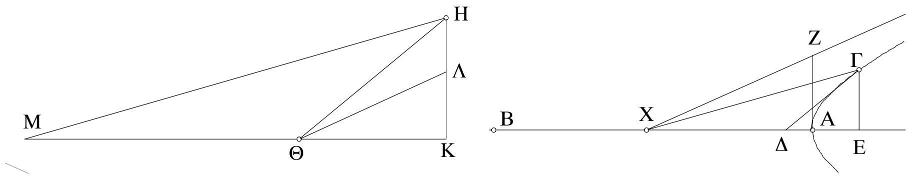
Πρὸς δὴ θέσει εὐθείᾳ τῇ ΧΕ καὶ δοθέντι τῷ Χ διῆκταί τις ἡ ΓΧ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ· θέσει ἄρα ἡ ΓΧ · θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ· καὶ διῆκται ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

Ἤχθω ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ ΖΧ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτώτῳ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. Μείζων ἄρα ἔσται ἡ ὑπὸ ΖΔΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΖΧΔ.

Δεήσει ἄρα εἰς τὴν σύνθεσιν τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων.

[– νη′ –] Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα <κώνου τομὴ> ὑπερβολή ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΧΖ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἡ ὑπὸ ΚΘΗ, καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΖ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΗΘ τὸ Η, καὶ ἤχθω ἀπ᾽ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΘΚ κάθετος ἡ ΗΚ.



9 νη′ V (sed litt. om.) || 10 κώνου τομὴ addidi vide adn.

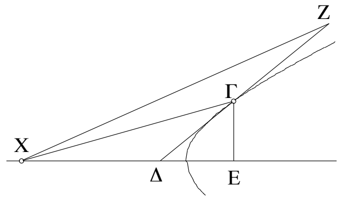


Fig. 50.3

Une certaine droite ΓX a donc été menée sous un angle donné en étant appliquée à une droite XE donnée en position et à un point donné X. ΓX est donc donnée en position[344] ; or la section est aussi donnée en position ; le point Γ est donc donné[345] ; d'autre part, une tangente ΓΔ a été menée ; ΓΔ est donc donnée en position.

Que soit menée une asymptote ZX de la section ; le prolongement de ΓΔ rencontrera donc l'asymptote[346] ; qu'elle la rencontre en Z ; l'angle ZΔE sera donc plus grand que l'angle ZXΔ[347].

Il faudra donc, pour la construction, que l'angle aigu donné soit plus grand que la moitié de l'angle compris par les asymptotes.

– [58 V] – La construction du problème sera la suivante[348].

Que la section de cône donnée soit une hyperbole[349], d'axe AB ; soient une asymptote XZ et un angle aigu donné KΘH plus grand que l'angle AXZ ; soit un angle KΘΛ égal à l'angle AXZ ; que soit menée de A une droite AZ à angles droits avec AB ; que soit pris un certain point H sur HΘ, et que soit menée de ce point une perpendiculaire HK à ΘK.

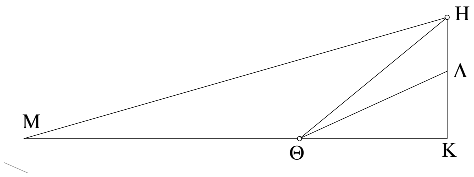


Fig. 50.4

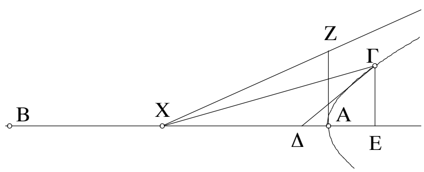


Fig. 50.5

[344] *Données*, 29.
[345] *Données*, 25.
[346] Prop. 3.
[347] *Éléments*, I.16.
[348] Prop. 58 dans **V**.
[349] Voir Note complémentaire [44].

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῇ ὑπὸ ΛΘΚ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Κ γωνίαι ὀρθαί, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΘΚ πρὸς ΚΛ · ἡ δὲ ΘΚ πρὸς ΚΛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΚ πρὸς ΚΗ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ.

Ἐὰν δὴ ποιήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, μεῖζον ἔσται τοῦ ἀπὸ ΘΚ · ἔστω τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΜ.

Ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΜΚ τοῦ ὑπὸ ΜΚΘ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ.

Καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλαττον τοῦ ἀπὸ ΑΖ. Καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὅμοια ποιήσει τὰ τρίγωνα, καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῆς ὑπὸ ΗΜΚ.

Κείσθω δὴ τῇ ὑπὸ ΗΜΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΧΓ· ἡ ἄρα ΧΓ τεμεῖ τὴν τομήν· τεμνέτω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΧΕ τρίγωνον τῷ ΗΜΚ. Ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ· ἔστι δὲ καί ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ.

12 τοῦ V[1] : τὸ V || 16 ΑΖ V ut vid. c : ΑΔ v Ψ || 21 ὅμοιον Ψ : ὅμοια V.

Dès lors, puisque l'angle ZXA est égal à l'angle ΛΘΚ et que les angles en A et en K aussi sont droits, alors ΘK est à KΛ comme XA est à AZ[350] ; or ΘK a, avec KΛ, un rapport plus grand qu'avec HK ; XA a donc aussi, avec AZ, un rapport plus grand que ΘK avec KH[351], de sorte que le carré sur XA a aussi, avec celui sur AZ, un rapport plus grand que le carré sur ΘK avec celui sur KH ; or le côté transverse est au côté droit comme le carré sur XA est à celui de AZ[352] ; le côté transverse a donc, avec le côté droit, un rapport plus grand que le carré sur ΘK avec le carré sur KH.

Si nous faisons en sorte[353] qu'une autre grandeur soit au carré sur KH comme le carré sur XA est à celui sur AZ, l'autre grandeur sera plus grande que le carré sur ΘK ; que cette grandeur soit le rectangle MK,KΘ, et que soit menée une droite de jonction HM.

Dès lors, puisque le carré sur MK est plus grand que le rectangle MK,KΘ, alors le carré sur MK a, avec celui sur KH, un rapport plus grand que le rectangle MK,KΘ avec le carré sur KH, c'est-à-dire que le carré sur XA avec celui sur AZ.

Si nous faisons en sorte que le carré sur XA soit à une autre grandeur comme le carré sur MK est à celui sur KH, le carré sur XA sera mis en rapport avec une grandeur qui sera plus petite que le carré sur AZ. D'autre part, la droite joignant le point X au point considéré rendra les triangles semblables ; en vertu de quoi, l'angle ZXA est plus grand que l'angle HMK[354].

Que soit placé maintenant un angle AXΓ égal à l'angle HMK ; XΓ coupera donc la section[355] ; qu'elle la coupe en un point Γ ; que, de Γ, soient menées une tangente ΓΔ à la section[356] et une perpendiculaire ΓE ; le triangle ΓXE est donc semblable au triangle HMK. Le carré sur MK est donc à celui sur KH comme le carré sur XE est à celui sur EΓ[357] ; or le rectangle XE,EΔ est au carré sur EΓ, et le rectangle MK,KΘ est au carré sur KH, comme le côté transverse est au côté droit[358].

[350] *Éléments*, VI.4.

[351] Voir Note complémentaire [45].

[352] Voir prop. 1.

[353] La forme attendue est l'impératif πεποιήσθω. Les propositions 50 et 52 offrent les seules occurrences de la forme ποιήσωμεν de tout le *corpus* classique, et cela dans trois passages décrivant des procédures similaires.

[354] Voir Note complémentaire [46].

[355] Prop. 2.

[356] Prop. 49.

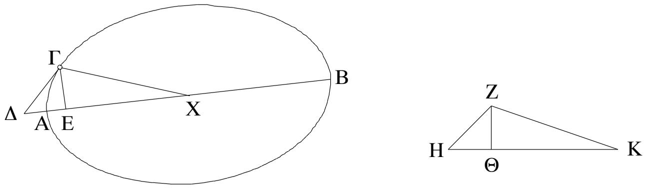
[357] *Éléments*, VI.4.

[358] I.37.

Καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΘ· ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΧ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΜ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ· καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Κ γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

[– νθ′ –] Ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις ἧς ἄξων ὁ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τῆς τομῆς ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην γωνίαν περιέξει τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.



Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΑ γωνία. Ἤχθω κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ δοθείς. Ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ. Τοῦ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὁ γὰρ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. Καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· τῆς δὲ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἡ πρὸς τῷ Χ γωνία· καὶ ἔστι πρὸς θέσει <δοθείσῃ> καὶ δοθέντι σημείῳ·

2 pr. πρὸς Ψ : om. V ‖ 7 νθ′ V (sed litt. om.) ‖ 8 ἥτις Ψ : ἢ τῆς V ‖ 10 alt. ἡ Ψ : om. V ‖ 13 ἄρα Federspiel[3] : δὲ V ‖ 16 ΓΕ Canon. : ΧΕ V ‖ 18 δοθείσῃ add. Halley.

Par inversion, le carré sur HK est au rectangle MK,KΘ comme le carré sur ΓE est au rectangle XE,EΔ ; *à intervalle égal*, le carré sur MK est donc au rectangle MK,KΘ comme le carré sur XE est au rectangle XE,EΔ[359]. MK est donc aussi à KΘ comme XE est à EΔ ; or, on l'a vu[360], HK est aussi à KM comme ΓE est à EX ; *à intervalle égal*, HK est donc à KΘ comme ΓE est à EΔ[361] ; d'autre part, les angles en E et en K sont droits ; l'angle en Δ est donc égal à l'angle HΘK[362].

– [59 V] – Que la section soit une ellipse, d'axe AB.

Il faut mener à la section une tangente, qui, avec l'axe et du même côté que la section, comprendra un angle égal à un angle aigu donné.

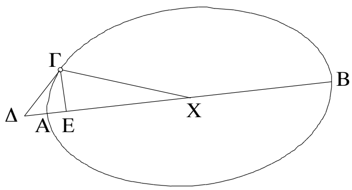


Fig. 50.6

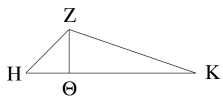


Fig. 50.7

Soit le problème résolu, et soit une tangente ΓΔ ; l'angle ΓΔA est donc donné. Que soit menée une perpendiculaire ΓE ; le rapport du carré sur ΔE à celui sur EΓ est donc donné[363]. Soit un centre X de la section, et que soit menée une droite de jonction ΓX. Le rapport du carré sur ΓE au rectangle ΔE,EX est donc donné[364], car il est identique au rapport du côté droit au côté transverse. Le rapport du carré sur ΔE au rectangle ΔE,EX est donc aussi donné[365] ; le rapport de ΔE à EX est donc aussi donné, tout comme celui de ΔE à EΓ ; le rapport de ΓE à EX est donc aussi donné[366] ; d'autre part, l'angle en E est droit ; l'angle en X est donc donné[367] ; d'autre part, il est appliqué à une droite <donnée> en position et situé en un point donné ;

[359] Voir p. XIII-XIV.
[360] Voir Note complémentaire [47].
[361] Voir p. XIII-XIV.
[362] *Éléments*, VI.6. Voir Note complémentaire [48].
[363] *Données*, 1.
[364] I.37.
[365] *Données*, 8.
[366] *Données*, 8.
[367] *Données*, 41.

δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον· καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

[– ξʹ –] Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ Ζ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΚΖ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΑΧΓ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ.

Λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ· ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΗ· ἑκάτερος γὰρ <λόγος> ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν.

Καὶ δι᾽ ἴσου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΗ· ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΓΕ, ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΘ· καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Ἡ ΓΔ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

– *να*ʹ – Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολὴ ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ.

Δεῖ δὴ ἀγαγεῖν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένην ἥτις μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς διαμέτρου ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Θ.

3 ξʹ V (sed litt. om.) ‖ 7 ἔστω Heiberg : τὸ V ‖ 8 ΗΚΖ [ΗΚ, ΚΖ Ψ] Ψ : ΗΖ V ‖ 16 λόγος add. Mont. ‖ ὁ Ψ : om. V ‖ 17 οὕτω Ψ : οὗ V ‖ 18 pr. ΚΘ Ψ : ΚΟ V ut vid. c v ‖ ΗΘΚ edd. : ΚΗΘ V ‖ 24 *να*ʹ edd. : ξαʹ V (sed litt. om.) ‖ 28 ἡ Θ Canon. : ΗΘ V.

le point Γ est donc donné[368] ; d'autre part, ΓΔ est une tangente menée d'un point donné Γ ; ΓΔ est donc donnée en position.

– [60 V] – La construction du problème sera la suivante.

Soit un angle aigu donné ZHΘ ; que soit pris sur ZH un point Z et que soit menée une perpendiculaire ZΘ ; qu'il soit fait en sorte que le carré sur ZΘ soit au rectangle HΘ,ΘK comme le côté droit est au côté transverse ; que soit menée une droite de jonction KZ ; soit un centre X de la section ; que soit construit un angle AXΓ égal à l'angle HKZ, et que soit menée une tangente ΓΔ à la section[369].

Je dis que la droite ΓΔ résoud le problème, c'est-à-dire que l'angle ΓΔE est égal à l'angle ZHΘ.

Puisque KΘ est à ZΘ comme XE est à EΓ[370], alors le carré sur KΘ est aussi à celui sur ZΘ comme le carré sur XE est à celui sur EΓ ; or le carré sur ZΘ est aussi au rectangle KΘ,ΘH comme le carré sur ΓE est au rectangle ΔE,EX[371], car chacun des deux rapports est identique au rapport du côté droit au côté transverse.

À intervalle égal, le carré sur KΘ est donc au rectangle HΘ,ΘK comme le carré sur XE est au rectangle XE,EΔ ; KΘ est donc aussi à ΘH comme XE est à ΔE ; or KΘ est aussi à ZΘ comme XE est à ΓE ; *à intervalle égal*, HΘ est donc à ZΘ comme ΔE est à EΓ[372] ; d'autre part, les côtés qui comprennent des angles droits sont en proportion ; l'angle ΓΔE est donc égal à l'angle ZHΘ[373].

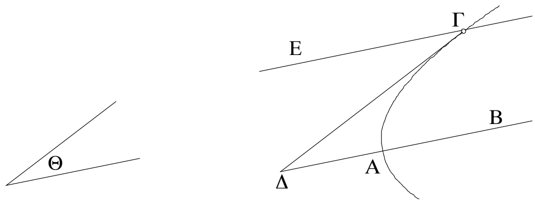
La droite ΓΔ résoud donc le problème.

– 51 [61 V] – *A une section de cône donnée, mener une tangente comprenant avec le diamètre mené par le point de contact un angle égal à un angle aigu donné.*

Que la section de cône donnée soit d'abord une parabole, d'axe AB, et soit un angle donné Θ.

Il faut mener à la parabole une tangente qui, avec le diamètre mené du point de contact, comprendra un angle égal à l'angle en Θ.

[368] *Données*, 29 et 25.
[369] Prop. 49.
[370] *Éléments*, VI.4.
[371] I.37.
[372] Voir p. XIII-XIV.
[373] *Éléments*, VI.6.



Γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῇ ΕΓ τὴν ὑπὸ ΕΓΔ γωνίαν ἴσην τῇ Θ. Καὶ συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ.

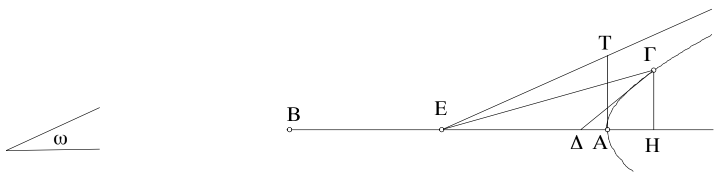
Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ, ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστί· δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΕΓΔ· ἴση γάρ ἐστι τῇ Θ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως .

Ἔστω παραβολὴ ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. Ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῷ ἄξονι τὴν ὑπὸ τῶν ΑΔΓ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, καὶ ἡ Θ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ.

[– ξβʹ –] Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ.



Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ ποιοῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΓΗ. Δοθεὶς ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ.

2 ΕΓΔ Ψ : ΕΓΑ V ‖ 10 ΑΔΓ edd. (ΓΔΑ Ψ) : ΔΑΓ V ‖ 14 ξβʹ V (sed litt. om.).

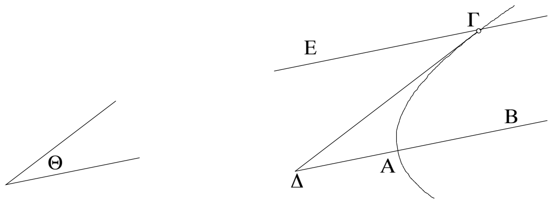


Fig. 51.1

Soit le problème résolu, et que soit menée une tangente ΓΔ faisant, avec le diamètre ΕΓ, mené par le point de contact, un angle ΕΓΔ égal à Θ. Que ΓΔ rencontre l'axe en un point Δ.

Dès lors, puisque ΑΔ est parallèle à ΕΓ[374], l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΕΓΔ[375] ; or l'angle ΕΓΔ est donné, puisqu'il est égal à l'angle Θ ; l'angle ΑΔΓ est donc aussi donné.

La construction sera la suivante.

Soient une parabole, d'axe ΑΒ, et un angle donné Θ. Que soit menée à la section une tangente ΓΔ faisant, avec l'axe, un angle ΑΔΓ égal à l'angle Θ[376], et que, par Γ, soit menée une parallèle ΕΓ à ΑΒ.

Dès lors, puisque l'angle Θ est égal à l'angle ΑΔΓ et que l'angle ΑΔΓ est égal à l'angle ΕΓΔ[377], alors l'angle Θ est aussi égal à l'angle ΕΓΔ.

[62 V] – Que la section soit une hyperbole, d'axe ΑΒ, de centre Ε, d'asymptote ΕΤ, et soient un angle aigu donné ω et une tangente ΓΔ.

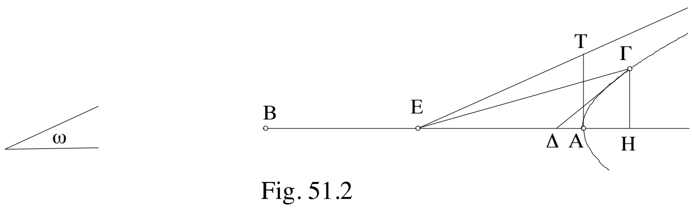
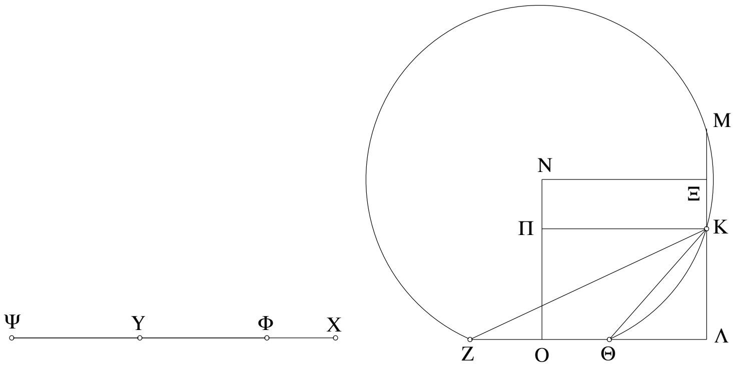


Fig. 51.2

Que soient menées une droite de jonction ΓΕ qui résolve le problème et une perpendiculaire ΓΗ. Le rapport du côté transverse au côté droit est donc donné, et donc aussi celui du rectangle ΕΗ,ΗΔ au carré sur ΓΗ[378].

[374] I.51, épilogue.
[375] *Éléments*, I.29.
[376] Prop. 50.
[377] *Éléments*, I.29.
[378] I.37.

Ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς γεγράφθω κύκλου τμῆμα δεχομένον γωνίαν ἴσην τῇ Ω· ἔσται ἄρα μεῖζον ἡμικυκλίου. Καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ ἤχθω κάθετος ἡ ΚΛ ποιοῦσα τὸν τοῦ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ.



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, ἀλλὰ καὶ ἔστιν ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΕΓΗ τριγώνῳ καὶ τὸ ΖΘΚ τῷ ΕΓΔ, ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ γωνία, τουτέστιν ἡ Ω, τῇ ὑπὸ ΓΕΔ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως·

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΧΨ πρὸς ΧΦ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΨΦ κατὰ τὸ Υ, καὶ ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς γεγράφθω τμῆμα κύκλου μεῖζον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν τῇ Ω ἴσην, καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΝΟ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΟ

4 ΛΚ Ψ : ΑΚ V ‖ 5 τῷ Ψ : τὸν V ‖ 10 ΕΓΗ edd. (jam Comm.) : ΕΓΚ V ‖ ΘΖΚ edd. (jam Comm.) : ΖΘΚ V ‖ 11 ΓΕΔ edd. (jam Comm.) : ΕΓΔ V[1] ΓΔ V ‖ 13 ΑΓ e corr. V[1] ‖ 19 τοῦ e corr. V[1].

Que soit placée sur la figure[379] une certaine droite donnée ΖΘ, et que soit décrit sur elle un segment de cercle capable d'un angle égal à l'angle ω ; ce segment sera donc plus grand qu'un demi-cercle[380]. Que, d'un certain point Κ pris parmi les points sur la circonférence, soit menée une perpendiculaire ΚΛ telle que le rapport du rectangle ΖΛ,ΛΘ au carré sur ΛΚ soit identique à celui du côté transverse au côté droit, et que soient menées des droites de jonction ΖΚ et ΚΘ.

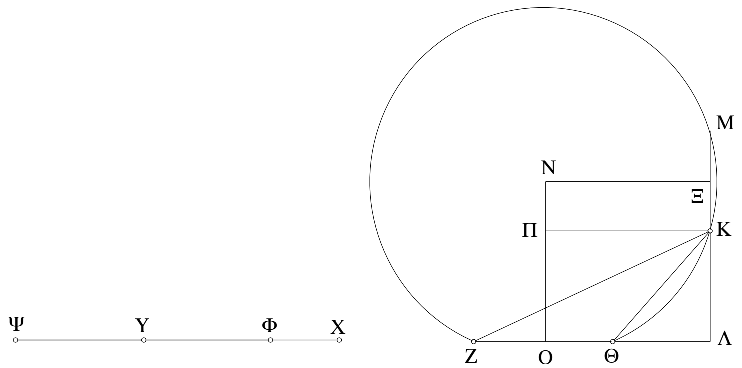


Fig. 51.3

Dès lors, puisque l'angle ΖΚΘ est égal à l'angle ΕΓΔ, que, d'autre part, le rectangle ΕΗ,ΗΔ aussi est au carré sur ΗΓ et le rectangle ΖΛ,ΛΘ est au carré sur ΛΚ comme le côté transverse est au côté droit, alors le triangle ΚΖΛ est semblable au triangle ΕΓΗ et le triangle ΖΘΚ est semblable au triangle ΕΓΔ, de sorte que l'angle ΘΖΚ, c'est-à-dire l'angle ω, est égal à l'angle ΓΕΔ.

La construction sera la suivante.

Soit une hyperbole donnée ΑΓ, d'axe ΑΒ et de centre Ε ; soit un angle aigu donné ω ; que le rapport donné du côté transverse au côté droit soit identique à celui de ΧΨ à ΧΦ ; que ΨΦ soit coupée en deux parties égales en un point Υ ; que soit placée sur la figure une droite donnée ΖΘ ; que, sur cette droite, soit décrit un segment de cercle, soit ΖΚΘ, plus grand qu'un demi-cercle et capable d'un angle égal à l'angle ω ; que soit pris le centre Ν du cercle ; que, de Ν, soit menée à ΖΘ une perpendiculaire ΝΟ ;

[379] On compte seulement quatre occurrences du verbe ἐκκείσθω dans le traité, et toutes dans les *problèmes* du Livre II.

[380] *Éléments*, III.31.

εἰς τὸν τῆς ΥΦ πρὸς ΦΧ λόγον κατὰ τὸ Π, καὶ διὰ τοῦ Π τῇ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΛ ἐπὶ τὴν ΖΘ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛΚ ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΝΞ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΖΘ.

Καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΝΠ πρὸς ΠΟ, τουτέστιν ἡ ΥΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΞΚ πρὸς ΚΛ. Καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ ΨΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· συνθέντι, ὡς ἡ ΦΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· ὡς ἄρα ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΤ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΛ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ· καί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Α, Λ γωνίαι ὀρθαί· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῆς Ε.

Συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΛΖΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΓ τῇ τομῇ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Γ. Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, κάθετος δὲ ἡ ΓΗ· ἔσται δὴ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ · καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΕΓΗ τριγώνῳ καὶ τὸ ΚΘΛ τῷ ΓΗΔ καὶ τὸ ΚΖΘ τῷ ΓΕΔ, ὥστε ἡ ὑπὸ ΕΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΚΘ, τουτέστι τῇ Ω.

2 ΚΛ Ψ : ΚΑ V ‖ 9 ΜΛΚ Ψ : ΜΑΚ V ‖ 12-13 καὶ ὡς — ὀρθίαν c v Ψ : iter. V (sed iterationem punctis del.) ‖ 18 ΖΛ Ψ : ΖΔ V ‖ 25-26 ὑπὸ ΖΛΘ Canon. : ΥΖΛΘ V ‖ 28 ΖΚΘ Mont. : ΖΘΚ V.

que ΝΟ soit coupée en un point Π dans le rapport de ΥΦ à ΦΧ ; que, par Π, soit menée une parallèle ΠΚ à ΖΘ, et que, de Κ, soit menée une perpendiculaire ΚΛ au prolongement de ΖΘ ; que soit menées des droites de jonction ΖΚ et ΚΘ ; que ΛΚ soit prolongée jusqu'en un point Μ, et que, de Ν, soit menée une perpendiculaire ΝΞ à ce prolongement ; elle est donc parallèle à ΖΘ[381].

En vertu de quoi, ΞΚ est à ΚΛ comme ΝΠ est à ΠΟ, c'est-à-dire comme ΥΦ est à ΦΧ. *Par duplication des antécédents*, ΜΚ est à ΚΛ comme ΨΦ est à ΦΧ ; *par composition*, ΜΛ est à ΛΚ comme ΨΧ est à ΧΦ ; mais le rectangle ΜΛ,ΛΚ est au carré sur ΛΚ comme ΜΛ est à ΛΚ ; le rectangle ΜΛ,ΛΚ est donc au carré sur ΛΚ, c'est-à-dire le rectangle ΖΛ,ΛΘ est au carré sur ΛΚ, comme ΨΧ est à ΧΦ ; mais le côté transverse est au côté droit comme ΨΧ est à ΧΦ ; le côté transverse est donc aussi au côté droit comme le rectangle ΖΛ,ΛΘ est au carré sur ΛΚ.

Que soit menée de Α une perpendiculaire ΑΤ à ΑΒ.

Dès lors, puisque le côté transverse est au côté droit comme le carré sur ΕΑ est à celui sur ΑΤ[382], que le rectangle ΖΛ,ΛΘ est aussi au carré sur ΛΚ comme le côté transverse est au côté droit, et que le carré sur ΖΛ a, avec celui de ΛΚ, un rapport plus grand que le rectangle ΖΛ,ΛΘ avec le carré sur ΛΚ, alors le carré sur ΖΛ a aussi, avec celui sur ΛΚ, un rapport plus grand que le carré sur ΕΑ avec celui sur ΑΤ ; d'autre part, les angles en Α et en Λ sont droits ; l'angle Ζ est donc plus petit que l'angle Ε[383].

Que soit donc construit un angle ΑΕΓ égal à l'angle ΛΖΚ ; ΕΓ rencontrera donc la section[384] ; qu'elle la rencontre en un point Γ. Que soient menées de Γ une tangente ΓΔ[385] ainsi qu'une perpendiculaire ΓΗ ; le rectangle ΕΗ,ΗΔ sera alors au carré sur ΓΗ comme le côté transverse est au côté droit[386] ; le rectangle ΕΗ,ΗΔ est donc aussi au carré sur ΗΓ comme le rectangle ΖΛ,ΛΘ est au carré sur ΛΚ ; le triangle ΚΖΛ est donc semblable au triangle ΕΓΗ, le triangle ΚΘΛ l'est au triangle ΓΗΔ[387] et le triangle ΚΖΘ l'est au triangle ΓΕΔ, de sorte que l'angle ΕΓΔ est égal à l'angle ΖΚΘ, c'est-à-dire à l'angle ω.

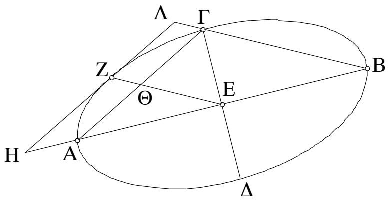
[381] *Éléments*, I.27.
[382] Prop. 1.
[383] Voir Note complémentaire [46].
[384] Prop. 2.
[385] Prop. 49.
[386] I.37.
[387] Voir Note complémentaire [49].

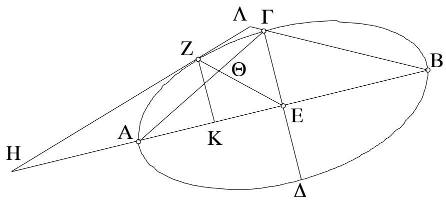
Ἐὰν δὲ ὁ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγος ἴσου ᾖ πρὸς ἴσον, ἡ ΚΛ ἐφάπτεται τοῦ ΖΚΘ κύκλου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη παράλληλος ἔσται τῇ ΖΘ καὶ αὐτὴ ποιήσει τὸ πρόβλημα.

– νβʹ – Ἐὰν ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψαύῃ, ἣν ποιεῖ γωνίαν πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ, οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

Ἔστω ἔλλειψις ἧς ἄξονες μὲν οἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, μείζων δὲ ἔστω τῶν ἀξόνων ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΗΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ΖΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Λ.

Λέγω ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΓΑ.





Ἡ γὰρ ΖΕ τῇ ΛΒ ἤτοι παράλληλός ἐστιν ἢ οὔ.

Ἔστω πρότερον παράλληλος. Καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ· καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΖΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΛΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΓΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῇ ὑπὸ ΛΓΘ. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ τῆς ΕΓ, ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΑ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΛΖΕ. Καὶ διὰ τοῦτο ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ.

1 ἴσου Halley : ἴσος V ‖ 5 νβʹ edd. : ξγʹ V (sed litt. om.) ‖ τῇ Ψ : τὴν V ‖ 8 μείζων Ψ : μεῖζον V ‖ 19 ΛΓΑ Ψ : ΛΓΔ V ‖ 20 ΗΖΕ Ψ : ΖΗΕ V.

Si le rapport du côté transverse au côté droit est un rapport d'égal à égal, ΚΛ est tangente au cercle ΖΚΘ[388], et la droite de jonction menée du centre jusqu'au point Κ sera parallèle à ΖΘ et résoudra le problème[389].

– 52 [63 V] – *Si une droite est tangente à une ellipse, l'angle qu'elle fait avec le diamètre mené par le point de contact n'est pas plus petit que l'angle adjacent à l'angle compris par les droites brisées au milieu de la section.*

Soit une ellipse, d'axes ΑΒ et ΓΔ et de centre Ε ; que le plus grand des axes soit ΑΒ ; soit une tangente ΗΖΛ à la section ; que soient menées des droites de jonction ΑΓ, ΓΒ et ΖΕ, et que ΒΓ soit prolongée jusqu'en un point Λ.

Je dis que l'angle ΛΖΕ n'est pas plus petit que l'angle ΛΓΑ.

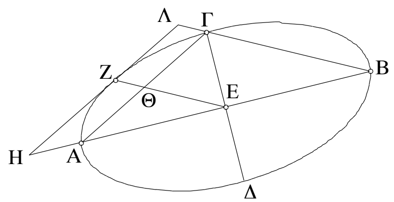


Fig. 52.1[390]

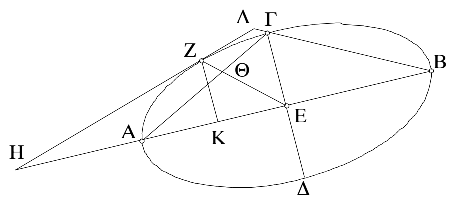


Fig. 52.2

La droite ΖΕ est parallèle ou non à la droite ΛΒ.

Qu'elle lui soit d'abord parallèle. ΑΕ est égale à ΕΒ ; ΑΘ est donc aussi égale à ΘΓ[391] ; d'autre part, ΖΕ est un diamètre ; la tangente en Ζ est donc parallèle à ΑΓ[392] ; or ΖΕ est aussi parallèle à ΛΒ ; le quadrilatère ΖΘΓΛ est donc un parallélogramme ; en vertu de quoi, l'angle ΛΖΘ est égal à l'angle ΛΓΘ. Puisque chacune des deux droites ΑΕ et ΕΒ est plus grande que ΕΓ, l'angle ΑΓΒ est obtus ; l'angle ΛΓΑ est donc aigu, de sorte que l'angle ΛΖΕ l'est aussi ; en vertu de quoi, l'angle ΗΖΕ est obtus.

[388] *Éléments*, III.16.

[389] Voir Note complémentaire [50].

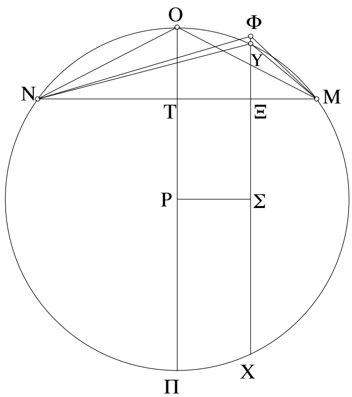
[390] Je reproduis ici la figure que les éditeurs des *Coniques* ont ajoutée au traité, depuis Memmo (déjà dans le *Bodl. Canon*. 106). Le cas où ΖΕ et ΛΒ sont parallèles n'est pas représenté dans **V**.

[391] *Éléments*, VI.2.

[392] Prop. 6.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΖ τῇ ΛΒ παράλληλος, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΖΚ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΒΕ τῇ ὑπὸ ΖΕΑ· ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Κ ἐστιν ἴση· οὐκ ἄρα ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕΒ τρίγωνον τῷ ΖΕΚ· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, <τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ,> τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· <οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ·> οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ.

Ἐκκείσθω κύκλου τμῆμα τὸ ΜΥΝ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ἀμβλεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἔλασσον ἄρα ἡμικυκλίου τμῆμά ἐστι τὸ ΜΥΝ. Πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΥΞΧ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΥ, ΥΜ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΟΤΠ· διάμετρος ἄρα ἐστίν. Ἔστω κέντρον τὸ Ρ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ κάθετος ἡ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΝ, ΟΜ.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΜΟΝ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ δίχα τέτμηται ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΜΝ κατὰ τὰ Ε, Τ, καὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Ε, Τ

5-6 tert.τὸ — ΒΕ [ΕΒ Halley] πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ edd. (jam Comm.) : om. V ‖ 7-8 οὐκ — ΚΖ [ante τὸ ἀπὸ ΚΕ add. οὕτω Halley] edd. (jam Comm.) : om. V ‖ 9 τῇ e corr. V^1 ‖ 11 πεποιήσθω c Ψ : πεποιείσθω V ‖ 12 ΥΞΧ Ψ : ΞΥΧ V ‖ 13 ΟΤΠ Ψ : ΤΟΠ V.

Que EZ ne soit pas parallèle à ΛB, et que soit menée une perpendiculaire ZK ; l'angle ΛBE n'est donc pas égal à l'angle ZEA ; or l'angle droit en E est égal à l'angle droit en K ; le triangle ΓEB n'est donc pas semblable au triangle ZEK[393] ; <le carré sur EK> n'est donc pas <à celui sur KZ> comme le carré sur BE est à celui sur EΓ ; mais le rectangle AE,EB est au carré sur EΓ, le côté transverse est au côté droit et le rectangle HK,KE est au carré sur KZ[394]<, comme le carré sur BE est à celui sur EΓ> ; le carré sur KE <n'est donc pas> au carré sur KZ <comme le rectangle HK,KE est au carré sur KZ> ; HK n'est donc pas égale à KE.

Que soit placé sur la figure un segment de cercle MYN capable d'un angle égal à l'angle AΓB ; or l'angle AΓB est obtus ; le segment MYN est donc plus petit qu'un demi-cercle. Qu'il soit fait en sorte que NΞ soit à ΞM comme HK est à KE ; que, de Ξ, soit menée une droite YΞX à angles droits ; que soient menées des droites de jonction NY et YM ; que la droite MN soit coupée en deux parties égales en un point T, et que soit menée une droite OTΠ à angles droits ; celle-ci sera un diamètre. Soit un centre P ; que, de ce centre, soit menée une perpendiculaire PΣ, et que soient menées des droites de jonction ON et OM.

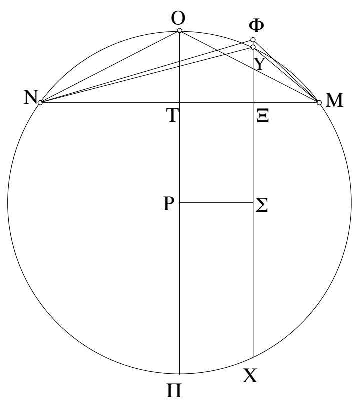


Fig. 52.3[395]

Dès lors, puisque l'angle MON est égal à l'angle AΓB, que chacune

[393] Cette conclusion a été athétisée par l'éditeur Heiberg (voir sa note, *Coniques*, I, p. 307 et ses *Prolegomena*, p. LX) ; elle est jugée fausse par Ver Eecke (*Les Coniques d'Apollonius de Perge*, p. 181, note 3). Elle figure également dans le texte arabe.

[394] I.21 et I.37.

[395] Sur les figures supplémentaires dans **V**, voir Note complémentaire [51].

γωνίαι, ὅμοια ἄρα τὰ ΟΤΝ, ΒΕΓ τρίγωνα. Ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΤΡ τῇ ΣΞ, μείζων δὲ ἡ ΡΟ τῆς ΣΥ, ἡ ΡΟ ἄρα πρὸς ΡΤ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΥΣ πρὸς ΣΞ. Καὶ ἀναστρέψαντι ἡ ΡΟ πρὸς ΟΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΣΥ πρὸς ΥΞ. Καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ἡ ἄρα ΠΟ πρὸς ΟΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΥ πρὸς ΥΞ. Καὶ διελόντι ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΥΞ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ, τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΧΞΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ.

Ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΞΥ· ἔστω πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ πρὸς ὀρθάς εἰσιν αἱ ΚΖ, ΞΦ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ, διὰ ταῦτα <ἴση> ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΦΝ· μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΜΥΝ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, τῆς ὑπὸ ΗΖΕ γωνίας, ἡ ἄρα ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ ΛΖΘ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΛΓΘ.

Οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῆς ὑπὸ ΛΓΘ.

– *νγ′* – Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ γωνίαν ποιήσει ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

4 ἔχει Ψ : om. V ‖ 6 ΟΤ Mont. : τὸ ΟΤ V ‖ 7 ΤΟ Ψ : τὸ ΤΟ V ‖ 8 ΧΞ V[1] : ΧΥ V ‖ 12 ΝΞΜ V[1] : ΝΓΜ V ‖ 14 ΜΞΝ Ψ : ΜΝΞ V ‖ 17 ΚΖ V[1] : ΚΗ ‖ 18 ΜΞΝ Ψ : ΜΝΞ V ‖ ἴση add. Heiberg ‖ 19 δὲ ego : ἄρα V ‖ 20 ΗΖΕ V[1] : ΖΕ V ‖ ἄρα ego : δὲ V ‖ 22 *νγ′* edd. : ξδ′ V (sed litt. om.) ξγ′ V[5].

des droites AB et MN est coupée en deux parties égales en des points E et T, et que les angles en E et T sont droits, alors les triangles OTN et BEΓ sont semblables. Le carré sur BE est donc à celui sur EΓ comme le carré sur TN est à celui sur TO[396].

Puisque TP est égale à ΣΞ et que PO est plus grande que ΣY[397], alors PO a, avec PT, un rapport plus grand que YΣ avec ΣΞ. *Par interversion*, PO a, avec OT, un rapport plus petit que ΣY avec YΞ. *Par duplication des antécédents*, ΠO a, avec OT, un rapport petit que XY avec YΞ. *Par division*, ΠT a, avec TO, un rapport plus petit que XΞ avec YΞ ; mais le carré sur TN est à celui sur TO, le carré sur BE est à celui sur EΓ, le côté transverse est au côté droit et le rectangle HK,KE est au carré sur KZ comme ΠT est à TO[398] ; le rectangle HK,KE a donc, avec le carré sur KZ, un rapport plus petit que XΞ avec ΞY, c'est-à-dire que le rectangle XΞ,ΞY avec le carré sur ΞY, c'est-à-dire que le rectangle NΞ,ΞM avec le carré sur ΞY[399].

Si donc nous faisons en sorte que le rectangle MΞ,ΞN soit à une autre grandeur comme le rectangle HK,KE est au carré sur KZ, le rectangle MΞ,ΞN sera mis en rapport avec une grandeur qui sera plus grande que le carré sur ΞY ; que cette grandeur soit le carré sur ΞΦ.

Dès lors, puisque NΞ est à ΞM comme HK est à KE, que les droites KZ et ΞΦ sont à angles droits et que le rectangle MΞ,ΞN est au carré sur ΞΦ comme le rectangle HK,KE est au carré sur KZ, pour ces raisons l'angle HZE est égal à l'angle MΦN ; or l'angle MYN, c'est-à-dire l'angle AΓB, est plus grand que l'angle HZE[400] ; l'angle adjacent ΛZΘ est donc plus grand que l'angle ΛΓΘ[401].

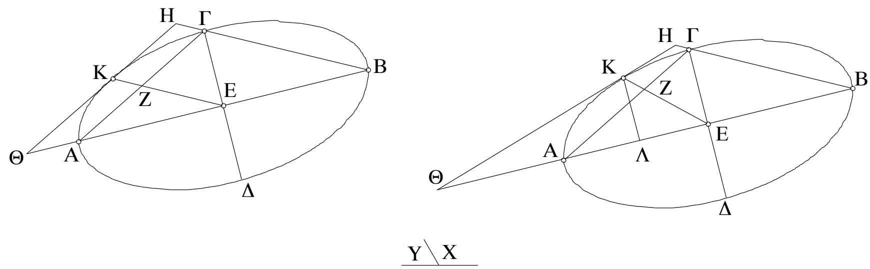
L'angle ΛZΘ n'est donc pas plus petit que l'angle ΛΓΘ.

– 53 [64 V] – *A une ellipse donnée, mener une tangente qui, avec le diamètre mené par le point de contact, fera un angle égal à un angle aigu donné.*

[396] *Éléments*, VI.4.
[397] *Éléments*, III.15.
[398] *Éléments*, VI.8 corollaire.
[399] *Éléments*, III.35.
[400] *Éléments*, I.21.
[401] Le correction des particules s'impose pour rétablir le syllogisme et redonner sa fonction à la conclusion de la proposition.

Δεῖ δὴ τὴν διδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μὴ ἐλάσσονα εἶναι τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις ἧς μείζων μὲν ἄξων ὁ ΑΒ, ἐλάσσων δὲ ὁ ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Υ οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΓΗ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς Χ.



Ἡ Υ ἄρα τῆς ὑπὸ ΑΓΗ ἢ μείζων ἐστὶν ἢ ἴση.

Ἔστω πρότερον ἴση· καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΓ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΓ· καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΚΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, τουτέστιν ἡ ΘΚΗ, παράλληλός ἐστι τῇ ΓΑ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΗΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΓΗ· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΓΖ γωνίᾳ· ἡ δὲ ὑπὸ ΗΓΖ τῇ δοθείσῃ, τουτέστι τῇ Υ, ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΕ ἄρα ἐστὶν ἴση τῇ Υ.

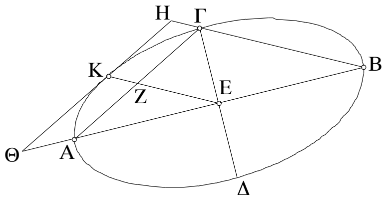
Ἔστω δὴ μείζων ἡ Υ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ἀνάπαλιν δὴ ἡ Χ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἐστίν.

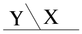
Ἐκκείσθω κύκλος, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπ’ αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ἔστω τὸ ΜΝΠ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Χ, καὶ τετμήσθω ἡ ΜΠ δίχα κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο τῇ ΜΠ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΝΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΜ, ΝΠ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΜΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΒ

6 ὥ[στε e corr. V^1 ‖ 12 τῇ ΖΓ Ψ : om. V ‖ 16 pr. ΗΓΖ V^1 : ΗΚΖ V ‖ 20-21 τὸ ΜΝΠ v^{corr} Ψ : τομὴ Π V.

Il faut que l'angle aigu donné ne soit pas plus petit que l'angle adjacent à l'angle compris par les droites se brisant au milieu de la section.

Soit une ellipse donnée, de grand axe ΑΒ, de petit axe ΓΔ et de centre Ε ; que soient menées des droites de jonction ΑΓ et ΓΒ ; soit un angle donné Υ, qui n'est pas plus petit que l'angle ΑΓΗ, de sorte aussi que l'angle ΑΓΒ n'est pas plus petit que l'angle Χ.





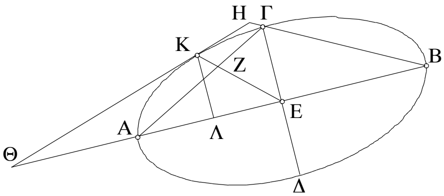


Fig. 53.1[402] Fig. 53.2

L'angle Υ est donc plus grand que l'angle ΑΓΗ ou lui est égal.

Qu'il lui soit tout d'abord égal.

Que, par Ε, soit menée une parallèle ΕΚ à ΒΓ, et que, par Κ, soit menée une tangente ΚΘ à la section[403].

Dès lors, puisque ΑΕ est égale à ΕΒ et que ΑΖ est à ΖΓ comme ΑΕ est à ΕΒ[404], ΑΖ est égale à ΖΓ ; d'autre part, ΚΕ est un diamètre ; la tangente à la section en Κ, c'est-à-dire ΘΚΗ, est donc parallèle à ΓΑ[405] ; or ΕΚ est aussi parallèle à ΗΒ ; le quadrilatère ΚΖΓΗ est donc un parallélogramme ; en vertu de quoi, l'angle ΗΚΖ est égal à l'angle ΗΓΖ ; or l'angle ΗΓΖ est égal à l'angle donné, c'est-à-dire à l'angle Υ ; l'angle ΗΚΕ est donc aussi égal à l'angle Υ.

Que, maintenant, l'angle Υ soit plus grand que l'angle ΑΓΗ ; inversement, l'angle Χ est plus petit que l'angle ΑΓΒ.

Que soit placé un cercle sur la figure ; que lui soit retranché un segment, soit ΜΝΠ, capable d'un angle égal à l'angle Χ ; que ΜΠ soit coupée en deux parties égales en un point Ο ; que, de Ο, soit menée une

[402] Ce cas de figure n'est pas représenté dans **V**, mais a été ajouté par les éditeurs du traité depuis Memmo (déjà dans le *Bodl. Canon*. 106), tout comme l'illustration des angles ∠Υ et ∠Χ.

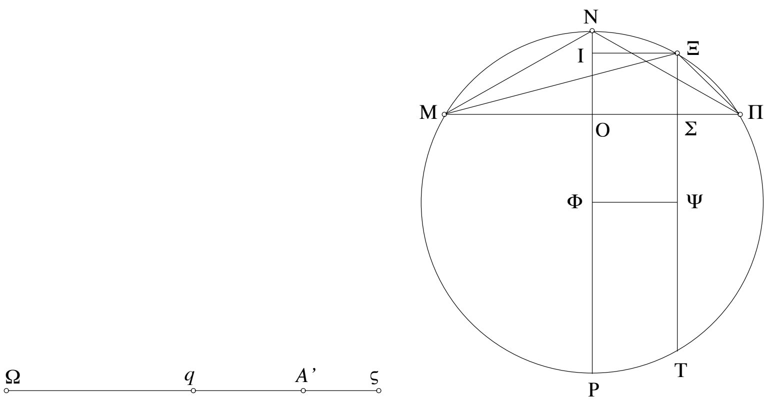
[403] Prop. 49.

[404] *Éléments*, VI.2.

[405] Prop. 6.

ἐλάσσων ἐστίν· ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ ΜΝΠ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΝΟ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΝΟ τῆς ὑπὸ ΑΓΕ· καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Ο· ἡ ἄρα ΑΕ πρὸς ΕΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΜ πρὸς ΟΝ, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΜΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΟ· ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ, τὸ δὲ ἀπὸ ΜΟ ἴσον τῷ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΝΟΡ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ.

Γενέσθω δὴ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ωΑ′ πρὸς Α′ς, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ως κατὰ τὸ ϙ.



Ἐπεὶ οὖν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ, καὶ ἡ ωΑ′ πρὸς Α′ς μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ. Καὶ συνθέντι ἡ ως πρὸς τὴν ςΑ′ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΝ πρὸς ΝΟ. Ἔστω κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Φ, ὥστε καὶ ἡ ϙς πρὸς ςΑ′ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΦΝ πρὸς ΝΟ. Καὶ διελόντι ἡ Α′ϙ πρὸς Α′ς μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΦΟ πρὸς ΟΝ.

1 ΜΝ]Ο e corr. V^1 ‖ 12 ωΑ′ Ψ : ΟΑ′ V ‖ Α′ς Ψ : Ας V ‖ 14 ὥστε c v Ψ : iter. V (in alt. κ mut. in ω V^1).

droite ΝΟΡ à angles droits avec ΜΠ, et que soient menées des droites de jonction ΝΜ et ΝΠ ; l'angle ΜΝΠ est donc plus petit que l'angle ΑΓΒ ; mais l'angle ΜΝΟ est la moitié de l'angle ΜΝΠ et l'angle ΑΓΕ est la moitié de l'angle ΑΓΒ ; l'angle ΜΝΟ est donc plus petit que l'angle ΑΓΕ ; d'autre part, les angles en Ε et Ο sont droits ; ΑΕ a donc, avec ΕΓ, un rapport plus grand que ΟΜ avec ΟΝ[406], de sorte que le carré sur ΑΕ a, avec celui sur ΕΓ, un rapport plus grand que le carré sur ΜΟ avec celui sur ΝΟ ; mais le carré sur ΑΕ est égal au rectangle ΑΕ,ΕΒ, et le carré sur ΜΟ est égal au rectangle ΜΟΠ, c'est-à-dire au rectangle ΝΟΡ[407] ; le rectangle ΑΕ,ΕΒ a donc, avec le carré sur ΕΓ, c'est-à-dire le côté transverse a, avec le côté droit[408], un rapport est plus grand que ΡΟ avec ΟΝ.

Que ΩΑ' soit à Α'ϛ comme le côté transverse est au côté droit, et que Ωϛ soit coupé en deux parties égales en un point ϙ.

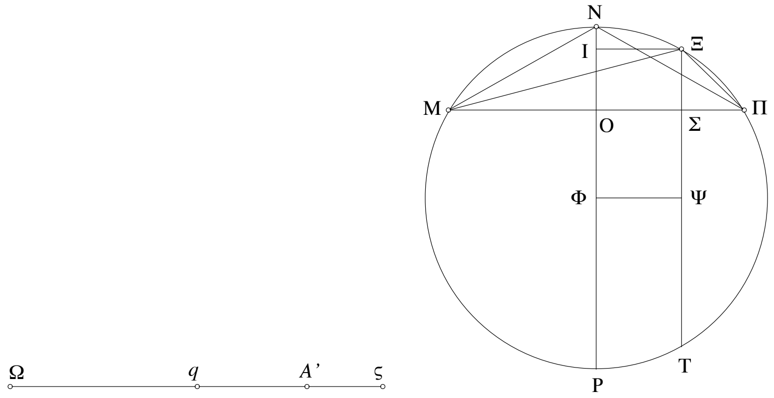


Fig. 53.3[409]

Dès lors, puisque le côté transverse a, avec le côté droit, un rapport plus grand que ΡΟ avec ΟΝ, ΩΑ' a aussi, avec Α'ϛ, un rapport plus grand que ΡΟ avec ΟΝ. *Par composition*, Ωϛ a, avec ϛΑ', un rapport plus grand que ΡΝ avec ΝΟ. Soit un centre Φ du cercle ; il en résulte que ϙϛ a, avec ϛΑ', un rapport plus grand que ΦΝ avec ΝΟ. *Par division*, Α'ϙ a, avec Α'ϛ, un rapport plus grand que ΦΟ avec ΟΝ.

[406] Voir Note complémentaire [45].
[407] *Éléments*, III.35.
[408] I.21.
[409] La droite Ωϛ n'est pas représentée dans **V**. Elle a été ajoutée par les éditeurs depuis Memmo (déjà dans le *Bodl. Canon*. 106).

Γινέσθω δὴ ὡς ἡ Α΄ϙ πρὸς Α΄ς, οὕτως ἡ ΦΟ πρὸς ἐλάττονα τῆς ΟΝ, οἷον τὴν ΙΟ, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΙΞ καὶ ἡ ΞΤ καὶ ἡ ΦΨ· ἔσται ἄρα ὡς ἡ Α΄ϙ πρὸς Α΄ς, ἡ ΦΟ πρὸς ΟΙ καὶ ἡ ΨΣ πρὸς ΣΞ. Καὶ συνθέντι, ὡς ἡ ϙς πρὸς ςΑ΄, ἡ ΨΞ πρὸς ΞΣ. Καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ Ως πρὸς ςΑ΄, ἡ ΤΞ πρὸς ΞΣ. Καὶ διελόντι, ὡς ἡ ΩΑ΄ πρὸς Α΄ς, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ.

Ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΜΞ, ΞΠ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ Ε σημείῳ τῇ ὑπὸ ΜΠΞ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΠΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΚ, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Σ ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Λ ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΣΠ τῷ ΚΕΛ τριγώνῳ· καὶ ἔστιν ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΤΣΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΣΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΕ τρίγωνον τῷ ΣΞΠ τριγώνῳ καὶ τῷ ΚΘΕ τὸ ΜΞΠ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΞΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΚΕ· ἡ δὲ ὑπὸ ΜΞΠ τῇ ὑπὸ ΜΝΠ ἐστιν ἴση, τουτέστι τῇ Χ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα τῇ Χ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΚΕ τῇ ἐφεξῆς τῇ Υ ἐστιν ἴση.

Διῆκται ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ τῇ ΚΕ γωνίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΗΚΕ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Υ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

1 Α΄ς Ψ : Ας V ‖ 3 Α΄ϙ Canon. : Α΄ς V ‖ Α΄ς Ψ : Ας V ‖ ΣΞ Ψ : ΕΞ V ‖ 4 pr. ἡ Ψ : om. V ‖ ςΑ΄ Ψ : ςΑ V (ς΄ mut. in ς V^1) ‖ 6 ΣΞ Ψ : ΣΖ V ‖ 8 pr. καὶ Ψ : om. V ‖ ΑΕΚ Ψ : ΕΑΚ V ‖ 10 τ[ῇ c v Ψ : fere evan. V ‖ 11 pr. τῷ Ψ : τὸ V ‖ Σ Ψ : Κ V ‖ ὀρθῇ Ψ : ὀρθὴ V ‖ alt. τῷ Ψ : τὸ V ‖ 13 pr. τουτέστι — ΞΣ Ψ : iter. V (sed altero loco ΤΣΖ pro ΤΣΞ) ‖ 20 ΗΚΕ c v Ψ : ΗΚΕ γωνίαν V (sed γωνίαν punctis del.).

Que ΦO soit à une droite plus petite que ON, par exemple IO, comme A'ϙ est à A'ϛ, et que soient menées des parallèles IΞ, ΞT et ΦΨ ; ΦO sera donc à OI, et ΨΣ sera à ΣΞ, comme A'ϙ est à A'ϛ. *Par composition*, ΨΞ est à ΞΣ comme ϙϛ est à ϛA'. *Par duplication des antécédents*, TΞ est à ΞΣ comme Ωϛ est à ϛA'. *Par division*, TΣ est à ΣΞ comme ΩA' est à A'ϛ, c'est-à-dire comme le côté transverse est au côté droit.

Que soient menées des droites de jonction MΞ et ΞΠ ; que, sur la droite AE et au point E, soit construit un angle AEK égal à l'angle MΠΞ ; que, par K, soit menée une tangente KΘ à la section[410], et que soit abaissée une droite KΛ de manière ordonnée.

Dès lors, puisque l'angle MΠΞ est égal à l'angle AEK et que l'angle droit en Σ est égal à l'angle droit en Λ, le triangle ΞΣΠ a les mêmes angles que le triangle KEΛ ; d'autre part, TΣ est à ΣΞ, c'est-à-dire le rectangle TΣ,ΣΞ est au carré sur ΞΣ, c'est-à-dire le rectangle MΣ,ΣΠ est au rectangle ΞΣ[411], comme le côté transverse est au côté droit ; le triangle KΛE est donc semblable au triangle ΣΞΠ, et le triangle MΞΠ au triangle KΘE ; en vertu de quoi, l'angle MΞΠ est égal à l'angle ΘKE ; or l'angle MΞΠ est égal à l'angle MNΠ, c'est-à-dire à l'angle X ; l'angle ΘKE est donc aussi égal à l'angle X ; l'angle adjacent HKE est donc aussi égal à l'angle adjacent Y.

Une tangente HΘ à la section est donc menée à la section et fait, avec le diamètre KE, mené par le point de contact, un angle HKE égal à l'angle donné Y ; ce qu'il fallait faire.

[410] Prop. 49.
[411] *Éléments*, III.35.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

(Les notes des auteurs sont suivies de leurs initiales)

[1] Cette lettre d'envoi toute personnelle donne non seulement de précieux renseignements sur la vie et les relations scientifiques d'Apollonius, mais elle est aussi un témoignage qui s'ajoute aux documents épigraphiques et papyrologiques utilisés pour déterminer la période d'activité du philosophe épicurien Philonide (voir tome 1.2, p. X-XII) ; la préface du Livre II montre que les deux chronologies, celles d'Apollonius et de Philonide sont liées. M. D-F.

[2] On trouve ici la seconde occurrence de l'emploi du participe du verbe ἄγειν au lieu du participe attendu du verbe ἐπιζευγνύναι (la première occurrence est en I.1). Dans la langue géométrique classique, on utilise, en effet, le verbe ἐπιζευγνύναι pour le tracé d'une ligne droite dont on mentionne les deux extrémités. Les exceptions à cette règle se trouvent dans le fameux *Postulat* 1 du Livre I des *Éléments* et dans les Livres II-IV du traité des *Coniques*. On relève ainsi 4 occurrences dans le Livre II (prop. 1, 29, 34, 40), 3 occurrences dans le Livre III (prop. 44, 45, 47) et 12 occurrences dans la première partie du Livre IV (prop. 1, 4, 5, 6, 8, 9, 13, 15, 17, 18, 21, 23). On doit ces observations à M. Federspiel, qui a relevé la distribution singulière du participe chez Apollonius (le participe du verbe ἄγειν figure dans la *protase* et se trouve repris, dans le cours de la proposition, par le participe du verbe ἐπιζευγνύναι) et a fait l'hypothèse de l'ancienneté d'un tel usage ; voir son étude « Notes linguistiques et critiques sur le Livre III des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. Première partie », *REG*, 115, 2002, p. 133-147. M. D-F.

[3] La « figure » (voir tome 1.2, Note complémentaire [48]) est ici désignée au moyen des droites qui comprennent le rectangle. L'expression est rare. La proposition II.4 fournit la seule autre occurrence du traité. Ailleurs, la « figure » est spécifiée par le *côté transverse* ; voir M. Federspiel, *REG*, 112, p. 412. M. D-F.

[4] La distribution du tour δεικτέον ὅτι dans le *corpus* mathématique classique, notamment dans les *Coniques*, a été étudiée par M. Federspiel dans son article « Notes linguistiques et critiques sur le Livre III des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. Seconde partie », *REG*, 121, 2008, p. 520-525. Le tour, très présent chez Archimède, où il est en simple concurrence avec λέγω ὅτι, est inexistant dans les premiers Livres des *Éléments* et quasi inexistant dans les Livres I et II des *Coniques* (trois occurrences seulement, en I.38, II.2 et 21), qui sont de manière générale très proches du modèle euclidien. Le tour est surtout présent chez Apollonius dans les propositions commençant par « les mêmes hypothèses étant faites », comme c'est le cas ici, dans la proposition 2. Sur le parallélisme linguistique entre ce tour et la clausule ὅπερ ἔδει δεῖξαι, voir M. Federspiel, *ibid*., p. 523-524. M. D-F.

[5] On a ici la première occurrence, dans les *Coniques*, de l'inversion de l'ordre habituel ὡς… οὕτως…, mais sans οὕτως. Il y en a encore une occurrence dans II.10. Les autres sont dans les propositions 18, 19, 21, 22, 23, 25, 40 du Livre III. Dans tous les cas, la structure linguistique est la même, car il s'agit d'une anaphore de la seconde partie de la protase de la proposition V.19 des *Éléments* : Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθέν, *καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον* « Si une partie retranchée est à une partie retranchée comme le tout est au tout, *le reste sera aussi au reste comme le tout est au tout*. » M. F.

[6] Deux espaces ont été ménagés dans **V** pour les figures, alors qu'un seul était nécessaire, l'espace réservé pour la figure de la proposition précédente, selon un usage bien établi (voir tome 1.2, p. XXI, note 60). Le copiste a rempli le second espace par la représentation de la figure 3, provoquant un décalage, qu'il rattrape en laissant vide l'espace réservé pour la figure au début de la proposition 5. Tout rentre dans l'ordre au début de la proposition 6. M. D-F.

[7] Dans les *Coniques*, il n'existe que deux occurrences de ce type de tour comportant κείσθω au sens figuré : ici et en II 49, p. 116, 11 ; c'est une variante du tour comportant la forme verbale δεδόσθω « que soit donné ». Ce qui est ainsi donné, c'est toujours une figure « égale », ce qui montre que le tour en question est imité de l'emploi classique de ce verbe, qui est anaphorique de l'énoncé d'*Éléments*, I.2, p. 8, 11-12 : Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι « En un point donné, *placer* une droite égale à une droite donnée ». – On trouve le même tour chez Archimède, *Sphère et cyl.*, I.2 (éd. Mugler, I, p. 13, 6) ; I.7 (*ibid.*, p. 21, 18) ; I.8 (*ibid.*, p. 24, 2) ; II.5 (*ibid.*, p. 116, 23) ; *Quadrature de la parabole,* 24 (éd. Mugler, II, p. 194,11). Pappus en présente trois occurrences dans ses lemmes aux *Coniques* (*lemmes* I.9, 11 et II.10). M.F.

[8] Je rappelle ici que la tradition grecque a conservé trois autres versions de la construction d'une hyperbole d'asymptotes données, passant par un point donné ; deux sont chez Pappus, l'autre chez Eutocius. Les deux versions de Pappus ont été étudiées par W.R. Knorr (voir, en dernier lieu, le chapitre 9 de son ouvrage, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston, 1989, p. 225-245). L'une de ces deux versions se trouve dans le Livre IV de la *Collection mathématique* (IV 41-42) ; son exposé a été différé à la fin de la première des solutions au problème de la trisection de l'angle, qui requiert la construction d'une hyperbole d'asymptotes données passant par un point donné. Si l'on met de côté les quelques différences de rédaction, on retrouve la même figure et la même démonstration que dans notre texte, avec l'*analyse* en plus. L'autre version de Pappus, qui présente elle aussi l'*analyse*, se trouve dans le Livre VII de la *Collection*, où elle constitue le *lemme* 2 au Livre V des *Coniques* (VII 274-275) ; la démonstration est bâtie sur le cas particulier de l'hyperbole équilatère. La troisième version est celle qu'Eutocius expose dans son commentaire à la proposition II.4 du traité *De la sphère et du cylindre* d'Archimède (éd. Mugler, IV, p. 113, 24-114, 17), antérieur, comme on le sait, à son édition des *Coniques* (voir tome 1.2, p. XXXIX-XL) ; elle figure à la fin de l'exposé de la solution de Dioclès, dans son traité sur les *Miroirs ardents*, au fameux problème dont Archimède avait différé la solution. L'exposé de la

construction de l'hyperbole constitue, avec la rédaction de la *synthèse*, l'un des deux compléments apportés par Eutocius à la solution exposée par Dioclès, dont la tradition arabe nous a conservé l'ouvrage (*cf. Le Livre de Dioclès sur les miroirs ardents*, prop. 7-8, éd. R. Rashed, *Les Catoptriciens grecs*, p. 119-125). La version d'Eutocius est très proche du texte édité dans les *Coniques* et permet une comparaison mot à mot (voir plus loin, note [10]).

La remarque dont Eutocius fait précéder son exposé de la construction de l'hyperbole dans son commentaire d'Archimède a créé un problème textuel. Voici le texte grec de l'avertissement d'Eutocius : Ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν δείξομεν οὕτως, ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις (éd. Mugler, p. 113, 24-26), « Nous allons montrer comment décrire par un point donné une hyperbole dans des asymptotes données, puisque le problème ne figure pas dans les *Éléments* même des *coniques* ». Le sens exact de l'adverbe αὐτόθεν dans un tel contexte est difficile à percevoir. Si on lui donne son sens local, ce qui est peut-être le plus naturel, l'adverbe peut fonctionner comme une simple variante d'une séquence ἐν αὐτοῖς τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. Ces « *Éléments des coniques* » sont le titre donné au traité d'Apollonius dans le commentaire d'Archimède (*cf. ibid*., p. 91, 2). À la suite de Commandino (*Apollonii Pergaei Conicorum libri quattuor* (1566), f. 45), on a pu penser que la proposition II.4 ne figurait pas à l'origine dans le traité des *Coniques* et représentait un ajout d'Eutocius, venu d'autres sources. Sa présence dans la traduction éditée par les Banû Mûsâ, et à la même place, ainsi que sa citation sous le même numéro par le mathématicien al-Khayyâm (voir ma discussion dans *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Pergé*…, p. 106-111) laissent penser que le *problème* appartient bien à la tradition du traité d'Apollonius.

Comment dès lors expliquer la remarque d'Eutocius ? Si l'on doit accorder quelque crédit à son avertissement, on peut risquer l'hypothèse suivante : il n'est pas impossible qu'à la fin de l'Antiquité, le *problème* ait vu sa place et son statut varier selon les éditions du traité ; d'où les précautions prises par Eutocius quand il s'est agi pour lui d'y renvoyer son lecteur et son choix final de reproduire la construction dans son commentaire. M. D-F.

[9] La périphrase δέον ἔστω, toujours précédée de καί, est une variante rare de la forme classique δεῖ δή. On la trouve six fois dans les *Coniques*, c'est-à-dire ici, en I.57 (tome 1.2, p. 198, 25), et en II.49, p. 110, 10 ; p. 112, 5 ; p. 116, 20 ; p. 118, 10. C'est un indice qui s'ajoute à beaucoup d'autres de la parenté de la proposition II.4 et des *problèmes* de la fin du Livre I et de la fin du Livre II. Archimède n'en présente aucune occurrence ; mais il y en a quatre chez Euclide, en *Éléments*, III.33, p. 142, 3 ; IX.18, p. 209, 18 ; IX.19, p. 210, 25 ; X.13, p. 22, 15. – Dans la révision de ses sources, Apollonius a omis de remplacer cette périphrase par la variante plus courante. M. F.

[10] La langue de la proposition 4 montre des spécificités qui s'apparentent aux archaïsmes rencontrés dans les autres *problèmes* des *Coniques*. On consultera à ce sujet l'article de M. Federspiel, « Les problèmes dans les Livres grecs des *Coniques* d'Apollonius de Pergè : des propositions mathématiques en quête d'auteur », *Les Études Classiques*, 76, 2008, p. 339-342. Il est intéressant de comparer, à cet égard, la version

de la construction de l'hyperbole donnée par Eutocius dans son commentaire d'Archimède et le texte édité dans le traité des *Coniques*. Si l'on met de côté les quelques omissions ou fautes de copie dans l'un ou l'autre texte, et le fait que la version du commentaire présente un nouveau *diorisme* après la *construction* et avant la *démonstration* (éd. Mugler, p. 114, 8-9), on constate sans surprise des différences de rédaction qui tiennent aux pratiques exégétiques d'Eutocius, comme la présence de la référence numérique à la proposition II.1 des *Coniques*, à la fin de la *construction* dans le commentaire d'Archimède, ou l'emploi du verbe courant πρόκειμαι (προκείσθω), qui se substitue à la périphrase δέον ἔστω (voir *supra*, note [9]), ou encore l'emploi de ἔστω, qui se substitue à la forme γεγονέτω (p. 12, 4), sans exemple dans le *corpus* mathématique classique pour exprimer une égalité entre deux figures (le carré construit sur ΓΒ et la figure rectangulaire ΔΕ, Η). Cette comparaison montre qu'Eutocius a sans doute scrupuleusement respecté le texte de sa source pour la proposition éditée dans les *Coniques*, puisqu'elle conserve davantage de particularités linguistiques.

On ajoutera à ces observations la présence insolite dans l'énoncé de l'expression ἡ καλουμένη, déjà rencontrée en I.32 et dans les *problèmes* du Livre I (prop. 52, 54, 56) ; voir tome 1.2, Note complémentaire [70]. On trouvera dans les propositions 37 et 38 la variante ἡ λεγομένη pour introduire le *diamètre droit*, un concept, qui, lui aussi, tout comme la section conique, a déjà reçu son nom depuis le début du traité ; voir M. Federspiel dans son article précité, p. 345. M. D-F.

[11] La rédaction de l'*ecthèse* n'est pas canonique. Elle ne commence pas par l'exposition de l'hyperbole elle-même, et l'expression du point Ε est définie, comme le note M. Federspiel (*REG*, 112, p. 423 et 425). Je laisse le texte en l'état. M. D-F.

[12] Heiberg précise à juste titre (*Coniques*, I, p. 209, note 1) ce qu'il faut sous-entendre pour que la perpendiculaire ΒΜ soit reconnue comme le *côté droit*. Halley introduit directement après ΒΜ (p. 20, 17) le texte ajouté en marge par Pierre de Montdoré dans le *Parisinus gr.* 2356 (sur ce manuscrit, voir tome 1.2, p. XXXV-XXXVI) : καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΘΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ (<οὕτως> Halley) ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ΒΜ ; les termes de la proportion de I.21 ont été inversés pour faire apparaître un saut du même au même. M. D-F.

[13] Contrairement à ce que l'on constate dans les textes littéraires, le syntagme réunissant les particules μὲν et οὖν a toujours le même sens dans les textes mathématiques. Il se place dans le premier terme d'une antithèse, dont le second terme est introduit par δέ (ou par δή précédé d'un impératif passif ou de λέγω). Dans cet emploi figé, les traductions qui conviennent sont les adverbes « d'abord » ou « déjà ». Dans le Livre I des *Coniques*, il en existe 7 occurrences, dont la plupart m'avaient échappé ; à ces endroits, on doit donc corriger la traduction dans le sens indiqué ici. A ma décharge, il faut dire que les instruments de travail classiques sont très insuffisants dans le cas de ce type particulier d'antithèse. Le *Dictionnaire* de Mugler est muet sur le sujet. J.B. Denniston, *The Greek Particles*, Oxford, 2e éd., 1954, ne thématise pas cet emploi de μὲν οὖν. Comme il est fréquent chez Aristote, où il est généralement fort mal traduit (οὖν ne signifie pas « donc »), l'*Index Aristotelicus* de Bonitz connaît cet emploi spécial du syntagme, mais le traitement en est si maladroit qu'il est à peu près

inutilisable ; les occurrences aristotéliciennes les plus courantes sont du type περὶ μὲν οὖν…, εἰρήσθω « voilà ce qu'il y avait *d'abord* à dire sur… », ou, comme dans les textes mathématiques : ὅτι μὲν οὖν…, δῆλον « il est *d'abord* évident que… ». Mais même un prosateur et un styliste comme Lucien connaît ce tour ; par exemple, au début de sa *Vie de Démonax*, 1-2, il mentionne successivement Sostrate et Démonax et ajoute ceci : Περὶ μὲν οὖν Σωστράτου ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ γέγραπταί μοι…, περὶ δὲ Δημώνακτος ἤδη δίκαιον λέγειν « J'ai *déjà* parlé de Sostrate dans un autre livre ; mais il est juste, maintenant, de parler de Démonax. » M. F.

[14] Eutocius fournit une variante de démonstration, relative à la seconde partie de la démonstration, (éd. Heiberg, p. 294, 8-22), où le segment ΑΘ joue un rôle, puisqu'il entre dans une relation qui permet de fixer sur le prolongement de ΑΘ un point Λ par lequel passe une parallèle ΜΞΒ à la sécante ΕΖ. Ce n'est pas le cas dans le texte qu'il édite, où la droite qui joint le point Α au point de concours Θ et son prolongement jusqu'à sa rencontre avec la parallèle ΓΗΔ au point Ξ ne servent pas directement à la démonstration (voir M. Federspiel, *REG*, 112, p. 428). M. D-F.

[15] Dans son commentaire (éd. Heiberg, p. 294,1-302,7), Eutocius reproduit pour éclairer son lecteur deux propositions qui figuraient dans « certains de ses manuscrits, mais qu'il a « supprimées comme superflues », parce qu'elles ne sont que des « différences de figures ». Ces deux propositions se rapportent au corollaire. En voici les énoncés respectifs : (1) « S'il existe d'autres asymptotes de la section que celles qu'on a dites, ces dernières s'approchent davantage de la section. » (2) « S'il existe un angle rectiligne comprenant l'hyperbole, autre que l'angle comprenant l'hyperbole, il ne sera pas plus petit que l'angle comprenant l'hyperbole. » M. D-F.

[16] Dans les textes mathématiques classiques, au début de l'*ecthèse*, on ne trouve pas d'ordinaire la particule γάρ après le verbe d'existence ἔστω (ἔστωσαν), alors qu'elle est pourtant attendue, comme dans le développement qui succède au *diorisme* (l'emploi de la particule en début de développement est un trait du grec ordinaire, qui, dans ce cas, donne à γάρ le sens d'un intensif faible) ; la particule figure, en revanche, dans le petit nombre d'*ecthèses* qui ne comportent pas la forme verbale ἔστω. Sur les explications possibles de cet état de fait, voir l'article de M. Federspiel, « Sur l'élocution de l'ecthèse dans les propositions mathématiques grecques », dans *L'Antiquité Classique*, 79, 2010, p. 109-112. Il est intéressant d'observer que, dans le traité des *Coniques*, le Livre I, qui a une langue très surveillée, ne présente pas d'occurrence de la particule après ἔστω, et que le Livre II en présente une seule, celle de notre proposition 16. Les occurrences sont, en revanche relativement nombreuses dans les Livres III (prop. 2, 3, 12, 21, 27, 29, 35, 42, 44, 50, 51) et IV (prop. 1, 9, 13, 32, 55). M. D-F.

[17] La forme de ce début d'énoncé est pour le moins insolite. Comme le fait observer M. Federspiel dans sa note relative à la proposition (*REG*, 112, p. 430-431), on attend une séquence semblable à celle de la proposition 20 : ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων τις εὐθεῖα ἐφάπτεται. D'autre part, pour que le texte soit correct, il faut un antécédent exprimé au relatif ἧς [ἔτυχε τῶν τομῶν]. J'ai rétabli le

mot μιᾶς, qui devient le complément du participe ἐπιψαύουσα. Le cas du relatif (génitif), sujet de ἔτυχε, s'explique par une attraction (elle est relativement rare en grec avec un relatif sujet) ; la même attraction a été observée avec ἔτυχε dans le Livre I (prop. I.44 et 45, tome 1.2, p. 154, 10 et p. 156, 17). Si la séquence redondante ἧς ἔτυχε τῶν τομῶν ne s'est pas surajoutée dans un deuxième temps, elle est peut-être de la même veine que la forme périphrastique qui la précède, ἀχθῇ...ἐπιψαύουσα, sans exemple avec le verbe ἐπιψαύειν dans les *Coniques*. M. D-F.

[18] La démonstration du parallélisme des droites ΕΧ et ΗΘ fait l'objet du lemme de Pappus II.2 (éd. Heiberg, p. 152, 28-153, 11). À partir de constructions équivalentes, le lemme déduit le parallélisme des deux droites de l'hypothèse correspondant à la proportion ΧΚ : ΚΕ = ΗΛ : ΛΘ, en suivant le même processus démonstratif. On retrouve ici une situation déjà vue pour le Livre I (voir ma discussion dans le tome 1.2, p. XLV-XLVII) : la question se pose à nouveau de savoir quelle signification donner à certains lemmes de Pappus, qui manifestement, au vu du texte transmis en grec comme en arabe, ne comblent pas de maillon manquant dans le raisonnement. Si le lemme 2 avait au départ cette fonction, il faudrait alors s'interroger sur le texte de la proposition 20 que lisait Pappus. M. D-F.

[19] La syntaxe du passage, avec l'accusatif παράλληλον, demande, pour cette construction, une tournure active, et donc une forme verbale à la première personne, qu'il faut restituer (sur les formes verbales à la première personne dans les mathématiques classiques et leur distribution, voir les remarques de M. Federspiel dans ses notes critiques au Livre II, *REG*, 113, p. 368). Pour corriger la forme fautive de **V** (ἀγομένην), il faut préférer l'aoriste des manuscrits de la Recension (ἀγάγωμεν), au présent ἄγωμεν, restitué par Pierre de Montdoré dans le *Parisinus gr.* 2356, et repris dans l'édition de Halley, que suit Heiberg. La forme ἀγάγωμεν, déjà rencontrée en I.8 (voir tome 1.2, Note complémentaire [39]), est relativement fréquente dans les *problèmes* de la fin du Livre. M. D-F.

[20] L'égalité des triangles ΧΓΠ et ΗΘΧ, qui correspondent respectivement aux triangles ΓΛΒ et ΕΓΔ de la proposition I.43, est admise tacitement, comme en I.50, alors qu'elle n'a pas fait l'objet d'une démonstration dans le texte des *Coniques* tel qu'il nous a été transmis. Sur cette question, voir tome 1.2, Note complémentaire [80]. M. D-F.

[21] On trouve ici la formulation explicite d'une propriété des *Éléments* (VI.15) et la reprise mot pour mot du texte euclidien. Cela s'est déjà produit dans la proposition I.41, pour *Éléments*, VI.23 (tome 1.2, p. 146, 3-4), et dans la proposition II.20, pour *Éléments*, VI.6 (p. 46, 10-11), dans la démonstration du parallélisme des droites ΕΧ et ΗΘ (voir *supra*, note [18]). Ces reprises du texte euclidien ne sont pas dans les usages du traité. M. D-F.

[22] Pappus consacre ses lemmes 3 et 4 (éd. Heiberg, p. 153, 12-154, 13) à l'établissement de ce résultat directement posé dans le texte des *Coniques* ; les deux

démonstrations s'appliquent respectivement à deux égalités substantiellement identiques à celle d'Apollonius :

$(\Theta M \times ME) + (E\Lambda \times EK) = \Lambda M \times MK$

$(\Theta N \times NE) + (E\Lambda \times \Lambda\Theta) = \Lambda M \times MK$

Le lemme d'Eutocius (éd. Heiberg, p. 302, 9-304, 20) propose deux démonstrations, dont la seconde est semblable au lemme 4 de Pappus. M. D-F.

[23] Dans les textes mathématiques grecs, et indépendamment du fait que la propriété dont il est question ici est très courante, l'expression (que je donne sous la forme la plus générale) : « les grandeurs ΑΒ et ΓΔ sont égales aux grandeurs ΕΖ et ΗΘ » ne peut prêter à confusion, car elle signifie toujours « la somme de ΑΒ et ΓΔ est égale à la somme de ΕΖ et ΗΘ ». Il s'agit d'un pluriel sommatif. Pour exprimer la distributivité, les géomètres disposaient du syntagme (généralement au féminin) ἑκατέρα ἑκατέρᾳ « chacune à chacune », complet ou abrégé. Dans son commentaire au Livre I des *Éléments* d'Euclide (éd. Friedlein, p. 235,15 et s.), Proclus signale expressément la fonction de ce syntagme. Mais, déjà chez Euclide et surtout après, ce syntagme est souvent omis. Voir mon article « Notes linguistiques et critiques sur le Livre II des Coniques d'Apollonius de Pergè. Première partie », *REG*, 112, p. 440 et s. M. F.

[24] La rédaction de ce passage appelle les observations suivantes : on engage directement, après la *protase*, la procédure apagogique, sans mise en place préalable d'une *ecthèse* et d'un *diorisme* ; c'est le passage qui introduit la procédure apagogique qui fait office d'*ecthèse*. M. D-F.

[25] La formule est impropre et la référence à la première partie de II.25, qui traite du cas des sécantes, est inadéquate, puisque les droites ΒΑ et ΑΓ sont des tangentes ; voir M. Federspiel, *REG*, 112, p. 438-439. M. D-F.

[26] Sans parler des insuffisances relevées dans la note précédente, on observe de nombreuses négligences rédactionnelles dans l'ensemble de cette explication postposée. Dans le cas de l'ellipse, la rédaction de l'impossibilité est pour le moins curieuse, avec ἐκτός ainsi construit ; on attendrait, comme le propose Heiberg : ἐκτὸς <ὄν>. Dans le cas de la parabole, on attend que l'impossibilité soit explicitement formulée, et donc la présence de <ὅπερ ἀδύνατον>. Dans le cas de l'hyperbole, on attend également l'expression du sujet et donc <ἡ τομή> après ἐστι (p. 64, l. 15) ; d'autre part, le pronom αὐτῆς (l. 15) renvoie au mot γωνίας qui précède, alors que le référent n'est pas le même, puisqu'il s'agit ici non pas de l'angle des asymptotes, mais de son sommet (voir M. Federspiel, *REG*, 112, p. 439). L'absence du sujet du verbe ἐστι, <τὸ Α>, à la ligne 14, doit être corrigée pour des raisons syntaxiques, d'autant plus que ce sujet est aussi le sujet sous-entendu des deux séquences qui suivent ; on peut supposer ici une faute de copie. M. D-F.

[27] Ici et dans l'*ecthèse*, le grec emploie le verbe πίπτειν, qui s'emploie parfois, mais rarement (voir encore II.33, *protase* et *démonstration*, et IV.4, *démonstration*), avec la préposition διά + gén. M. F.

[28] Voir la note de M. Federspiel, *REG*, 113, p. 359-360. M. D-F.

[29] On se reportera à la note que consacre M. Federspiel à cette expression (*REG*, 113, p. 360-361). On la retrouve dans les propositions 33, 42 et 49. Le tour habituel utilisé dans le traité est la variante avec ἐντὸς + gén. (*cf.* II.4). M. D-F.

[30] C'est ici la première des quatre exceptions, dans les *Coniques*, à l'usage qui ne fait pas d'un point le sujet grammatical ou réel d'un verbe d'action. Les trois autres occurrences sont en II, 46, 49, 50. Dans les textes mathématiques, les occurrences les plus nombreuses se trouvent dans les syntagmes comportant le verbe τέμνειν « couper » et l'adverbe δίχα « en deux parties égales » ; on a affaire alors à un complément d'agent avec un verbe au parfait passif ; mais, même dans ces syntagmes, le plus souvent (sauf peut-être dans la *Collection* de Pappus) le complément du verbe est un complément de lieu, du type τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον « que la droite AB soit coupée en deux parties égales au point E ». M. F.

[31] Sur le caractère canonique de l'emploi de l'article devant διάμετρος et devant le participe δοθεῖσα, voir respectivement voir tome.1.2, Note complémentaire [51], et l'article de M. Federspiel, « Sur l'opposition *défini/indéfini…* », p. 255-259. M. D-F.

[32] La proposition 44 est le premier des *problèmes* rassemblés à la fin du Livre II. Sur leur rédaction, voir *Chapitre* I, p. X-XII. La proposition 44 présente la première occurrence du tour archaïque qui sert à désigner des objets mathématiques par des lettres [εὐθεῖα] ἐφ' ἧς (τὰ) A, B, et dont M. Federspiel a retracé l'histoire (voir ses notes critiques au Livre II, *REG*, 113, p. 367) ; les autres occurrences sont en II.46 et dans la proposition III.13, qui n'est pas un *problème*. On trouve également la première occurrence du verbe τάττειν à la première personne (τάξωμεν) ; sur l'emploi de ces formes verbales à la première personne dans l'expression des opérations géométriques, et que la langue classique a tendu à éliminer, voir M. Federspiel, « Les problèmes des Livres grecs des *Coniques* d'Apollonius de Pergè. Des propositions mathématiques en quête d'auteur », p. 347-349. M. D-F.

[33] A partir de la proposition 44, les traducteurs et éditeurs, depuis Memmo, n'ont pas respecté les divisions internes du traité transmises par **V**. Ils n'ont pas accordé un numéro de proposition aux subdivisions introduites au sein des *problèmes* par la succession des *analyses* et des *synthèses*, et par l'examen des différents cas (on lira à ce sujet les remarques de l'éditeur Heiberg dans ses *Prolegomena* (*Coniques*, II, p. LXVII-LXVIII). Or on constate un accord à peu près global entre les divisions adoptées dans les deux traditions grecque et arabe. Cet accord est indirectement confirmé par le commentaire d'Eutocius jusqu'à la proposition 48. C'est dans le commentaire de cette proposition, en effet, que l'occasion nous est donnée de vérifier cette concordance : le commentaire, tel qu'il est transmis par la tradition manuscrite, est introduit par la mention εἰς τὸ ν′ (« sur la proposition 50 »).

Le choix des éditeurs depuis la Renaissance s'explique par la volonté de donner une cohérence plus perceptible à l'édition de ce *corpus* de problèmes. Il est vrai que les divisions transmises par la tradition manuscrite manquent parfois de logique : les *synthèses* ne font pas systématiquement l'objet de nouvelles propositions, comme on peut l'observer dans la proposition 49, qu'il faut opposer à cet égard aux propositions 44 et 46.

Cette relative complexité a été source d'erreurs dans l'édition des figures de la tradition grecque. Des espaces ont été réservés pour les figures relatives aux divisions supplémentaires opérées, comme on le voit dans **V**. On a ainsi un espace réservé pour les propositions 45V et 48V, qui sont les *synthèses* de nos propositions 44 et 46, ce qui n'offre pas d'intérêt en soi, puisque les figures sont les mêmes que celles des *analyses* correspondantes. En tout cas, l'existence de ces espaces a favorisé l'erreur d'un copiste antérieur à celui de **V**, puisque l'emplacement réservé pour la figure de la proposition 45V, au début de la proposition 46V, n'a pas été rempli par la figure attendue (la même figure que la prop. 44), mais par les figures de la prop. 46V. De ce fait, l'espace réservé pour les figures de la proposition 46V (au début de la prop. 47V) est resté vide, et le copiste de **V** écrit au milieu de l'emplacement (cela devait être dans son modèle) : ἐγράφη τὸ σχῆμα ἄνω (« la figure a été représentée plus haut »).

Le tableau ci-dessous résume la répartition des propositions 44V-49V (notées *44-*49 dans le tableau) et de leurs figures (= prop. 44-47 des éditeurs) :

Début *44 (= *analyse* de 44)	Début *45 (= *synthèse* de 44)	Début *46 (= prop. 45)	Début *47 (= *analyse* de 46)	Début *48 (= *synthèse* de 46)	Début *49 (= prop. 47)
Fig. 43	Fig. 44 (*analyse*)	Fig. *46 (= fig. 45)	espace réservé	Fig. *47 (= fig. 46)	Fig. *48 (= fig. 46)

M. D-F.

[34] On trouve dans **V** une seconde figure de l'hyperbole, orientée dans le même sens, et à laquelle il manque seulement le tracé des droites ΚΓ et ΚΑ. La représentation, dans la proposition transmise, de l'hyperbole dont la concavité est tournée vers la gauche, est contraire aux habitudes du traité ; de même le fait que le raisonnement soit bâti sur la figure de l'ellipse, comme on l'observe, p. 98, 17, avec la droite ΚΔ conduite jusqu'au point Β. Sur ce sujet, voir mon ouvrage, *Recherches sur les* Coniques *d'Apollonios de Pergé*…, p. 123-125). On peut supposer que, dans cette proposition, Apollonius est peu intervenu dans la révision de ses sources. M. D F.

[35] La leçon ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ,ΚΑ éditée par Halley est le texte attendu. La conjonction καὶ transmise par V (αἱ ΚΓ καὶ ΚΑ) n'est pas d'usage dans ce type de séquence ; sa présence s'explique vraisemblablement par une faute de lecture dans un manuscrit oncial. Il n'y a pas lieu de suivre la correction des manuscrits de la Recension, comme le fait Heiberg (ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ), d'autant plus que c'est donner au verbe διάγειν, qui suit, le sens relativement exceptionnel de « prolonger », sens qu'il n'a pas de toute façon dans le traité des *Coniques*. M. D-F.

[36] Le texte transmis sous-entend l'égalité des angles ΓΔΚ et ΑΔΚ, qu'il faut tirer des hypothèses précédentes (par application d'*Éléments*, I.8), à savoir l'égalité, d'une part, des côtés ΓΔ, ΔΚ du triangle ΓΔΚ et des côtés ΑΔ, ΔΚ du triangle ΑΔΚ, et l'égalité, d'autre part, de leurs bases respectives ΚΓ et ΚΑ. J'ai rétabli la ponctuation

qui convient, à savoir un point en haut après εἰσίν (p. 100, l. 2), pour mieux articuler le syllogisme. Avec une virgule après εἰσί (éd. Heiberg, *Coniques*, I, p. 270,21), et donc ἄρα (l. 1) en facteur commun, l'édition Heiberg fait de l'égalité (par construction) des bases ΚΓ et ΚΑ un résultat obtenu par l'application d'*Éléments*, I.4, ce qui est faux évidemment, puisque, pour appliquer *Éléments*, I.4, il faut l'hypothèse de l'égalité des angles au point Δ, qui est justement le point à établir. Heiberg a été trompé par Halley, qui introduit une seconde particule ἄρα après βάσις, et renvoie à *Éléments*, I.4. M. D F.

[37] Ce tour, relativement rare, entre en concurrence dans la langue classique avec κάθετος (« perpendiculaire ») et πρὸς ὀρθάς (« à angles droits »). Si, dans les *Coniques*, on excepte les occurrences où l'emploi de la séquence ὀρθὸς πρὸς (+ acc.) est commandée par la référence implicite aux *Éléments*, on ne trouve le tour que dans le *problème* II.49. Dans son article « Les problèmes dans les Livres grecs des *Coniques* d'Apollonius de Pergè : des propositions mathématiques en quête d'auteur » (p. 346-347), M. Federspiel voit ici le signe d'une rédaction antérieure non révisée par Apollonius. M. D F.

[38] Sur la possibilité de sous-entendre le verbe κείσθω, formant *hapax* dans cet emploi, au lieu de ἤχθω, voir M. Federspiel, *REG*, 113, p. 373-374. M. D-F.

[39] On suppose le point donné ou sur la section (1) ou sur l'axe (2) ou dans l'angle des asymptotes (3) ou dans l'angle adjacent (4) ou sur l'une des asymptotes (5) ou dans l'angle opposé par le sommet à l'angle des asymptotes (6). La succession des cas (4) et (5) est conforme ici à l'ordre observé dans la tradition grecque et arabe du groupe des propositions 1-23 du Livre IV pour les positions du point quelconque donné, extérieur à la section, d'où sont issues les tangentes : le traitement du cas où le point est sur une asymptote suit l'examen du cas où le point est dans l'angle adjacent à l'angle des asymptotes. Or, dans la suite de la proposition, on constate, en grec comme en arabe, une interversion dans le traitement des deux cas (on a la succession 1-2-3-5-4-6). La remarque pourrait s'arrêter là, si l'on n'observait pas dans cette présentation générale des six cas la curieuse ellipse du mot τόπῳ dans la séquence qui formule le cas 6 (ἢ ἐν τῷ μεταξὺ <τόπῳ> τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ ΖΘΕ γωνίας, *ou dans le <lieu> situé entre les droites comprenant l'angle opposé par le sommet à l'angle ΖΘΕ*, p 106, 18-108,1). Il n'y aurait pas de rupture grammaticale si la formulation du cas 6 suivait directement celle du cas 4, où le mot τόπῳ figure explicitement. L'ellipse du mot τόπῳ serait parfaitement naturelle, et l'on retrouverait l'ordre observé dans la suite de la proposition pour le traitement des trois derniers cas. Notre passage garde peut-être ici la trace d'une modification apportée après coup à l'ordre de présentation des positions du point donné par rapport aux asymptotes ; il se peut donc que, dans une première rédaction, cet ordre ait été conforme à ce que l'on observe dans la suite. M. D F.

[40] Sur cet emploi du verbe ἐπιζευγνύναι avec un seul complément de lieu, voir les remarques de M. Federspiel, *REG*, 113, p. 381. M. D-F.

[41] Sur cette manière ancienne de désigner l'angle, qui n'évite pas le recours à la figure, voir l'article précité de M. Federspiel, p. 341-342. Ce trait linguistique est commun au *problème* II.4 et au groupe des *problèmes* 44-64. On l'a déjà rencontré dans les *problèmes* 53 et 58 du Livre I. Ailleurs que dans les *problèmes*, le traité des *Coniques* n'en présente que quatre occurrences (I.5 ; II.20 ; III.45 et 47) ; c'est l'emploi de la variante ἡ ὑπὸ <τῶν> ΒΑΓ <περιεχομένη γωνία> (« l'angle compris par les droites ΒΑ, ΑΓ »), qui a été généralisé, tout comme dans le Livre I des *Éléments*. M. D F.

[42] C'est la première occurrence dans les *Coniques* de la locution δι᾽ ἴσου, qui désigne *ici* une certaine opération sur les rapports. Elle est définie en Euclide, *Éléments,* V, *déf.* 17. Sur le sens de la locution, sa traduction et la définition euclidienne, on pourra consulter mon article « Sur le sens et l'emploi de la locution δι᾽ ἴσου en mathématiques », *Le monde et les mots, Mélanges G. Aujac, Pallas*, , *Pallas*, 72, p. 171-18. M. F.

[43] Il faut restituer le syllogisme qui permet d'appliquer la propriété de *Données*, 41, et cela, conformément aux passages parallèles dans les *analyses* du cas de la parabole et de l'ellipse. Halley a eu raison d'estimer que le texte a été tronqué par un saut du même au même. M. D F.

[44] L'expression grecque transmise est ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολή « soit une hyperbole donnée », qui est très impropre au début de la synthèse. La correction s'impose sur le modèle des expressions parallèles. M. F.

[45] L'établissement de cette inégalité à partir de l'inégalité des angles ΚΘΗ et ΑΧΖ et de l'égalité des angles en Κ et Α correspond au *lemme* II.5 de Pappus (éd. Heiberg, p. 154, 14-26), qui utilise le même procédé de démonstration que notre passage, à savoir la construction de l'angle ΚΘΛ, égal à l'angle ΑΧΖ (= Pappus, angle en Ε et angle ΓΒΗ). Le lemme de Pappus ne comble manifestement pas une étape omise dans la démonstration, telle qu'elle nous est parvenue ; le problème reste posé de savoir s'il le faisait dans un état plus ancien du texte, ou s'il faut donner une autre justification à l'existence de la démonstration de Pappus. Le même lemme remplit la fonction attendue pour le deuxième cas de la proposition 53, où il trouve une nouvelle application dans la démonstration de l'inégalité des rapports ΑΕ : ΕΓ et ΟΜ : ΟΝ, directement déduite des mêmes hypothèses que celles de notre passage. M. D-F.

[46] L'établissement de l'inégalité des deux angles ΖΧΑ et ΗΜΚ à partir de l'égalité des angles en Κ et Α et de l'inégalité des rapports $\mathrm{MK}^2 : \mathrm{KH}^2$ et $\mathrm{XA}^2 : \mathrm{AZ}^2$, correspond au *lemme* II. 6 de Pappus (éd. Heiberg, p. 154, 27-155, 12). Le lemme a recours exactement au même procédé de démonstration que dans notre passage, à savoir la construction d'un triangle semblable au triangle ΗΜΚ. Le lemme trouve une nouvelle application dans la *synthèse* du cas de l'hyperbole de la proposition 51, où il remplit la fonction attendue : il donne, en effet, le moyen de démontrer l'inégalité des angles Ζ et Ε, directement déduite des mêmes hypothèses que celles de notre texte. M. D-F.

[47] Cette incise est un moyen commode de traduire un emploi de l'imparfait fréquent dans la langue scientifique ou philosophique grecque ; on parle même, fort improprement (puisqu'on le trouve en mathématiques), d'« imparfait philosophique ». M. F.

[48] Pappus, dans ses *lemmes* 7 et 8 (éd. Heiberg, p. 155, 13-156, 22), obtient la similitude des deux triangles par l'intermédiaire de deux autres procédés de démonstration, dont l'un a recours au rapport composé, et l'autre à l'introduction de deux nouvelles grandeurs. M. D-F.

[49] Dans la marge inférieure du folio 89v de **V**, on trouve des schémas qui illustrent l'égalité de $\mathrm{EH} \times \mathrm{H\Delta} : \mathrm{H\Gamma}^2 = \mathrm{Z\Lambda} \times \mathrm{\Lambda\Theta} : \mathrm{K\Lambda}^2$ et restituent les proportions qu'il faut en tirer pour établir la similitude des triangles ΕΓΗ et ΚΖΛ et celle des triangles ΓΗΔ et ΚΘΛ. Les manuscrits **c** et **v** ainsi que le *Marcianus gr*. 518 permettent de retrouver les quatre droites disparues de **V**, qui illustrent la proportion ΗΔ : ΗΓ = ΛΘ : ΚΛ. M. D-F.

[50] Le cas de l'égalité du *côté transverse* et du *côté droit*, qui voit les points Π et Ν confondus, est illustré par une figure dans **V**, à droite de la figure de la proposition (fol. 90r). Elle était accompagnée en marge par la mention suivante du copiste, que le manuscrit **c** permet de restituer : ἐπὶ ἰσότητος δύο πλευρῶν. Le copiste reproduit encore deux autres figures supplémentaires, destinées à illustrer respectivement le cas où le *côté droit* est plus grand que le *côté transverse* (Π est au-dessus de Ν), et le cas inverse, avec Π est au-dessous de Ν. La première est dessinée dans la marge inférieure du folio 90r, accompagnée de la mention de la main du copiste ὅταν ᾖ μείζων ἡ ὀρθία πλευρά ; la seconde, sans mention, figure dans la marge inférieure du folio 88v (elle double de ce fait la figure de la proposition). Ce sont de toute évidence des compléments érudits, qui ne sont sans doute pas très anciens dans la tradition, ne serait-ce que parce qu'ils n'ont pas investi les espaces réglés dédiés aux figures. M. D-F.

[51] Dans la marge inférieure du f. 90v de **V**, on trouve, de la main du copiste, deux figures qui correspondent aux figures 52.2 et 52.3 et illustrent le cas où ΑΒ est le petit axe. Il s'agit, comme dans la proposition précédente, de compléments érudits, dus sans doute au même lecteur du traité. M. D-F.

TEXTE ET TRADUCTION

Troisième livre des *Coniques* d'Apollonius de Perge

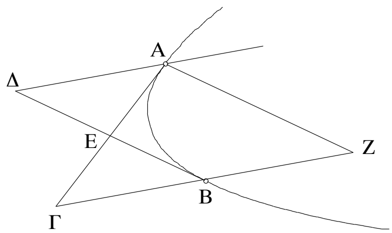
ἈΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ ΚΩΝΙΚΩΝ

ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ

– α′ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα κατὰ κορυφὴν τρίγωνα.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθωσαν ἥ τε ΑΓ καὶ ἡ ΒΔ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΒ, ΔΑ συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις κατὰ τὰ Γ, Δ.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΔ ἡ ΑΖ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται· ἔσται δὴ ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς ἴσον τὸ ΑΔΒΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΓΖ τριγώνῳ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΑΕΒΖ λοιπὸν τὸ ΑΔΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ.

Titulum non habet V || 1 α′ V^5 : om. V || 11 ΑΔΒΖ Mont. : ΑΒΔΖ V.

APOLLONIUS DE PERGE
TRAITÉ DES *CONIQUES*

Livre III

– 1 – *Si des droites tangentes à une section de cône ou à une circonférence de cercle se rencontrent, et que sont menés par les points de contact des diamètres rencontrant les tangentes, les triangles obtenus et opposés par le sommet*[1] *seront égaux*[2].

Soit une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒ ; que soient menées des tangentes ΑΓ et ΒΔ à ΑΒ, se rencontrant en un point Ε, et que soient menés par Α et Β des diamètres ΓΒ et ΔΑ de la section, rencontrant les tangentes en des points Γ et Δ.

Je dis que le triangle ΑΔΕ est égal au triangle ΕΒΓ[3].

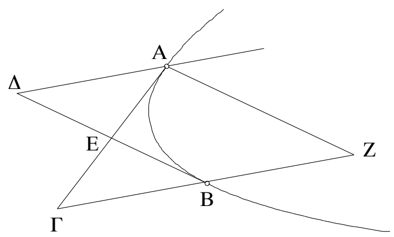


Fig. 1.1

Que soit menée de Α une parallèle ΑΖ à ΒΔ ; c'est donc une droite abaissée de manière ordonnée[4].

Dans le cas de la parabole, le parallélogramme ΑΔΒΖ sera alors égal au triangle ΑΓΖ[5], et, si le quadrilatère commun ΑΕΒΖ est retranché, le triangle restant ΑΔΕ est égal au triangle ΓΒΕ.

[1] Cette précision, qui exclut l'un des cas de l'ellipse, n'est pas conforme à la généralité demandée dans une *protase*.

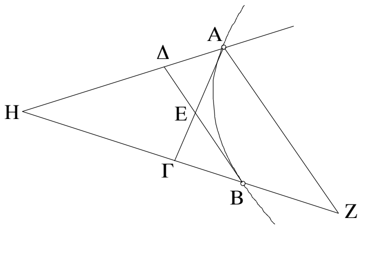
[2] Il faut sous-entendre « respectivement ». Le phénomène ne sera plus signalé dans le reste du Livre III.

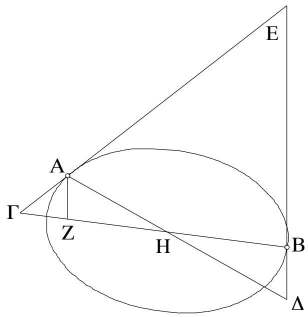
[3] Sur le témoignage indirect d'Eutocius, voir Note complémentaire [1].

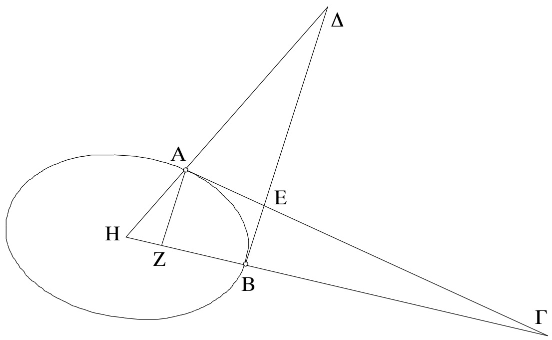
[4] I. *Premières définition*s 5.

[5] I.42.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν συμπιπτέτωσαν αἱ διάμετροι κατὰ τὸ Η κέντρον.







Ἐπεὶ οὖν κατῆκται ἡ ΑΖ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, τὸ ὑπὸ ΖΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ· ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΔΗΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ, τὸ ΑΗΖ πρὸς ΑΗΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗΖ, πρὸς τὸ ΑΗΓ, τὸ ΑΗΖ πρὸς ΔΗΒ. Ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΔΗΒ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΕΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕΒ.

5 ἀλλ᾽ ὡς V[1] : ἀλλὸ V || post ὡς fort. addendum μὲν.

Dans le cas des autres sections, que les diamètres se rencontrent au centre H.

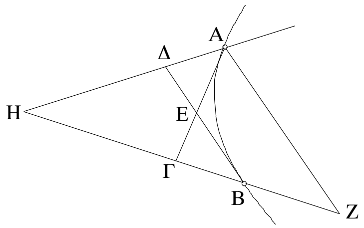


Fig. 1.2

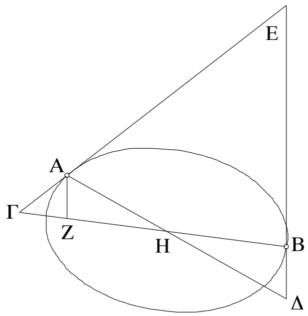


Fig. 1.3[6]

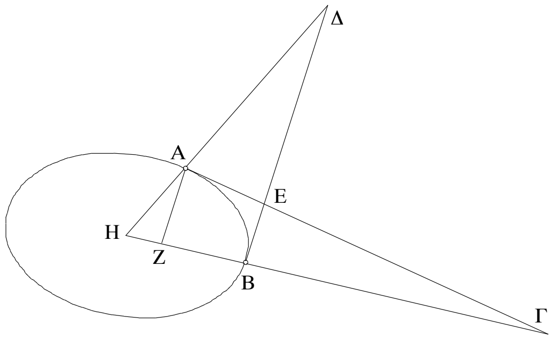


Fig. 1.4[7]

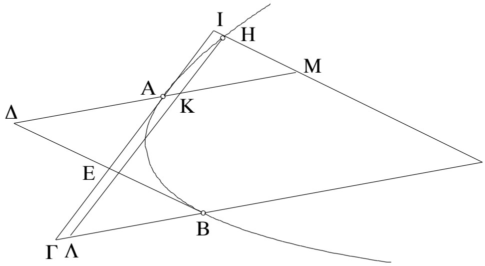
Dès lors, puisqu'est abaissée une droite AZ, et qu'est menée une tangente AΓ, le rectangle ZH,HΓ est égal au carré sur BH[8] ; BH est donc à HΓ comme ZH est à HB ; le carré sur ZH est donc à celui sur HB comme ZH est à HΓ ; mais le triangle AHZ est au triangle ΔHB comme le carré sur ZH est à celui sur HB[9], et le triangle AHZ est au triangle AHΓ comme ZH est à HΓ[10] ; le triangle AHZ est donc aussi au triangle ΔHB comme le triangle AHZ est au triangle AHΓ. Le triangle AHΓ est donc égal au triangle ΔHB[11]. Que soit retranché le quadrilatère commun ΔHΓE[12] ; le triangle restant AEΔ est donc égal au triangle ΓEB.

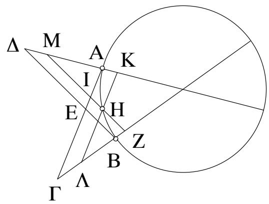
[6] Ce cas de figure est également représenté par la figure du cercle dans **V**.
[7] Eutocius ne représentait pas ce cas de figure ; voir Note complémentaire [2].
[8] I.37.
[9] *Éléments*, VI.19.
[10] *Éléments*, VI.1.
[11] Sur cette égalité, voir Note complémentaire [1].
[12] Cette rédaction ne couvre pas les cas de l'ellipse ; voir Note complémentaire [3].

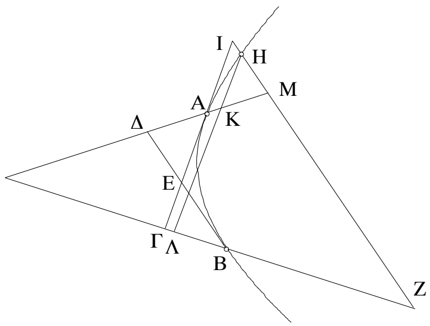
– β′ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον τετράπλευρον πρὸς τε μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

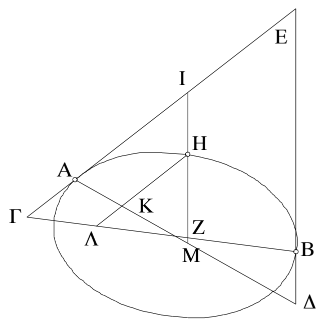
Ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΔ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΛ, ΗΜΖ.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΜ τρίγωνον τῷ ΓΛΗΙ τετραπλεύρῳ.









1 β′ V^5 : om. V.

– 2 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, sur la section ou la circonférence de cercle, est pris un certain point, et que, par ce point, sont menées des parallèles aux tangentes jusqu'aux diamètres, le quadrilatère obtenu et appliqué à l'une des tangentes et à l'un des diamètres sera égal au triangle obtenu et appliqué à la même tangente et à l'autre diamètre*[13].

Soient[14] une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒ, des tangentes ΑΕΓ et ΒΕΔ et des diamètres ΑΔ et ΒΓ ; que soit pris un certain point Η sur la section[15], et que soient menées des parallèles ΗΚΛ et ΗΜΖ[16] aux tangentes.

Je dis que le triangle ΑΙΜ est égal au quadrilatère ΓΛΗΙ.

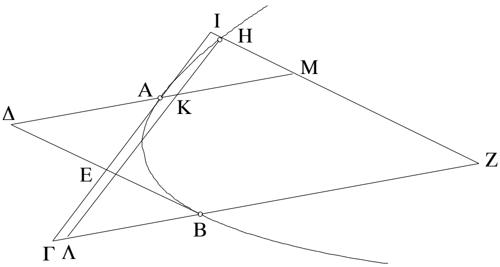


Fig. 2. 1

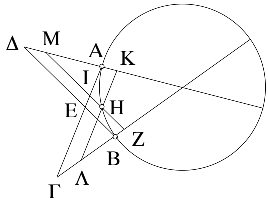


Fig. 2. 2

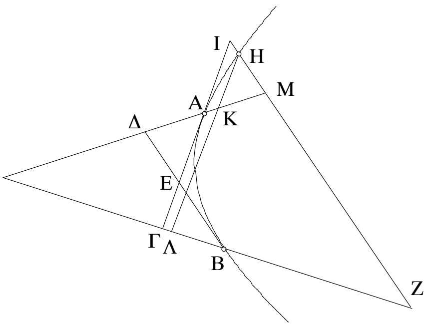


Fig. 2.3

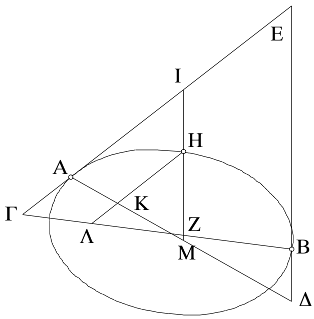


Fig. 2.4[17]

[13] Sur cette désignation des polygones, voir M. Federspiel, *REG*, 115, p. 114-118.

[14] Sur la présence de la particule γάρ dans l'*ecthèse*, voir ma Note complémentaire [16] au Livre II.

[15] Sur le témoignage d'Eutocius, voir Note complémentaire [4].

[16] L'ordre des lettres correspond aux figures de la parabole et de l'hyperbole.

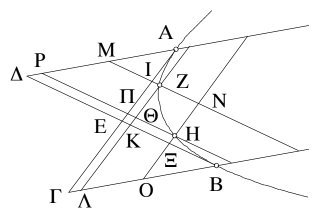
[17] On trouve aussi dans **V** deux cercles pour la représentation de ce cas de figure. À cet ensemble de six figures, s'ajoutent quatre figures inachevées (une parabole, une hyperbole et deux ellipses).

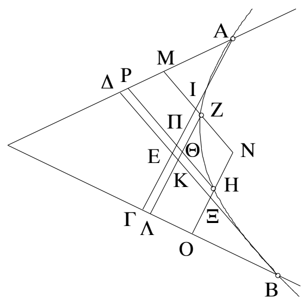
Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΛ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω ἢ ἀφῃρήσθω τὸ ΙΚ τετράπλευρον, καὶ γίνεται τὸ ΑΙΜ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ.

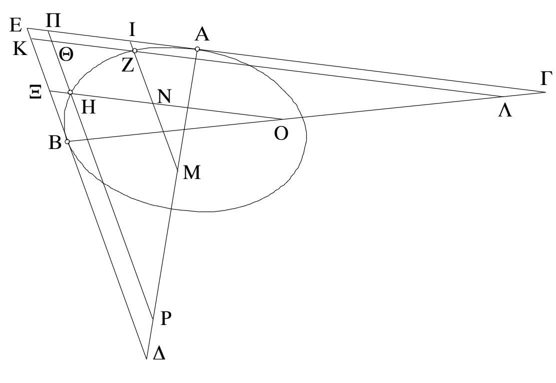
– γʹ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι᾽ αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

Ἔστω γὰρ ἡ τομὴ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ διάμετροι, ὡς προείρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν ἥ τε ΖΘΚΛ καὶ ἡ ΝΖΙΜ, διὰ δὲ τοῦ Η ἥ τε ΗΞΟ καὶ ἡ ΗΘΠΡ.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΛΗ τετράπλευρον τῷ ΜΘ, τὸ δὲ ΛΝ τῷ ΡΝ.







4 γʹ V^{5} : om. V ‖ 4-5 τοῦ κύκλου Ψ : om. V ‖ 5 δύο] βʹ V ‖ 12 ΗΘΠΡ Ψ : ΘΠΡ V.

Puisqu'on a démontré que le triangle ΗΚΜ était égal au quadrilatère ΑΛ[18], que soit ajouté ou retranché[19] le quadrilatère commun ΙΚ, et le triangle ΑΙΜ est égal au quadrilatère ΓΗ.

– 3 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, sur la section ou la circonférence de cercle, sont pris deux points, et que, par ces points, sont menées des parallèles aux tangentes jusqu'aux diamètres, les quadrilatères obtenus au moyen des droites ainsi menées et appuyés sur les diamètres seront égaux entre eux*.

Soient la section, les tangentes et les diamètres, comme on l'a dit précédemment ; que soient pris sur la section deux points quelconques Ζ et Η ; que, par Ζ, soient menées des parallèles ΖΘΚΛ et ΝΖΙΜ aux tangentes et, par Η, des parallèles ΗΞΟ et ΗΘΠΡ aux tangentes.

Je dis que le quadrilatère ΛΗ est égal au quadrilatère ΜΘ et que le quadrilatère ΛΝ est égal au quadrilatère ΡΝ.

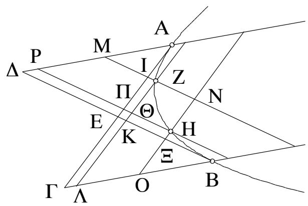


Fig. 3.1

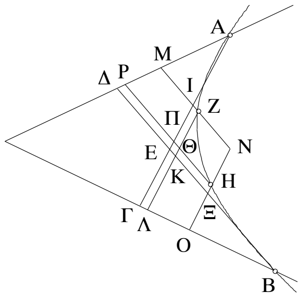


Fig. 3.2

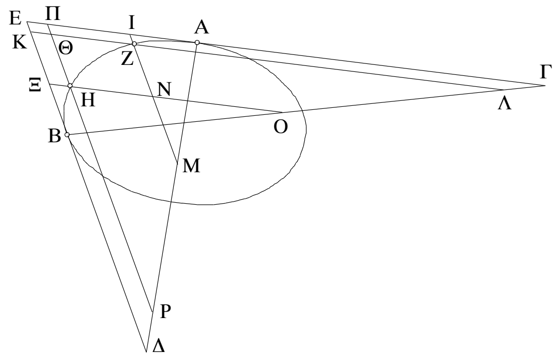


Fig. 3.3[20]

[18] I.42 (cas de la parabole) et I.43 (cas des sections centrées).

[19] Cette rédaction synthétique intègre le cas représenté par la figure 2.2 ; voir Note complémentaire [5].

[20] Ce cas de figure est également représenté par la figure du cercle dans **V**.

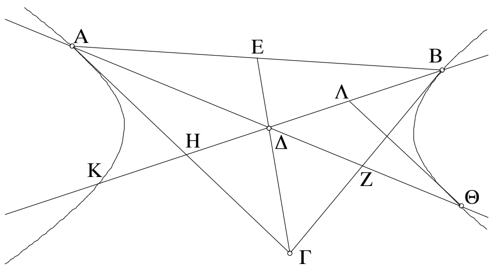
Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ ΡΠΑ τρίγωνον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΙ τῷ ΓΖ, τὸ δὲ ΑΡΠ τοῦ ΑΜΙ μεῖζόν ἐστι τῷ ΠΜ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τοῦ ΓΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΜΠ τετραπλεύρῳ· ὥστε τὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ καὶ τῷ ΠΜ, τουτέστι τῷ ΓΘ καὶ τῷ ΡΖ.

Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΜ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΛΝ τῷ ΡΝ ἴσον ἐστίν.

– δʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις τρίγωνα.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΓ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, κέντρον δὲ ἔστω τῶν τομῶν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΔΑ, ΒΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΒΔΖ, τὸ δὲ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΑΗ.

8 δʹ V^5 : om. V.

Puisqu'on a démontré plus haut[21] que le triangle ΡΠΑ était égal au quadrilatère ΓΗ et que le triangle ΑΜΙ était égal au quadrilatère ΓΖ, et puisque le triangle ΑΡΠ est plus grand que le triangle ΑΜΙ du quadrilatère ΠΜ, alors le quadrilatère ΓΗ est aussi plus grand que le quadrilatère ΓΖ du quadrilatère ΜΠ, de sorte que le quadrilatère ΓΗ est égal à la somme des quadrilatères ΓΖ et ΠΜ, c'est-à-dire des quadrilatères ΓΘ et ΡΖ.

Que soit retranché le quadrilatère commun ΓΘ ; le quadrilatère restant ΛΗ est donc égal au quadrilatère ΘΜ[22] ; le quadrilatère entier[23] ΛΝ est donc aussi égal au quadrilatère ΡΝ.

– 4 – *Si deux droites tangentes à des opposées*[24] *se rencontrent entre elles, et que sont menés par les points de contact des diamètres rencontrant les tangentes, les triangles appliqués aux tangentes*[25] *seront égaux.*

Soient des opposées Α et Β ; que les tangentes ΑΓ et ΒΓ[26] à ces sections se rencontrent en un point Γ ; soit un centre Δ des sections ; que soient menées des droites de jonction ΑΒ et ΓΔ, et que ΓΔ soit prolongée jusqu'en un point Ε[27] ; que soient menées aussi des droites de jonction ΔΑ et ΒΔ et qu'elles soient prolongées jusqu'en des points Ζ et Η.

Je dis que le triangle ΑΗΔ est égal au triangle ΒΔΖ et que le triangle ΑΓΖ est égal au triangle ΒΓΗ.

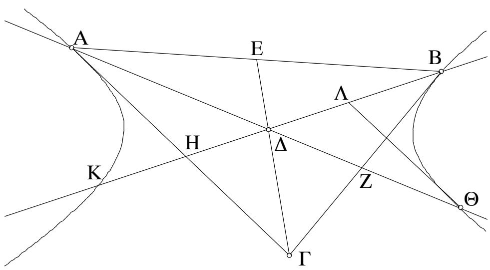


Fig. 4

Que soit menée par Θ une tangente ΘΛ à la section ; elle sera donc

[21] Prop. 2.

[22] On attend après ΘΜ une séquence κοινὸν δὲ τὸ ΘΝ (« or le quadrilatère ΘΝ est commun »), qui couvre tous les cas ; l'écriture est rapide.

[23] L'adjectif exclut le cas de l'ellipse et du cercle ; voir Note complémentaire [6].

[24] Sur les deux cas de figure possibles, voir Note complémentaire [7].

[25] L'écriture est rapide.

[26] L'expression des tangentes est fautive ; on attend ici une expression indéfinie.

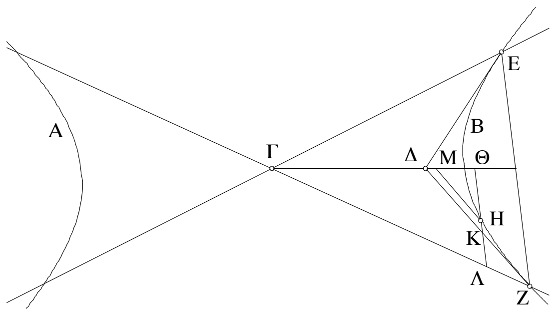
[27] Sur la rédaction du texte grec à cet endroit, voir Note complémentaire [8].

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ· ἀλλὰ τὸ ΔΘΛ τῷ ΒΔΖ ἐστιν ἴσον · καὶ τὸ ΑΗΔ ἄρα τῷ ΒΔΖ ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ ἴσον.

– εʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ ἐφ᾽ ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ διαμέτρῳ τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β ὧν κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ αἱ ΖΓ, ΕΓ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΕΖ ἡ ΘΗΚΛ, παρὰ δὲ τὴν ΔΖ ἡ ΗΜ.

Λέγω ὅτι τὸ ΗΘΜ τρίγωνον τοῦ ΚΘΔ διαφέρει τῷ ΚΛΖ.



4 εʹ V^5 : om. V ‖ 5 συμπίπτωσι c Ψ : συμπίπτουσι V.

parallèle à ΑΗ[28].

Puisque ΑΔ est égale à ΔΘ[29], le triangle ΑΗΔ sera[30] égal au triangle ΘΛΔ[31] ; mais le triangle ΔΘΛ est égal au triangle ΒΔΖ[32] ; le triangle ΑΗΔ est donc aussi égal au triangle ΒΔΖ, de sorte que le triangle ΑΓΖ est aussi égal au triangle ΒΓΗ[33].

– 5 – *Si deux droites tangentes à des opposées se rencontrent, qu'est pris un certain point sur n'importe laquelle des sections, et que, de ce point, sont menées deux parallèles, l'une à la tangente, l'autre à la droite qui joint les points de contact, le triangle obtenu au moyen de ces parallèles et appliqué au diamètre mené par le point de rencontre <des tangentes> diffère d'avec le triangle découpé*[34] *du côté du point de rencontre des tangentes du triangle découpé qui est appliqué à la tangente et au diamètre mené par le point de contact.*

Soient des opposées Α et Β, de centre Γ ; que des tangentes ΕΔ et ΔΖ se rencontrent en un point Δ ; que soient menées des droites de jonction ΕΖ et ΓΔ et que ΓΔ soit prolongée[35] ; que soient menées des droites de jonction ΖΓ et ΕΓ et qu'elles soient prolongées ; que soit pris un certain point Η sur la section ; que, par ce point, soient menées des parallèles ΘΗΚΛ et ΗΜ à ΕΖ et à ΔΖ.

Je dis que le triangle ΗΘΜ diffère d'avec le triangle ΚΘΔ du triangle ΚΛΖ.

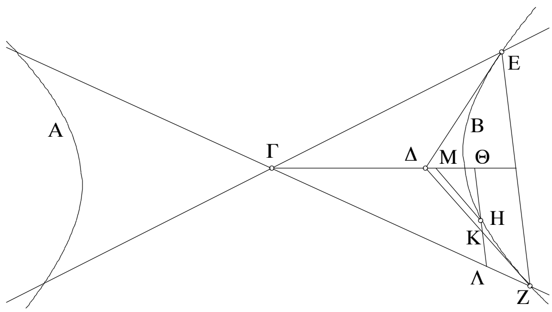
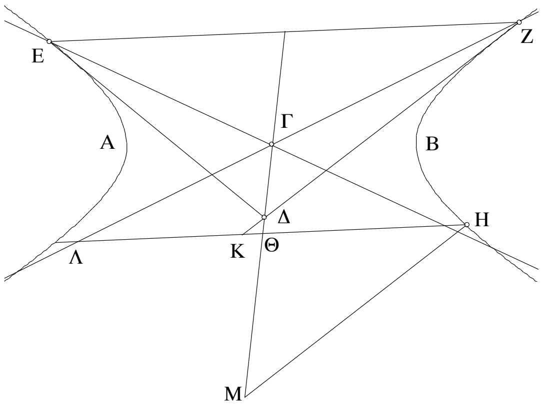


Fig. 5.1

[28] Voir I.44 et le commentaire d'Eutocius à cette proposition.
[29] I.30.
[30] Voir Note complémentaire [9].
[31] *Éléments*, VI.19.
[32] Voir Prop. 1.
[33] Voir Note complémentaire [10].
[34] Voir Note complémentaire [11].
[35] Voir Note complémentaire [8].



Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΓΔ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ ΕΖ τεταγμένως ἐπ᾽ αὐτὴν κατηγμένη, καὶ ἡ μὲν ΗΘ παρὰ τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΜΗ παρὰ τὴν ΔΖ, τὸ ἄρα ΜΗΘ τρίγωνον τοῦ ΓΛΘ τριγώνου διαφέρει τῷ ΓΔΖ· ὥστε τὸ ΜΗΘ τοῦ ΚΘΔ τριγώνου διαφέρει τῷ ΚΖΛ.

Καὶ φανερὸν ὅτι ἴσον γίνεται τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΜΗΚΔ τετραπλεύρῳ.

– ς′ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τετράπλευρον πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῇ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι ὧν διάμετροι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΗ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΜΛ, ΚΝΞ.

8 ς′ V^5 : om. V ‖ 13 τῇ Ψ : om. V ‖ 18 ΚΜΛ Ψ : ΚΛΜ V.

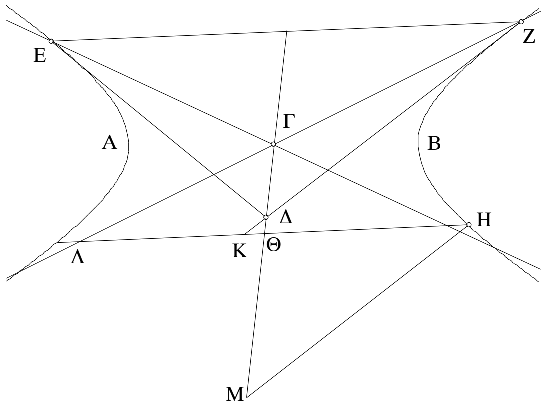


Fig. 5.2[36]

Puisqu'on a démontré que ΓΔ est un diamètre des opposées[37], que EZ est une droite abaissée sur le diamètre de manière ordonnée, et que HΘ et MH sont parallèles à EZ et à ΔZ, alors le triangle MHΘ diffère d'avec le triangle ΓΛΘ du triangle ΓΔZ[38], de sorte que le triangle MHΘ diffère d'avec le triangle KΘΔ du triangle KZΛ.

Il est évident, d'autre part, que le triangle KZΛ est égal au quadrilatère MHKΔ[39].

– 6[40] – *Les mêmes hypothèses étant faites*[41]*, si, sur l'une des deux opposées, est pris un certain point, que, de ce point, sont menées des parallèles aux tangentes et qu'elles rencontrent les tangentes et les diamètres, le quadrilatère obtenu au moyen de ces parallèles et appliqué à l'une des tangentes et à l'un des diamètres sera égal au triangle obtenu et appliqué à la même tangente et à l'autre diamètre*.

Soient des opposées, de diamètres AEΓ et BEΔ ; que soient menées

[36] Cette figure est dessinée en première position dans **V**, mais l'ordre des lettres désignatrices de la parallèle ΘHKΛ dans l'*ecthèse* correspond à la figure 5.1. Sur la figure éditée à l'origine par Eutocius, voir Note complémentaire [12].

[37] II.39 et II.38.

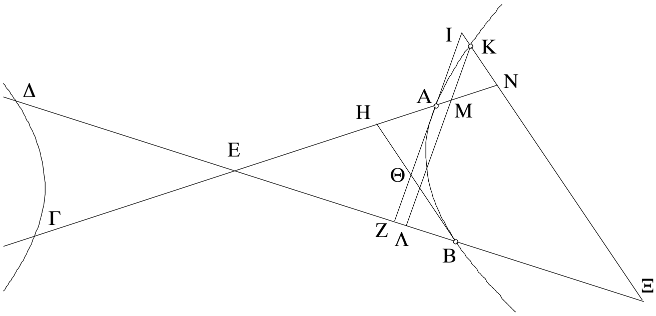
[38] I.43 (figure 5. 1) et I.45 (figure 5. 2).

[39] Voir Note complémentaire [13].

[40] Voir Note complémentaire [14].

[41] Voir Note complémentaire [15].

Λέγω ὅτι τὸ ΚΖ τετράπλευρον τῷ ΑΙΝ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.



Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἡ ΑΖ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΖ ἦκται ἡ ΚΛ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΖ τετραπλεύρῳ.

– ζʹ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεῖά τινα ληφθῇ, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ προειρημένα, καὶ εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ δι᾽ αὐτῶν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ ἤχθωσαν ἡ ΜΚΠΡΧ καὶ ἡ ΝΣΤΛΩ, παρὰ δὲ τὴν ΒΗ ἡ ΝΙΟΚΞ καὶ ἡ ΧΦΥΛΨ.

Λέγω ὅτι ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.

5 ζʹ V[5] : om. V.

des tangentes ΑΖ et ΒΗ à la section ΑΒ et qu'elles se rencontrent entre elles en un point Θ ; que, sur la section, soit pris un certain point Κ[42], et que, de ce point, soient menées des parallèles ΚΜΛ et ΚΝΞ aux tangentes.

Je dis que le quadrilatère ΚΖ est égal au triangle ΑΙΝ.

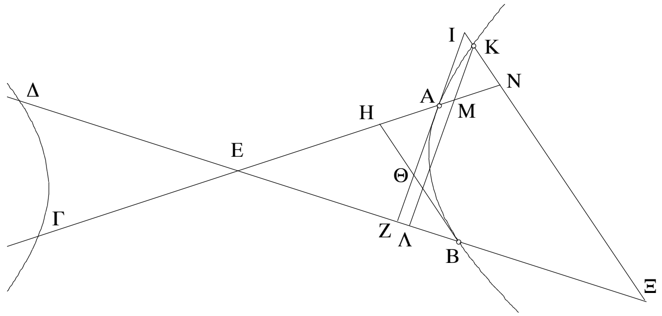


Fig. 6

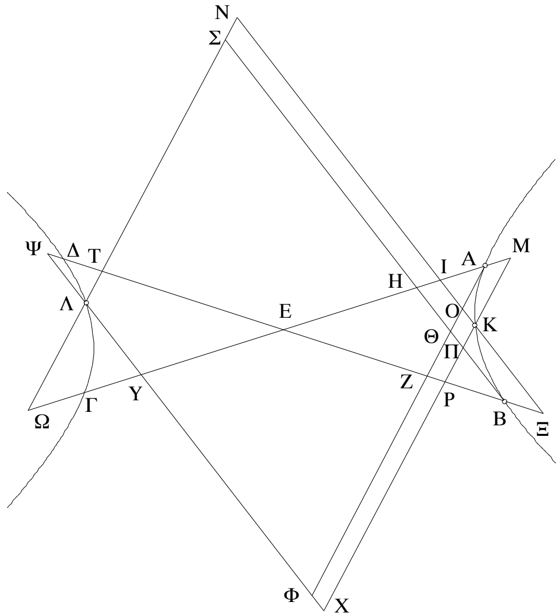
Dès lors[43], puisque l'on a des opposées ΑΒ et ΓΔ, qu'une droite ΑΖ est tangente à ΑΒ et qu'elle rencontre ΒΔ, qu'une droite ΚΛ a été menée parallèlement à ΑΖ, le triangle ΑΙΝ est égal au quadrilatère ΚΖ[44].

– 7[45] – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, sur chacune des deux sections, est pris un certain point*[46]*, que, de ces points, sont menées des parallèles aux tangentes et qu'elles rencontrent les tangentes et les diamètres, les quadrilatères obtenus au moyen des parallèles et appuyés sur les diamètres seront égaux entre eux.*

Soient les mêmes hypothèses que précédemment ; que, sur chacune des sections, soient pris des points Κ et Λ ; que, par ces points, soient menées des parallèles ΜΚΠΡΧ et ΝΣΤΛΩ à ΑΖ et des parallèles ΝΙΟΚΞ et ΧΦΥΛΨ à ΒΗ.

Je dis que l'on aura ce qu'il y a dans l'énoncé.

[42] Voir Note complémentaire [16].
[43] Voir Note complémentaire [17.
[44] Prop. 2.
[45] Voir Note complémentaire [18].
[46] Le grec emploi ici le pluriel « des points » pour des raisons de stylistique qui lui sont propres : il y a deux sections, ce qui fait deux points.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΟΙ τρίγωνον τῷ ΡΟ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΕ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΕΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΕ τετραπλεύρῳ, καὶ ἔστι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΗΕ· καὶ τὸ ΛΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΚΡΕ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΝΕ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΛ, καὶ τὸ ΚΥ τῷ ΡΛ.

– η′ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω ἀντὶ τῶν Κ, Λ τὰ Κ, Δ, καθ᾽ ἃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἤχθωσαν αἱ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΗ τετράπλευρον τῷ ΖΓ καὶ τῷ ΞΙ τὸ ΟΤ.

1 post γὰρ del. 1 litt. V ‖ 7 η′ V^5 : om. V ‖ 10 alt. τὸ c Ψ : τῷ V.

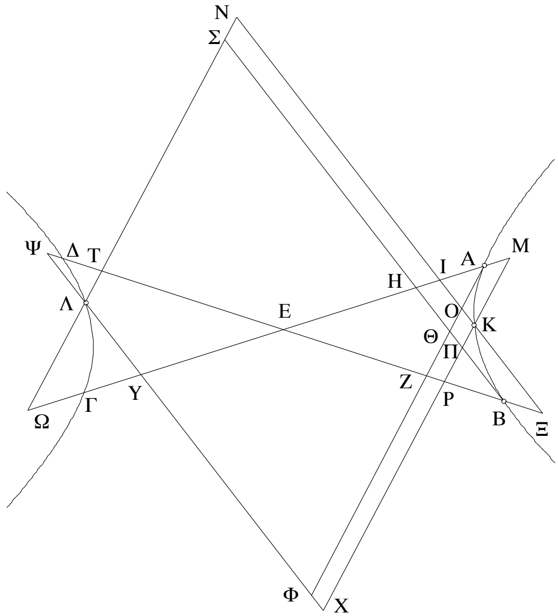


Fig. 7

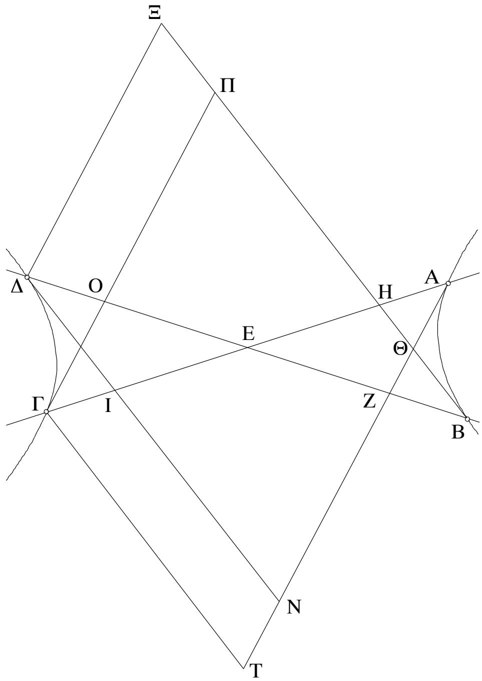
Puisque le triangle ΑΟΙ est égal au quadrilatère ΡΟ[47], que soit ajouté le quadrilatère commun ΕΟ ; le triangle entier ΑΕΖ est donc égal au quadrilatère ΚΕ ; or le triangle ΒΕΗ est aussi égal au quadrilatère ΛΕ[48], et le triangle ΑΕΖ est égal au triangle ΒΗΕ[49] ; le quadrilatère ΛΕ est donc aussi égal au quadrilatère ΙΚΡΕ. Que soit ajouté le quadrilatère commun ΝΕ[50].

Le quadrilatère entier ΤΚ est donc égal au quadrilatère ΙΛ et le quadrilatère ΚΥ est égal au quadrilatère ΡΛ.

– 8 – Les mêmes hypothèses étant faites, que, au lieu des points Κ et Λ, soient pris des points Γ et Δ où les diamètres rencontrent les sections, et que, par ces points, soient menées les parallèles aux tangentes.

Je dis que le quadrilatère ΔΗ est égal au quadrilatère ΖΓ et que le quadrilatère ΞΙ est égal au quadrilatère ΟΤ.

[47] Prop. 2.
[48] Cette égalité est admise sans démonstration ; voir Note complémentaire [19].
[49] Voir Prop. 1.
[50] Il manque la mention du quadrilatère commun ΧΕ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΘΒΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παράλληλος τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ· καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΕΒ πρὸς ΒΖ· ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας διπλῆ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ.

Καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους· ὡς ἄρα τὸ ΓΤΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΗ, τὸ ΞΒΔ πρὸς τὸ ΘΒΖ. Καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ ΑΗΘ τῷ ΘΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΤΑΓ τῷ ΔΒΞ ὧν τὸ ΑΗΘ

1 τῷ V^1 : τὸ V ‖ 9 ΔΒΞ [ΞΔΒ Ψ] Ψ : ΔΕΞ V.

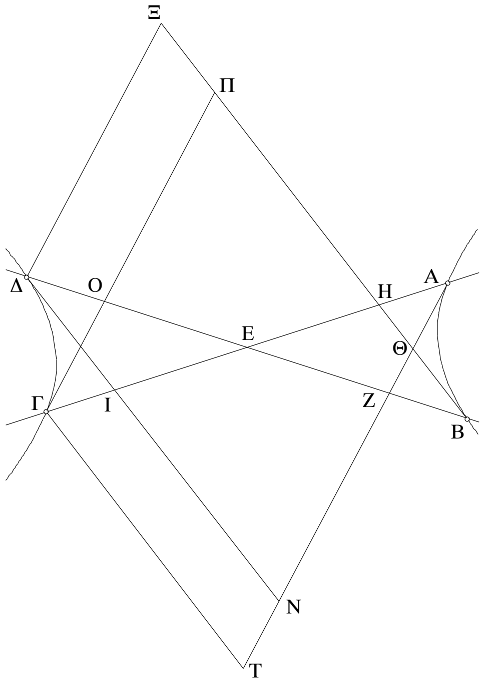


Fig. 8

Puisqu'on a démontré que le triangle ΑΗΘ était égal au triangle ΘΒΖ[51], et que la droite qui va de Α à Β était parallèle à celle qui va de Η à Ζ[52], alors, en proportion[53], ΒΕ est à ΕΖ comme ΑΕ est à ΕΗ[54] ; *par interversion*, ΕΒ est à ΒΖ comme ΕΑ est à ΑΗ ; or ΔΒ est aussi à ΒΕ comme ΓΑ est à ΑΕ, puisqu'elle sont doubles chacune de chacune[55] ; *à intervalle égal*, ΔΒ est donc à ΒΖ comme ΓΑ est à ΑΗ.

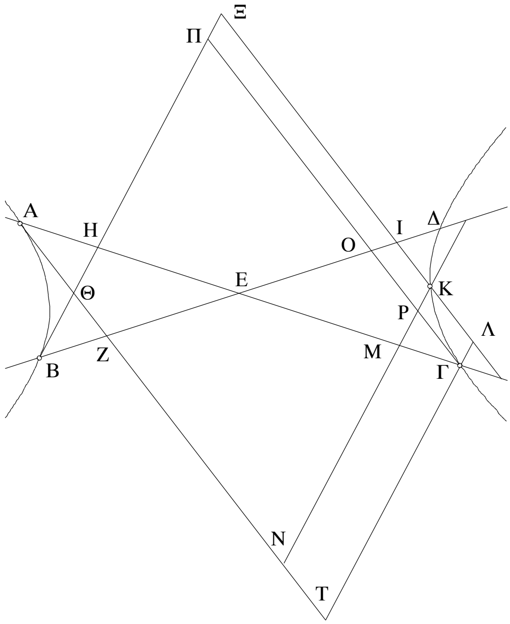
D'autre part, les triangles sont semblables en raison du parallélisme des droites ; le triangle ΞΒΔ est donc au triangle ΘΒΖ comme le triangle ΓΤΑ est au triangle ΑΘΗ[56]. Et *par permutation* ; or le triangle ΑΗΘ est égal au triangle ΘΖΒ ; le triangle ΤΑΓ est donc aussi égal au triangle ΔΒΞ ; or on

[51] Prop. 1.
[52] Voir Note complémentaire [20].
[53] Voir Note complémentaire [21].
[54] *Éléments*, VI.4.
[55] I.30.
[56] *Éléments*, VI.19.

ἴσον ἐδείχθη τῷ ΒΘΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΘ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΓΘ· ὥστε καὶ τὸ ΔΗ τῷ ΓΖ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΟ τῇ ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΟΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΔΕΙ τῷ ΒΕΗ· ἀλλὰ τὸ ΒΕΗ τῷ ΑΕΖ ἴσον· καὶ τὸ ΓΟΕ ἄρα ἴσον τῷ ΔΕΙ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΗΔ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΖΓ· ὅλον ἄρα τὸ ΞΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ΟΤ.

– θ′ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν τὸ μὲν ἕτερον τῶν σημείων μεταξὺ ᾖ τῶν διαμέτρων, οἷον τὸ Κ, τὸ δὲ ἕτερον ἑνὶ τῶν Γ, Δ ταὐτόν, οἷον τὸ Γ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι, λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ καὶ τὸ ΛΟ τῷ ΛΜ.



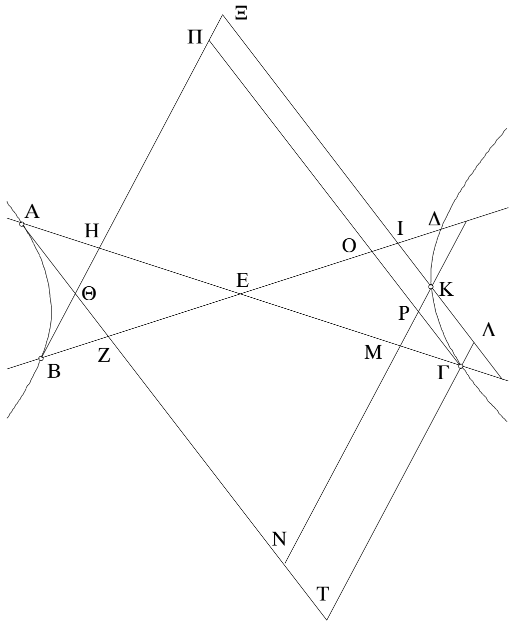
Τοῦτο δὲ φανερόν.

7 θ′ V^5 : om. V.

a démontré que le triangle ΑΗΘ[57] était égal au triangle ΒΘΖ ; le quadrilatère restant ΔΘ est donc égal au quadrilatère ΓΘ, de sorte que le quadrilatère ΔΗ est aussi égal au quadrilatère ΓΖ.

D'autre part, puisque ΓΟ est parallèle à ΑΖ, le triangle ΓΟΕ est égal au triangle ΑΕΖ. Pareillement aussi, le triangle ΔΕΙ est égal au triangle ΒΕΗ ; mais le triangle ΒΕΗ est égal au triangle ΑΕΖ[58] ; le triangle ΓΟΕ est donc aussi égal au triangle ΔΕΙ ; or le quadrilatère ΗΔ est aussi égal au quadrilatère ΖΓ ; le quadrilatère entier ΞΙ est donc égal au quadrilatère ΟΤ.

– 9 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si l'un des points, par exemple Κ, est entre les diamètres, que l'autre est identique à l'un des points Γ ou Δ, par exemple à Γ, et que sont menées les parallèles, je dis que le triangle ΓΕΟ est égal au quadrilatère ΚΕ et que le quadrilatère ΛΟ est égal au quadrilatère ΛΜ.*



Prop. 9

Voilà qui est évident.

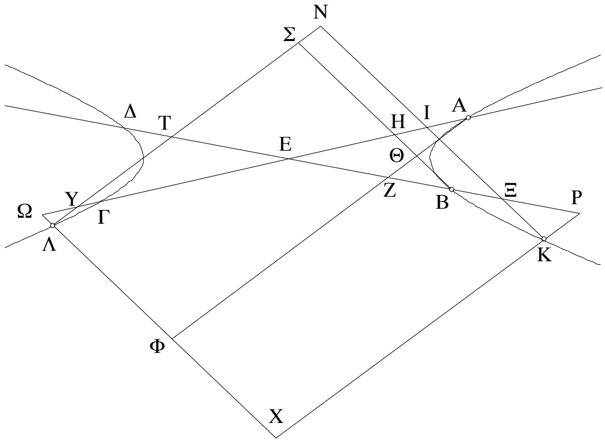
[57] Il faut sous-entendre « qui est une partie du triangle ΤΑΓ » ; de même, plus loin, après ΒΘΖ, il faut sous-entendre « qui est une partie du triangle ΔΒΞ ».

[58] Voir Prop. 1.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ, τὸ δὲ ΑΕΖ ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΓΕΟ ἄρα ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ· ὥστε καὶ τὸ ΓΡΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΟ, καὶ τὸ ΚΓ ἴσον τῷ ΛΟ.

– ι′ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τὰ Κ, Λ σημεῖα μὴ καθ’ ἅ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς.

Δεικτέον δὴ ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΤΡΧ τετράπλευρον τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι εἰσιν αἱ ΑΕ, ΒΕ, καὶ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰσὶν αἱ ΛΤ, ΚΙ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΤΥΕ τρίγωνον τοῦ ΥΩΛ τῷ ΕΖΑ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ΒΕΗ.

Ἴσον δὲ τὸ ΑΕΖ τῷ ΒΕΗ· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέχει τό τε ΤΕΥ τοῦ ΥΩΛ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ. Τὸ ΤΥΕ ἄρα μετὰ τοῦ ΞΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΕΙ μετὰ τοῦ ΥΩΛ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΞΕΥΛΧ.

5 ι′ V[5] : om. V || ἅ Federspiel[5] : ὃ V || 11 Υ]Ω[Λ e corr. V[1] || 13 τῷ αὐτῷ V[1] : τὸ αὐτὸ V || 15 ΚΞΕΥΛΧ Canon. : ΚΞΕΥΧ V.

Puisqu'il a été démontré que le triangles ΓΕΟ était égal au triangle ΑΕΖ[59], et que le triangle ΑΕΖ est égal au quadrilatère ΚΕ[60], alors le triangle ΓΕΟ est aussi égal au quadrilatère ΚΕ, de sorte que le triangle ΓΡΜ est égal au quadrilatère ΚΟ, et que le quadrilatère ΚΓ est égal au quadrilatère ΛΟ.

– 10 – Les mêmes hypothèses étant faites, que les points Κ et Λ ne soient pas pris comme les points où les diamètres rencontrent les sections[61].

Il faut démontrer que le quadrilatère ΛΤΡΧ est égal au quadrilatère ΩΧΚΙ.

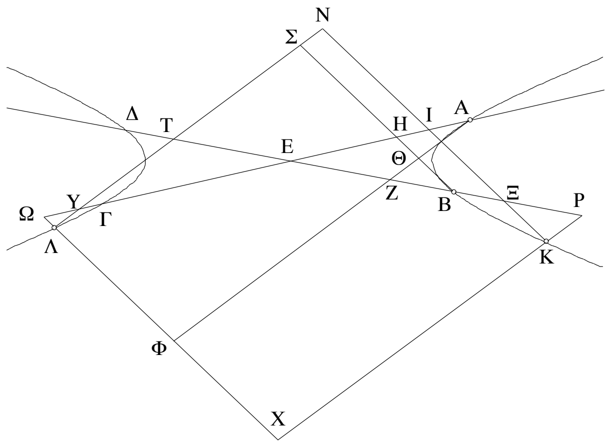


Fig. 10

Puisque ΑΖ et ΒΗ sont tangentes, que ΑΕ et ΒΕ sont les diamètres passant par les points de contact, et que ΛΤ et ΚΙ sont parallèles aux tangentes, le triangle ΤΥΕ est plus grand que le triangle ΥΩΛ du triangle ΕΖΑ[62]. De même, le triangle ΞΕΙ est aussi plus grand que le triangle ΞΡΚ du triangle ΒΕΗ.

Or le triangle ΑΕΖ est égal au triangle ΒΕΗ[63] ; le triangle ΤΕΥ excède donc le triangle ΥΩΛ du même triangle que celui dont le triangle ΞΕΥ excède le triangle ΞΡΚ. La somme des triangles ΤΥΕ et ΞΡΚ est donc

[59] Voir Prop. 8

[60] Voir *supra*, note 48.

[61] Voir Note complémentaire [22].

[62] I. 44.

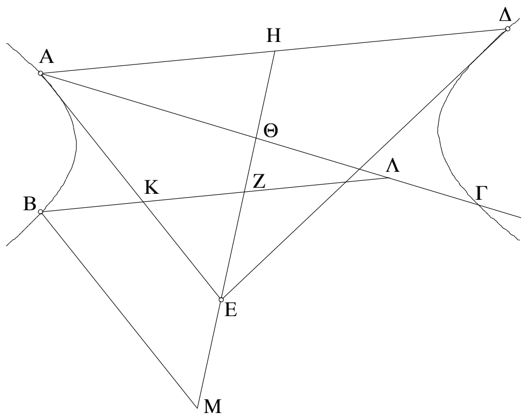
[63] Voir Prop. 1.

Τὸ ΛΤΡΧ ἄρα τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.

– ιαʹ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ᾽ ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσιν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τᾶς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἠγμένῃ διαμέτρῳ διαφέρει τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕ, ΔΕ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἥ τε ΑΔ καὶ ἡ ΕΘΗ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΒΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΒΜ.

Λέγω ὅτι τὸ ΒΖΜ τρίγωνον τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΕΖ.



3 ιαʹ V^5 : om. V.

égale à la somme des triangles ΞΕΙ et ΥΩΛ. Que soit ajoutée l'aire commune ΚΞΕΥΛΧ.

Le quadrilatère ΛΤΡΧ est donc égal au quadrilatère ΩΧΚΙ.

– 11 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, sur n'importe laquelle des deux sections est pris un certain point, et que, de ce point, sont menées deux parallèles, l'une à la tangente et l'autre à la droite joignant les points de contact, le triangle obtenu au moyen de ces parallèles et appliqué au diamètre passant par le point de rencontre des tangentes diffère d'avec le triangle découpé qui est appliqué à la tangente et au diamètre passant par le point de contact, du triangle découpé du côté du point de rencontre des tangentes.*

Soient des opposées ΑΒ et ΓΔ[64] ; que des tangentes ΑΕ et ΔΕ se rencontrent en un point Ε ; soit un centre Θ ; que soient menées des droites de jonction ΑΔ et ΕΘΗ ; que soit pris sur la section ΑΒ un point quelconque Β, et que, par ce point, soient menées une parallèle ΒΖΛ à ΑΗ et une parallèle ΒΜ à ΑΕ.

Je dis que le triangle ΒΖΜ diffère d'avec le triangle ΑΚΛ du triangle ΚΕΖ.

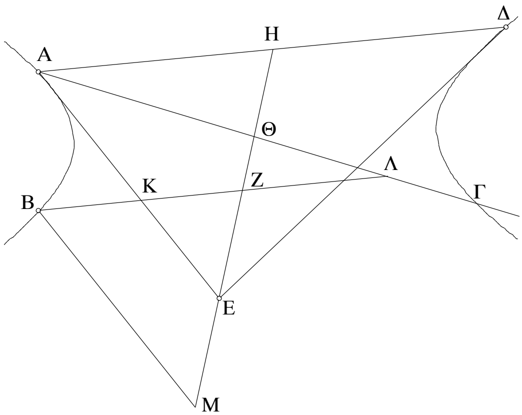
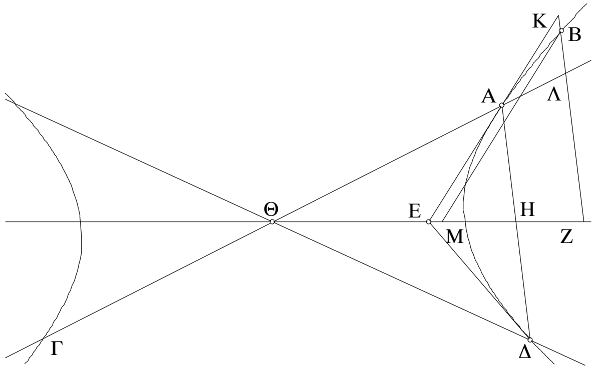


Fig. 11.1[65]

[64] Cette rédaction ne convient qu'à la figure 11.1.
[65] **V** illustre ce cas par deux autres figures, avec Β au-dessus de Α.



Ὅτι μὲν γὰρ ἡ ΑΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΘ, φανερόν, καὶ ὅτι ἡ ΕΘ διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΔ ἀγομένῃ· ὥστε κατηγμένη ἐστὶν ἡ ΑΗ ἐπὶ τὴν ΕΗ.

Ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΕ, καὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΑΕ, κατηγμένη δὲ ἡ ΑΗ, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου τοῦ Β κατήχθησαν ἐπὶ τὴν ΕΗ ἡ μὲν ΒΖ παρὰ τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΒΜ παρὰ τὴν ΑΕ, δῆλον ὅτι τὸ ΒΜΖ τρίγωνον τοῦ ΛΘΖ διαφέρει τῷ ΘΑΕ· ὥστε καὶ τὸ ΒΖΜ τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΖΕ.

Καὶ συναποδέδεικται ὅτι τὸ ΒΚΕΜ τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΚΑ τριγώνῳ.

– ιβʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ ἀφ᾿ ἑκατέρου παράλληλοι ἀχθῶσιν, ὁμοίως ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα ὑπ᾿ αὐτῶν τετράπλευρα.

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ, καὶ δι᾿ αὐτῶν ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΔ αἱ ΛΒΜΝ, ΚΞΟΥΠ, τῇ δὲ ΑΕ αἱ ΒΞΡ, ΛΚΣ.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠ τῷ ΚΡ.

5 σημείου τοῦ Β Federspiel[5] : τοῦ Β σημείου V ‖ 11 ιβʹ V[5] : om. V ‖ δύο] βʹ V ‖ 16 ΛΒΜΝ Ψ : ΒΛΜΝ V ‖ ΛΚΣ Ψ : ΚΛΣ V.

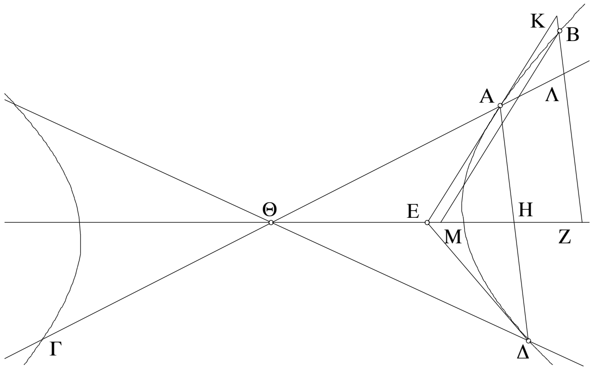


Fig. 11.2

Il est évident que ΑΔ est coupée en deux parties égales par ΕΘ[66] et que ΕΘ est un diamètre conjugué à la parallèle à ΑΔ passant par Θ[67] , de sorte que ΑΗ est une droite abaissés sur ΕΗ.

Dès lors, puisque ΗΕ est un diamètre, que ΑΕ est une tangente, que ΑΗ est une droite abaissée, et que, un point Β ayant été pris sur la section, ont été abaissées[68] sur ΕΗ une parallèle ΒΖ à ΑΗ et une parallèle ΒΜ à ΑΕ, il est évident que le triangle ΒΜΖ diffère d'avec le triangle ΛΘΖ du triangle ΘΑΕ[69], de sorte que le triangle ΒΖΜ diffère aussi d'avec le triangle ΑΚΛ du triangle ΚΖΕ.

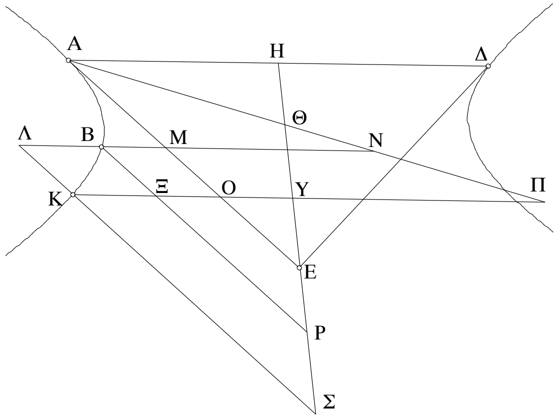
Il a été démontré en même temps[70] que le quadrilatère ΒΚΕΜ est égal au triangle ΛΚΑ.

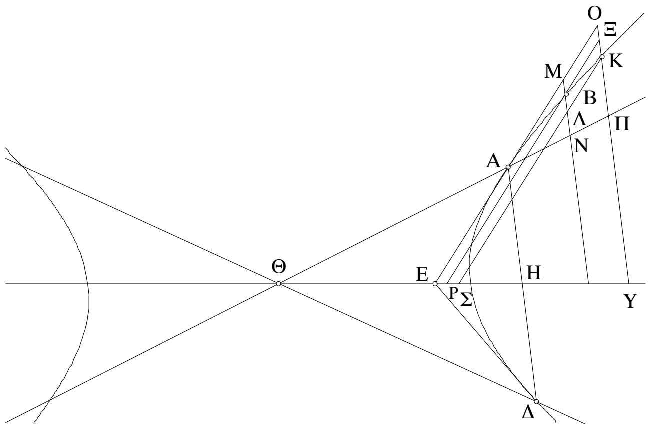
– 12 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, sur l'une des deux sections, sont pris deux points, et que, de chaque point, sont menées des parallèles*[71]*, les quadrilatères obtenus au moyen de ces parallèles seront pareillement égaux.*

Toutes choses égales d'ailleurs, que soient pris sur la section ΑΒ des points quelconques Β et Κ, et que, par ces points, soient menées des parallèles ΛΒΜΝ et ΚΞΟΥΠ[72] à ΑΔ et des parallèles ΒΞΡ et ΛΚΣ à ΑΕ.

Je dis que le quadrilatère ΒΠ est égal au quadrilatère ΚΡ.

[66] II.39.
[67] II.38.
[68] On attend ici le parfait au lieu de l'aoriste, qui n'est pas canonique à cet endroit.
[69] I.45 (figure 11. 1) et I.43 (figure 11. 2).
[70] Voir tome 1.2, Note complémentaire [32].
[71] La *protase* est d'une rédaction particulièrement cursive.
[72] L'ordre des lettres montre qu'on raisonne sur la figure 12.1.





Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἴσον τὸ μὲν ΑΟΠ τρίγωνον τῷ ΚΟΕΣ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΝ τῷ ΒΜΕΡ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΡ λιπὸν ἢ προσλαβὸν τὸ ΒΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΠ. Καὶ κοινοῦ προστεθέντος ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ ΒΟ τὸ ΒΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΣ.

2 λιπὸν Ψ : λεῖπον V ‖ 3 προστεθέντος Ψ : προστιθέντος V προστιθεμένου prop. Heiberg ‖ ante ἢ del. ἦ (*sic*) V.

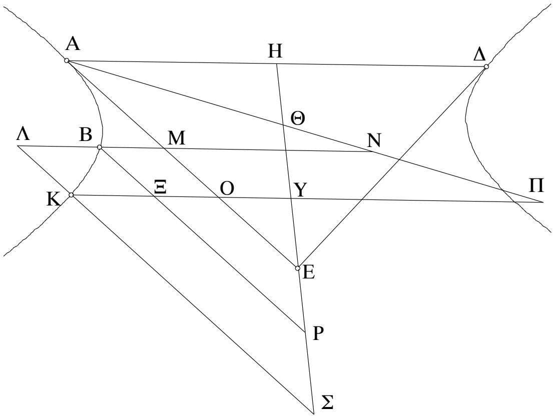


Fig. 12. 1

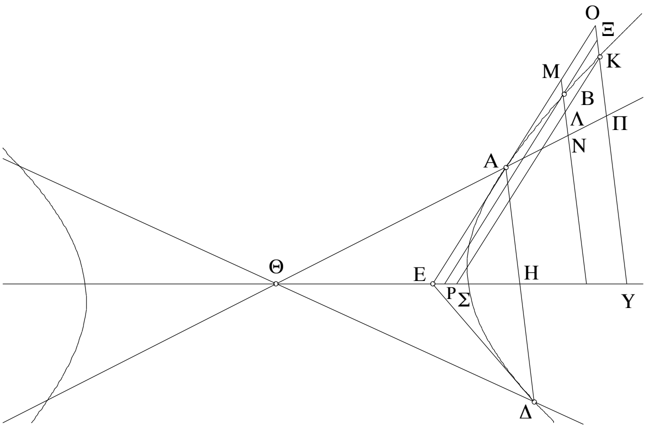


Fig. 12. 2

Puisqu'on a démontré que le triangle ΑΟΠ était égal au quadrilatère ΚΟΕΣ[73] et que le triangle ΑΜΝ était égal au quadrilatère ΒΜΕΡ, alors le quadrilatère restant ΚΡ, diminué[74] ou augmenté du quadrilatère ΒΟ, est égal au quadrilatère ΜΠ. Le quadrilatère commun ΒΟ étant ajouté ou retranché, le quadrilatère ΒΠ est égal au quadrilatère ΞΣ.

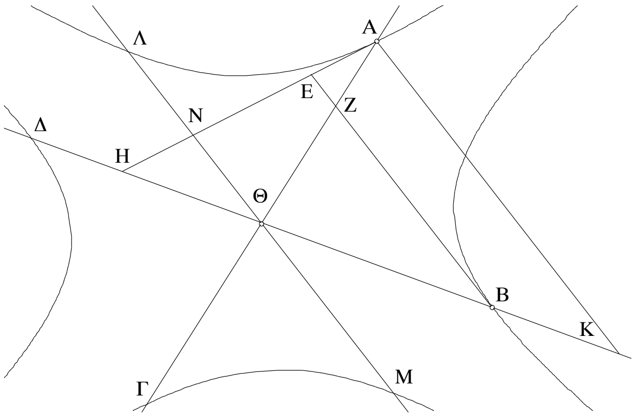
[73] Prop. 11, corollaire.

[74] La forme λιπόν est un *hapax* dans les textes mathématiques classiques.

– ιγʹ – Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις τῶν ἐφεξῆς τομῶν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσιν, ἴσα ἔσται τὰ τρίγωνα ὧν κορυφὴ κοινὴ τὸ κέντρον ἐστὶ τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι ἐφʼ ὧν τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα, καὶ τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΒΕ, ΑΕ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΒΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Γ.

Λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΖΘ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ.



Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Θ παρὰ τὴν ΒΕ αἱ ΑΚ, ΛΘΜ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς ἡ ΒΖΕ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΘΒ, καὶ παρὰ τὴν ΒΕ ἐστιν ἡ ΛΜ, συζυγής ἐστιν ἡ ΛΜ διάμετρος τῇ ΒΔ διαμέτρῳ ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος. Διὰ δὲ τοῦτο κατῆκται ἡ ΑΚ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ.

Καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΘ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ· ἀλλʼ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ, ἡ ΚΑ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΖΘ, ἡ

TEST. : 17 alt. καὶ — 198, 2 τριγώνῳ] EUT., *Comm. in Con.* (Heiberg, 324, 7-9).

1 ιγʹ V[5] : om. V ‖ 10 ΛΘΜ Ψ : ΘΛΜ V ‖ 15 ΚΘΗ Canon. : ΚΗΘ V ‖ ἀπὸ Ψ : om. V.

– 13 – *Si, dans des opposées conjuguées, des droites tangentes aux sections adjacentes se rencontrent, et que, par les points de contact, sont menés des diamètres, les triangles ayant comme sommet commun le centre des opposées seront égaux.*

Soient des opposées conjuguées, marquées[75] des points Α, Β, Γ et Δ ; que soient menées des tangentes ΒΕ et ΑΕ aux sections Α et Β et qu'elles se recontrent en un point Ε ; soit un centre Θ ; que soient menées des droites de jonction ΑΘ et ΒΘ et qu'elles soient prolongées jusqu'en des points Δ et Γ.

Je dis que le triangle ΒΖΘ est égal aux triangle ΑΗΘ.

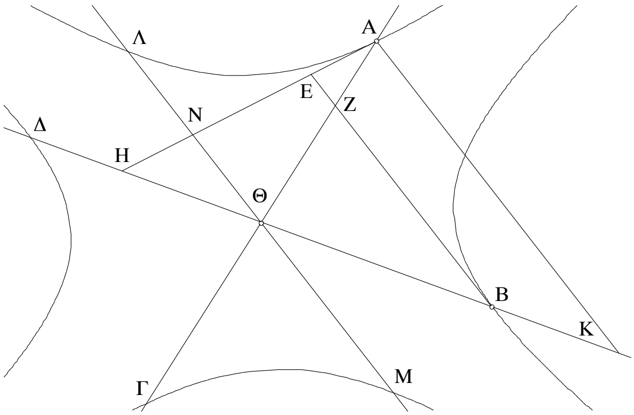


Fig. 13

Que soient menées par Α et Θ des parallèles ΑΚ et ΛΘΜ à ΒΕ.

Dès lors, puisque la droite ΒΖΕ est tangente à la section Β, que, par le point de contact, est mené un diamètre ΔΘΒ et que ΛΜ est parallèle à ΒΕ, ΛΜ est un diamètre conjugué au diamètre ΒΔ et est appelé second diamètre[76]. En vertu de quoi a été abaissée sur ΒΔ une droite ΑΚ de manière ordonnée.

D'autre part, ΑΗ est une tangente ; le rectangle ΚΘ,ΘΗ est donc égal au carré sur ΒΘ[77]. ΒΘ est donc à ΗΘ comme ΚΘ est à ΘΒ ; mais ΚΑ est à

[75] Voir Note complémentaire [23].
[76] II.20.
[77] I.38.

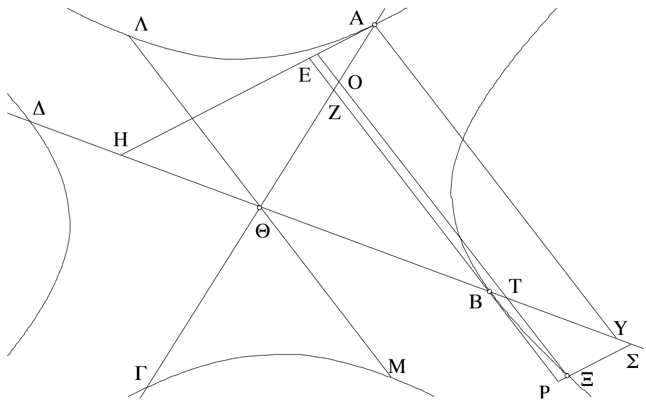
ΒΘ πρὸς ΗΘ. Καί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ

– ιδʹ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ᾽ ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον πρὸς τῷ κέντρῳ τρίγωνον τοῦ γινομένου περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου διοίσει τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον.

Ἔστω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ξ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἤχθωσαν ἡ ΞΡΣ, παρὰ δὲ τὴν ΒΕ ἡ ΞΤΟ.

Λέγω ὅτι τὸ ΟΘΤ τρίγωνον τοῦ ΞΣΤ διαφέρει τῷ ΘΒΖ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ.

Ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον τῆς ΑΛ τομῆς διάμετρος μέν ἐστιν ἡ ΛΘΜ, συζυγὴς δὲ αὐτῇ καὶ δευτέρα διάμετρος ἡ ΔΘΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφάπτεται ἡ ΑΗ, κατῆκται δὲ παρὰ τὴν ΛΜ ἡ ΑΥ,

1 αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ V : αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι EUT. ‖ 2 ΒΘΖ Canon. : ΑΘΖ V ‖ 3 ιδʹ V^5 : om. V ‖ 11 ΞΤΟ Ψ : ΞΟΤ V ‖ 16 ΛΜ V^1 : ΑΜ V.

BZ et AΘ est à ΘZ comme KΘ est à ΘB[78] ; BΘ est donc aussi à HΘ comme AΘ est à ZΘ. D'autre part, les angles BΘZ et HΘZ[79] sont égaux à deux angles droits.

Le triangle AHΘ est donc égal au triangle BΘZ[80].

– 14 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, sur l'une ou l'autre des deux sections est pris un certain point, et que, de ce point, sont menées des parallèles aux tangentes jusqu'aux diamètres, le triangle obtenu au centre différera d'avec le triangle autour du même angle du triangle ayant la tangente pour base et le centre pour sommet.*

Toutes choses égales d'ailleurs, que soit pris un certain point Ξ sur la section B, et que, par ce point, soient menées une parallèle ΞPΣ à AH et une parallèle BE à ΞTO.

Je dis que le triangle OΘT diffère d'avec le triangle ΞΣT du triangle ΘBZ.

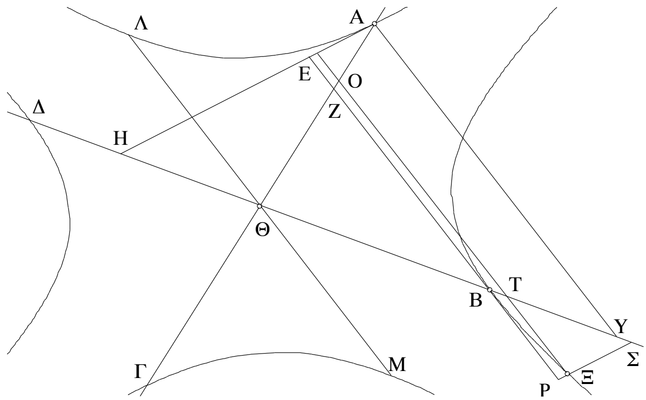


Fig. 14

Que soit menée du point A une parallèle AY à BZ.

Dès lors, puisque, en vertu du raisonnement précédent, la droite ΛΘM est un diamètre de la section AΛ, que la droite ΔΘB est un second diamètre, conjugué du premier[81], que, de A, est menée une tangente AH et

[78] *Éléments*, VI.4.

[79] Voir Note complémentaire [24].

[80] Ce résultat fait l'objet d'un *lemme* chez Eutocius, qui fournit deux variantes de démonstration.

[81] II.20.

ἕξει ἡ ΑΥ πρὸς τὴν ΥΗ τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν.

Ἀλλ’ ὡς <μὲν> ἡ ΑΥ πρὸς ΥΗ, ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ, ὡς δὲ ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ, ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ καὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, ὡς δὲ ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἴδους πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· ἕξει ἄρα ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ τὸν συνημμένον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, τουτέστιν ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

Καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μα′ τοῦ α′ βιβλίου τὸ ΤΘΟ τρίγωνον τοῦ ΞΤΣ διαφέρει τῷ ΒΖΘ, ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ.

– ιε′ – Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσι, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐφ’ ὁποτέρας τῶν συζυγῶν τομῶν, καὶ ἀπ’ αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον ὑπ’ αὐτῶν πρὸς τῇ τομῇ τρίγωνον τοῦ γινομένου τριγώνου πρὸς τῷ κέντρῳ μεῖζόν ἐστι τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ ὧν κέντρον τὸ Θ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΔΕ, ΒΔΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἁφῶν ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΑΘΖΦ, ΒΘΤ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΣ τομῆς σημεῖόν τι τὸ Σ, καὶ δι’ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ ἡ ΣΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΣΥ.

Λέγω ὅτι τὸ ΣΛΥ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.

2 ἐκ τοῦ Heiberg : ἐξ οὗ V || 4 post ὡς fort. addendum μὲν || 8 ΤΟ Canon. : ΤΘ V || 12 ιε′ V^5 : om. V || 21 ΒΘΤ Ψ : Τ V.

qu'une droite ΑΥ est abaissée parallèlement à ΛΜ, la droite ΑΥ aura, avec la droite ΥΗ, le rapport composé des rapports que ΘΥ a avec ΥΑ et que le côté transverse de la figure appliquée à ΛΜ a avec le côté droit[82].

Mais ΞΤ est à ΤΣ comme ΑΥ est à ΥΗ, ΘΤ est à ΤΟ et ΘΒ est à ΒΖ comme ΘΥ est à ΥΑ[83], le côté droit de la figure appliquée à ΒΔ est au côté transverse comme le côté transverse de la figure appliquée à ΛΜ est au côté droit[84] ; ΞΤ aura donc avec ΤΣ le rapport composé des rapports que ΘΒ a avec ΒΖ, c'est-à-dire que ΘΤ a avec ΤΟ, et que le côté droit de la figure appliquée à ΒΔ a avec le côté transverse.

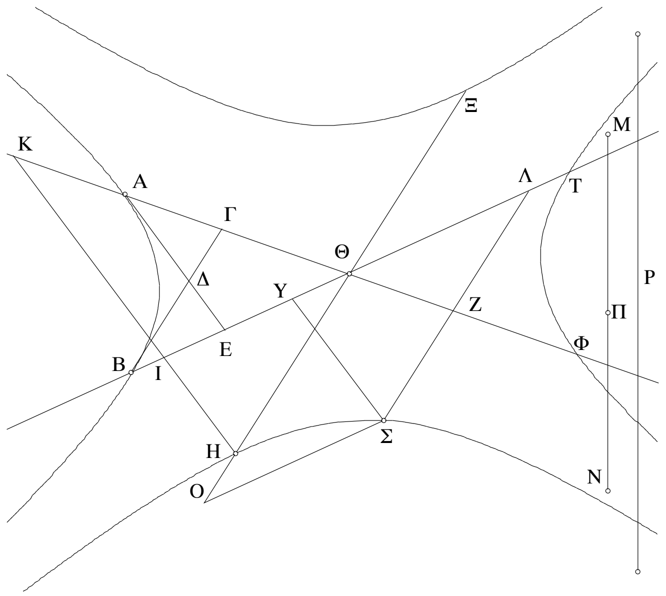
En vertu de ce qui a été démontré dans la proposition 41 du Livre I[85], le triangle ΤΘΟ diffère d'avec le triangle ΞΤΣ du triangle ΒΖΘ et donc aussi du triangle ΑΗΘ[86].

– 15 – *Si des droites tangentes à l'une de deux opposées conjuguées se rencontrent, que, par les points de contact, sont menés des diamètres, qu'est pris un certain point sur l'une ou l'autre des deux autres sections conjuguées, et que, de ce point, sont menées des parallèles aux tangentes jusqu'aux diamètres, le triangle obtenu au moyen de ces droites et appliqué à la section*[87] *sera plus grand que le triangle obtenu au centre, du triangle ayant une base qui est la tangente et un sommet qui est le centre des sections opposées*.

Soient des opposées conjuguées ΑΒ, ΗΣ, Τ et Ξ, de centre Θ ; que des droites ΑΔΕ et ΒΔΓ soient tangentes à la section ΑΒ ; que, par les points de contact Α et Β soient menés des diamètres ΑΘΖΦ et ΒΘΤ ; que soit pris sur la section ΗΣ un certain point Σ, et que, par ce point, soient menées une parallèle ΣΖΛ à ΒΓ et une parallèle ΣΥ à ΑΕ.

Je dis que le triangle ΣΛΥ est plus grand que le triangle ΘΛΖ du triangle ΘΓΒ.

[82] I.40.
[83] *Éléments*, VI.4.
[84] I.60.
[85] Voir Note complémentaire [25].
[86] Prop. 13.
[87] C'est-à-dire « dont le sommet est sur l'une des sections ».



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΞΘΗ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΙΗ, παρὰ δὲ τὴν ΒΤ ἡ ΣΟ· φανερὸν δὴ ὅτι συζυγής ἐστι διάμετρος ἡ ΞΗ τῇ ΒΤ, καὶ ὅτι ἡ ΣΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΤ κατῆκται τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘΗΟ, καὶ ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΣΛΘΟ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἐστιν ἡ ΒΘ, καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΕ, γεγονέτω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΝ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΓ· ἡ ἄρα ΜΝ ἐστιν ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΒΤ εἴδους.

Δίχα τετμήσθω ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Π· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ. Πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΤΒ, ἡ ΤΒ πρὸς Ρ· ἔσται δὴ καὶ ἡ Ρ ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΞΗ εἴδους.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, τὸ

1 pr. τὴν v Ψ : τὴ V ‖ 11 πεποιήσθω c Ψ : πεποιείσθω V.

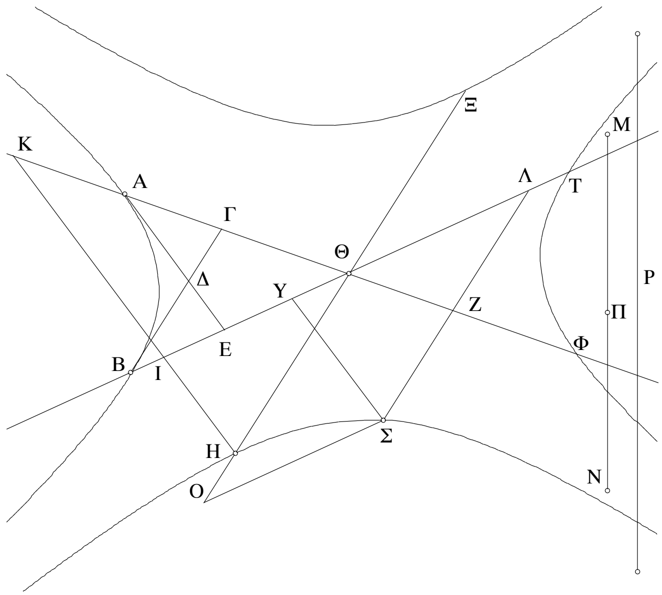


Fig. 15

Que soient menées par Θ une parallèle ΞΘΗ à ΒΓ, par Η une parallèle ΚΙΗ à ΑΕ, et que soit menée une parallèle ΣΟ à ΒΤ ; il est évident que ΞΗ est un diamètre conjugué à ΒΤ[88], que ΣΟ, parallèle à ΒΤ, est abaissée sur ΘΗΟ de manière ordonnée et que le quadrilatère ΣΛΘΟ est un parallélogramme.

Dès lors, puisque ΒΓ est une tangente, que ΒΘ passe par le point de contact et que ΑΕ est une autre tangente, que ΜΝ soit[89] au double de ΒΓ comme ΔΒ est à ΒΕ ; ΜΝ est donc ce qu'on appelle le côté droit de la figure appliquée à ΒΤ[90].

Que ΜΝ soit coupée en deux parties égales en un point Π ; ΜΠ est donc à ΒΓ comme ΔΒ est à ΒΕ. Qu'il soit fait en sorte que ΤΒ soit à Ρ comme ΞΗ est à ΤΒ ; Ρ sera alors ce qu'on appelle le côté droit de la figure appliquée à ΞΗ[91].

Dès lors, puisque ΜΠ est à ΓΒ comme ΔΒ est à ΒΕ, que, d'autre part, le carré sur ΔΒ est au rectangle ΔΒ,ΒΕ comme ΔΒ est à ΒΕ, et que le

[88] II.20.

[89] La forme γεγονέτω, employée pour exprimer l'identité de deux rapports, est fréquente dans les *Éléments*, mais est un *hapax* dans les *Coniques*.

[90] I.50.

[91] I.60.

ὑπὸ ΜΠ,ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, τὸ ὑπὸ ΠΜ,ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ· ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΠ,ΒΘ τῷ ἀπὸ ΘΗ, διότι τὸ μὲν ἀπὸ ΞΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΤΒ,ΜΝ, καὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΜΠ,ΒΘ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΤΒ, ΜΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΘ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΗΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, τὸ ἀπὸ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ.

Ἐναλλάξ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ, τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ, ὅμοια γάρ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ, τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΒΘ· ὡς ἄρα τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ, τὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΘ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΙ τῷ ΓΒΘ. Τὸ ἄρα ΗΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΙΚ διαφέρει τῷ ΙΘΗ, τουτέστι τῷ ΓΒΘ.

Πάλιν ἐπεὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συνημμένον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ καὶ ἡ ΠΜ πρὸς ΒΓ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ, ἡ ΤΒ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ, ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἕξει ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΣΛ, καὶ ὅμοιον τὸ ΘΓΒ τρίγωνον τῷ ΘΛΖ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΓΒ, ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ τὸν συνημμένον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Ρ πρὸς ΞΗ καὶ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΘΙ.

Ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΗΣ διάμετρον ἔχουσα τὴν ΞΗ, ὀρθίαν δὲ τὴν Ρ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Σ κατῆκται ἡ ΣΟ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΘΗ εἶδος τὸ ΘΙΗ, ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς ΣΟ ἤτοι τῆς ΘΛ ἴσης αὐτῇ τὸ ΘΛΖ,

16 ἡ Ρ Ψ : ΗΡ V ‖ ΞΗ Canon. : ΞΝ V ‖ ΒΕ c Ψ : ΒΕ vel ΚΕ V ΚΕ v ‖ 18 ΞΗ Canon. : ΞΝ V ‖ 19 ΒΓ Ψ : Β V ‖ alt. καὶ c v Ψ : iter. V ‖ 26 ἴσης Canon. : ἴση V.

rectangle ΜΠ,ΒΘ est au rectangle ΓΒ,ΒΘ comme ΜΠ est à ΓΒ, alors le rectangle ΠΜ,ΒΘ est au rectangle ΓΒ,ΒΘ comme le carré sur ΔΒ est au rectangle ΔΒ,ΒΕ ; or le rectangle ΜΠ,ΒΘ est égal au carré sur ΘΗ[92], parce que le carré sur ΞΗ est égal au rectangle ΤΒ,ΜΝ, que le rectangle ΜΠ,ΒΘ est le quart du rectangle ΤΒ,ΜΝ et que le carré sur ΗΘ est le quart du carré sur ΗΞ ; le carré sur ΗΘ est donc au rectangle ΓΒ,ΒΘ comme le carré sur ΔΒ est au rectangle ΔΒ,ΒΕ[93].

Par permutation, le rectangle ΔΒ,ΒΕ est au rectangle ΓΒ,ΒΘ comme le carré sur ΔΒ est à celui sur ΗΘ ; mais le triangle ΔΒΕ est au triangle ΗΘΙ comme le carré sur ΔΒ est à celui sur ΘΗ[94], puisqu'ils sont semblables, et le triangle ΔΒΕ est au triangle ΓΒΘ comme le rectangle ΔΒ,ΒΕ est au rectangle ΓΒ,ΒΘ ; le triangle ΔΒΕ est donc au triangle ΓΒΘ comme le triangle ΔΒΕ est au triangle ΗΘΙ ; le triangle ΗΘΙ est donc égal au triangle ΓΒΘ. Le triangle ΗΘΚ diffère donc d'avec le triangle ΘΙΚ du triangle ΙΘΗ, c'est-à-dire du triangle ΓΒΘ.

Puisque, derechef, ΘΒ a avec ΒΓ le rapport composé des rapports que ΘΒ a avec ΜΠ et que ΠΜ a avec ΒΓ, que, d'autre part, ΤΒ est à ΜΝ et Ρ est à ΞΗ comme ΘΒ est à ΜΠ et que ΔΒ est à ΒΕ comme ΜΠ est à ΒΓ, alors ΘΒ aura avec ΒΓ le rapport composé des rapports que ΔΒ a avec ΒΕ et que Ρ a avec ΞΗ.

Puisque ΒΓ est parallèle à ΣΛ, que le triangle ΘΒΓ est semblable au triangle ΘΛΖ et que ΘΛ est à ΛΖ comme ΘΒ est à ΓΒ[95], alors ΘΛ aura avec ΛΖ le rapport composé des rapports que Ρ a avec ΞΗ et que ΔΒ a avec ΒΕ, c'est-à-dire que ΘΗ a avec ΘΙ.

Dès lors, puisque la section ΗΣ est une hyperbole de diamètre ΞΗ et de côté droit Ρ, que, d'un certain point Σ, est abaissée une droite ΣΟ, que, sur la droite ΘΗ menée du centre est décrite une figure ΘΙΗ, que, sur la droite abaissée ΣΟ ou sur la droite ΘΛ, égale à cette droite abaissée, est décrite

[92] I.60 et I.30.

[93] Sur les schémas marginaux de **V** relatifs à cette chaîne de proportions, voir Note complémentaire [26].

[94] *Éléments*, VI.19.

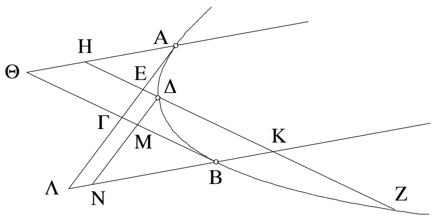
[95] *Éléments*, VI.4.

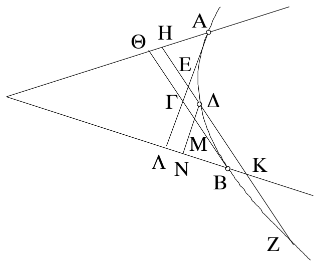
ἀπὸ δὲ τῆς ΘΟ μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης ἤτοι τῆς ΣΛ ἴσης αὐτῇ εἶδος τὸ ΣΛΥ ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ΘΙΗ, καὶ ἔχει τοὺς συγκειμένους λόγους ὡς εἴρηται, τὸ ΣΛΥ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.

– ις′ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀπὸ δέ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφάπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐφαπτομένων, ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτω τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τὸ +Δ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΕΔΖ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.





2 εἶδος τὸ ΣΛΥ Federspiel[5] : τὸ ΣΛΥ εἶδος V ‖ 5 ις′ V[5] : om. V ‖ 12 ἢ Ψ : ἡ V.

une figure ΘΛΖ, que sur la droite ΘΟ découpée[96] entre le centre et la droite abaissée ou sur la droite ΣΛ égale à celle-ci, est décrite une figure ΣΛΥ semblable à la figure ΘΙΗ construite sur la droite menée du centre et qu'on a les rapports composés qu'on a dits[97], le triangle ΣΛΥ est plus grand que le triangle ΘΛΖ du triangle ΘΓΒ[98].

– 16[99] – *Si deux droites tangentes à une section de cône ou à une circonférence de cercle se rencontrent, et que, d'un certain point pris parmi ceux qui sont sur la section, est menée une droite parallèle à l'une des tangentes et coupant la section et l'autre tangente, l'aire comprise par les droites découpées entre la section et la tangente sera au carré sur la droite découpée du côté du point de contact comme les carrés construits sur les tangentes sont entre eux.*

Soit une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒ ; que soitent menées des tangentes ΑΓ et ΓΒ à ΑΒ et qu'elles se rencontrent en un point Γ ; que soit pris un certain point Δ sur la section ΑΒ, et que, par ce point, soit menée une parallèle ΕΔΖ à ΓΒ.

Je dis que le rectangle ΖΕ,ΕΔ est au carré sur ΕΑ comme le carré sur ΒΓ est à celui sur ΑΓ.

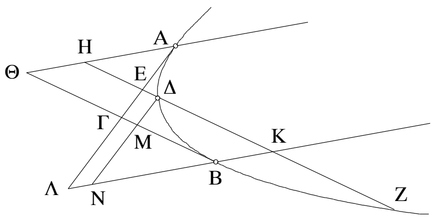


Fig. 16. 1[100]

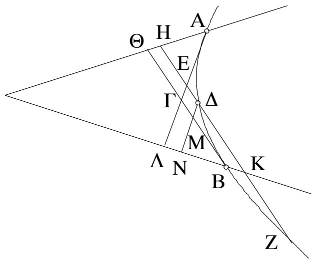


Fig. 16. 2[101]

[96] Voir Note complémentaire [27].

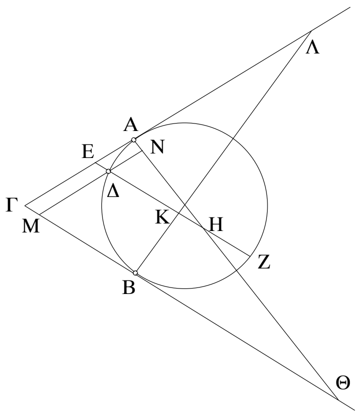
[97] Le sujet du verbe ἔχει est sans doute fait de l'ensemble des triangles dont il est question dans cette dernière partie de la proposition.

[98] I.41.

[99] Voir Note complémentaire [28].

[100] On a une seconde figure dans **V** avec Δ au-dessus de Α.

[101] **V** présente aussi une figure avec, comme dans la parabole, Δ au-dessus de Α.



Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι ἥ τε ΑΗΘ καὶ ἡ ΚΒΛ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΛ παράλληλος ἡ ΔΜΝ· φανερὸν αὐτόθεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΛΔ τετραπλεύρῳ καὶ τὸ ΒΛΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση, καὶ πρόσκειται ἡ ΔΕ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΕ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΔ, οὕτω τὸ ΕΚΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΝΚ. Καὶ ἐναλλάξ· καὶ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς ὅλον τὸ ΕΛΚ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΝΚ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΛ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ τρίγωνον.

Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΛΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΛΔ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΔΛ τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΛΓΒ τῷ ΑΘΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΑΘΓ.

1 ΚΒΛ Comm. : ΒΚΛ V.

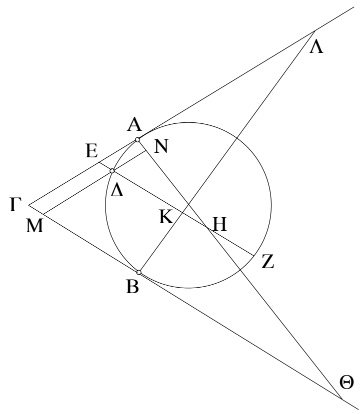


Fig. 16. 3

Que soient menés par Α et Β des diamètres ΑΗΘ et ΚΒΛ, et que, par le point Δ, soit menée une parallèle ΔΜΝ à ΑΛ. Il va évidemment de soi[102] que ΔΚ est égale à ΚΖ[103] et que le triangle ΑΕΗ est égal au quadrilatère ΛΔ[104] et que le triangle ΒΛΓ est égal au au triangle ΑΓΘ[105].

Dès lors, puisque ΖΚ est égale à ΚΔ et que ΔΕ est ajoutée, la somme du rectangle ΖΕ,ΕΔ et du carré sur ΔΚ est égale au carré sur ΚΕ[106].

Puisque le triangle ΕΛΚ est semblable au triangle ΔΝΚ, le triangle ΕΚΛ est au triangle ΔΝΚ comme le carré sur ΕΚ est à celui sur sur ΚΔ[107]. Et *par permutation*; d'autre part, le carré retranché construit sur ΔΚ est au triangle ΔΝΚ retranché comme le carré entier sur ΕΚ est au triangle entier ΕΛΚ ; le rectangle restant ΖΕ,ΕΔ est donc aussi au quadrilatère restant ΔΛ comme le carré sur ΕΚ est au triangle ΕΛΚ[108] .

Mais le carré sur ΓΒ est au triangle ΛΓΒ comme le carré sur ΕΚ est au triangle ΕΛΚ[109] ; le carré sur ΓΒ est donc aussi au triangle ΛΓΒ comme le rectangle ΖΕ,ΕΔ est au quadrilatère ΛΔ ; or le quadrilatère ΔΛ est égal au triangle ΑΕΗ et le triangle ΛΓΒ est égal au triangle ΑΘΓ ; le carré sur ΓΒ

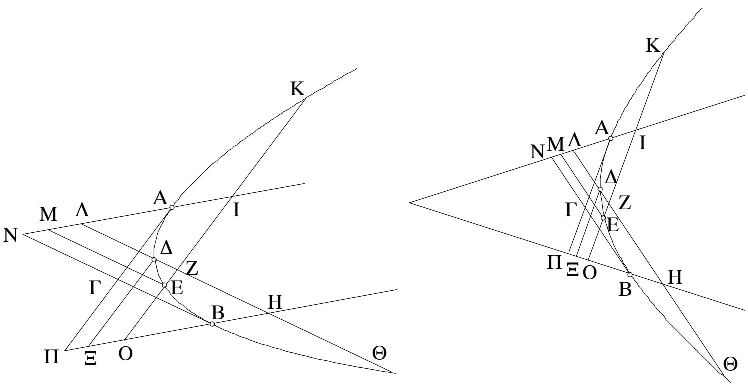
[102] L'adverbe αὐτόθεν est également utilisé dans la prop. 42.
[103] I.46 et 47.
[104] Prop. 2.
[105] Prop. 1.
[106] *Éléments*, II.6.
[107] La relation se déduit presque immédiatement d'*Éléments*, VI.19. Pappus en fait un lemme (= *lemme* 3, éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 160, 20-161, 2).
[108] *Éléments*, V.19.
[109] *Éléments,* VI.19.

Ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ΑΕΗ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΘΓ· ὡς δὲ τὸ ΑΗΕ πρὸς τὸ ΑΘΓ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. Καὶ ἐναλλάξ.

– ιζʹ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὴν γραμμήν, ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ δι᾽ αὐτῶν παρὰ τὰς ΑΓ, ΓΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΖΙΚ, ΔΖΗΘ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.



1 ΓΒ V[1] : ΓΕΒ V || 5 ιζʹ V[5] : om. V || 10 λαμβανομένων V : ἀπολαμβανομένων prop. Federspiel[5] || 12 ἐφαπτόμεναι V : an ἐφαπτέσθωσαν ? || 15 pr. ἀπὸ Ψ : om. V.

est donc aussi au triangle ΑΘΓ comme le rectangle ΖΕ,ΕΔ est au triangle ΑΕΗ.

Par permutation, le triangle ΑΕΗ est au triangle ΑΘΓ comme le rectangle ΖΕ,ΕΔ est au carré sur ΓΒ ; or le carré sur ΕΑ est à celui sur ΑΓ comme le triangle ΑΗΕ est au triangle ΑΘΓ[110] ; le carré sur ΕΑ est donc aussi à celui sur ΑΓ comme le rectangle ΖΕ,ΕΔ est au carré sur ΓΒ. Et *par permutation*[111].

– 17[112] – *Si deux droites tangentes à une section de cône ou à une circonférence de cercle se rencontrent, que, sur la section, sont pris deux points quelconques, et que, de ces points, sont menées dans la section des parallèles aux tangentes, se coupant l'une l'autre ainsi que la ligne, les rectangles compris par les droites prises pareillement*[113] *sont entre eux comme le sont entre eux les carrés construits sur les tangentes*.

Soit une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒ ; que des droites ΑΓ et ΓΒ, tangentes à ΑΒ, se rencontrent en un point Γ ; que soient pris sur la section des points quelconques Δ et Ε, et que, par ces points, soient menées des parallèles ΕΖΙΚ et ΔΖΗΘ aux droites ΑΓ et ΓΒ.

Je dis que le rectangle ΚΖ,ΖΕ est au rectangle ΘΖ,ΖΔ comme le carré sur ΑΓ est à celui sur ΓΒ.

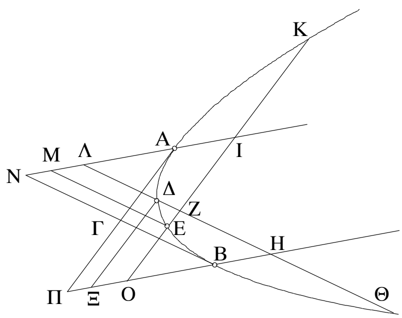


Fig. 17. 1

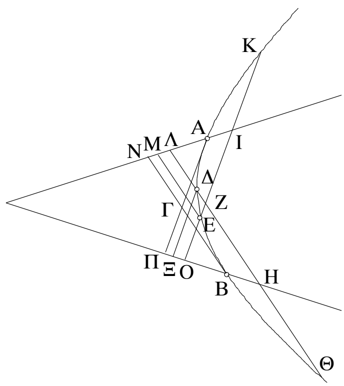


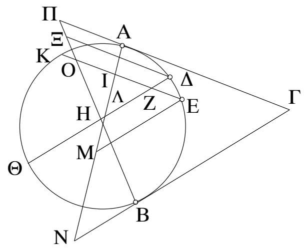
Fig. 17. 2

[110] *Éléments*, VI.19.

[111] Voir Note complémentaire [29].

[112] Voir Note complémentaire [30].

[113] L'adverbe ne renvoie pas à une situation géométrique précédente, contrairement aux autres occurrences du tour.



Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι αἱ ΑΛΜΝ, ΒΟΞΠ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἵ τε ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ παράλληλοι μέχρι τῶν διαμέτρων, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Δ, Ε παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΔΞ, ΕΜ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΚΙ τῇ ΙΕ ἐστιν ἴση καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ι, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΙ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους, ἔστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΙΜΕ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΙΖ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΖΙΛ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΜ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΜΕΙ τρίγωνον.

Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς τὸ ΙΕΜ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΓΑΝ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΜ τετράπλευρον, οὕτω τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΑΝ · ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΓΝ τῷ ΓΠΒ, τὸ δὲ ΖΜ τῷ ΖΞ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒΠ.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ πρὸς τὸ ΞΖ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΠΒ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς ΓΠΒ, διὰ δὲ τὸ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ΖΞ τετράπλευρον πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ, τὸ ΓΠΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ

4 ΔΞ V[1] : ΔΖ V ‖ 6 ΚΖΕ Canon. : ΖΚΕ V ‖ 13 ΓΑΝ Ψ : ἀπὸ ΓΑΝ V ‖ 17 ΓΠΒ Canon. : ΓΠ V.

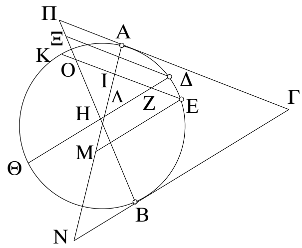


Fig. 17. 3

Que soient menés par Α et Β des diamètres ΑΛΜΝ et ΒΟΞΠ ; que soient prolongées les tangentes et les parallèles jusqu'aux diamètres, et que soient menées de Δ et Ε des parallèles ΔΞ et ΕΜ aux tangentes ; il est évident que ΚΙ est égale à ΙΕ et que ΘΗ est égale à ΗΔ[114].

Dès lors, puisque ΚΕ est coupée en parties égales en un point Ι et en parties inégales en un point Ζ, la somme du rectangle ΚΖ,ΖΕ et du carré sur ΖΙ est égale au carré sur ΕΙ[115].

Puisque les triangles sont semblables à cause des parallèles[116], le carré retranché construit sur ΙΖ est au triangle retranché ΖΙΛ comme le carré entier sur ΕΙ est au triangle entier ΙΜΕ[117] ; le rectangle restant ΚΖ,ΖΕ est donc aussi au quadrilatère restant ΖΜ comme le carré entier sur ΕΙ est au triangle entier ΜΕΙ[118].

Mais le carré sur ΓΑ est au triangle ΓΑΝ comme le carré sur ΕΙ est au triangle ΙΜΕ[119] ; le carré sur ΑΓ est donc au triangle ΓΑΝ comme le rectangle ΚΖ,ΖΕ est au quadrilatère ΖΜ ; or le triangle ΑΓΝ est égal au triangle ΓΠΒ[120] et le quadrilatère ΖΜ est égal au quadrilatère ΖΞ[121] ; le carré sur ΑΓ est donc au triangle ΓΒΠ comme le rectangle ΚΖ,ΖΕ est au quadrilatère ΖΞ.

On démontrera pareillement aussi que le carré sur ΓΒ est au triangle ΓΠΒ comme le rectangle ΘΖ,ΖΔ est au quadrilatère ΞΖ.

Dès lors, puisque le carré sur ΑΓ est au triangle ΓΠΒ comme le rectangle ΚΖ,ΖΕ est au quadrilatère ΖΞ et que, *par inversion*, le triangle

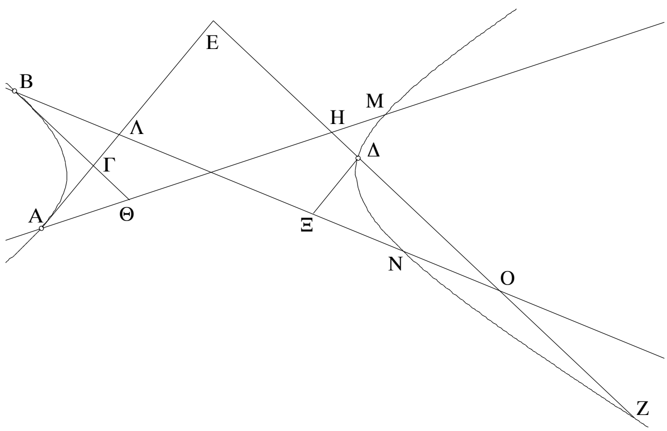
[114] I.46 et 47.
[115] *Éléments*, II.5.
[116] *Éléments*, I.29.
[117] *Éléments*, VI.19 et V.16.
[118] *Éléments*, V.19
[119] *Éléments*, VI.19 et V.16.
[120] Prop. 1.
[121] Prop. 3.

ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.

– ιη′ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ τι σημεῖον ἐφ᾽ ὁποτερασοῦν τῶν τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην, ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΜΝ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΘ ἡ ΕΔΖ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΔΞ.

Ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΒΝ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΘ καὶ τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΟ τῇ ΟΔ· καὶ πρόσκειται ἡ ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΟ

1 πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ Ψ : om. V || 2 ιη′ V^5 : om. V || 11 ΕΔΖ Ψ : ΔΕΖ V.

ΓΠΒ est au carré sur ΓΒ comme le quadrilatère ΖΞ est au rectangle ΘΖ,ΖΔ, alors, *à intervalle égal*, le rectangle ΚΖ,ΖΕ est au rectangle ΘΖ,ΖΔ comme le carré sur ΑΓ est à celui sur ΒΓ.

– 18 – *Si deux droites tangentes à des opposées se rencontrent, qu'est pris un certain point sur l'un ou l'autre des sections, et que, de ce point, est menée une certaine droite parallèle à l'une des tangentes et coupant la section et l'autre tangente, le rectangle compris par les droites découpées entre la section et la tangente sera au carré sur la droite découpée du côté du point de contact comme le sont entre eux les carrés sur les tangentes*.

Soient des opposées ΑΒ et ΜΝ, des tangentes ΑΓΛ et ΒΓΘ et des diamètres ΑΜ et ΒΝ passant par les points de contact ; que soit pris sur la section ΜΝ un point quelconque Δ, et que, par ce point, soit menée une parallèle ΕΔΖ à ΒΘ[122].

Je dis que le rectangle ΖΕ,ΕΔ est au carré sur ΑΕ comme le carré sur ΒΓ est à celui sur ΓΑ.

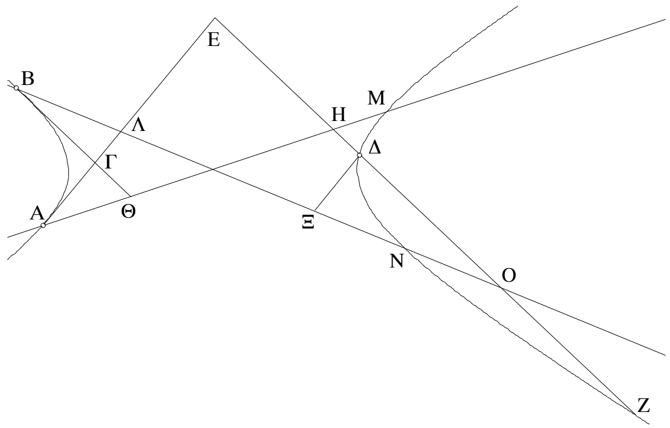


Fig. 18

Que soit menée par Δ une parallèle ΔΞ à ΑΕ.

Dès lors, puisque la section ΑΒ est une hyperbole, de diamètre ΒΝ, que ΒΘ est une tangente et que ΔΖ est parallèle à ΒΘ, alors ΖΟ est égale à ΟΔ[123] ; d'autre part, ΕΔ est ajoutée ; la somme du rectangle ΖΕ,ΕΔ et du

[122] Voir Note complémentaire [31].
[123] I.48.

ἴσον ἐστι τῷ ἀπὸ ΕΟ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΛ τῇ ΔΞ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΟΛ τρίγωνον τῷ ΔΞΟ. Ἔστιν ἄρα ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΟ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΔΟ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ.

Ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΟΕ πρὸς τὸ ΟΕΛ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον· ἴσον δὲ τὸ ΔΛ τετράπλευρον τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΛΓ τῷ ΑΓΘ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΘ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτω τὸ ΑΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ.

Δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.

– ιθʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις ἀλλήλας τέμνουσαι καὶ τὴν τομήν, ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτω τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΖ, ΖΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπό τινων σημείων ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ αἱ ΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

9 ΒΓΛ Ψ : ΒΓ V ‖ 15 ιθʹ V[5] : om. V ‖ 21 αἱ c v Ψ : iter. V (in extr. et pr. pag.) ‖ 23 ΜΝΞΟΛ Ψ : ΜΝΞΟ V ‖ 24 ΗΛΙ Ψ : ΗΜ V ‖ 25 ΜΛΞ Ψ : ΜΛΖ V.

carré sur ΔO est donc égale au carré sur EO[124].

Puisque EΛ est parallèle à ΔΞ, le triangle EOΛ est semblable au triangle ΔΞO[125]. Le carré retranché construit sur ΔO est donc au triangle retranché ΞΔO comme le carré entier construit sur EO est au triangle EOΛ[126] ; le rectangle restant ΔE,EZ est donc aussi au quadrilatère ΔΛ comme le carré sur EO est au triangle EOΛ[127].

Mais le carré sur BΓ est au triangle BΓΛ comme le carré sur OE est au triangle OEΛ[128] ; le carré sur BΓ est donc aussi au triangle BΓΛ comme le rectangle ZE,EΔ est au quadrilatère ΔΛ ; or le quadrilatère ΔΛ est égal au triangle AEH[129] et le triangle BΛΓ est égal au triangle AΓΘ[130] ; le carré sur BΓ est donc au triangle AΓΘ comme le rectangle ZE,EΔ est au triangle AEH. Or le triangle AΓΘ est au carré sur AΓ comme le triangle AEH est au carré sur EA[131].

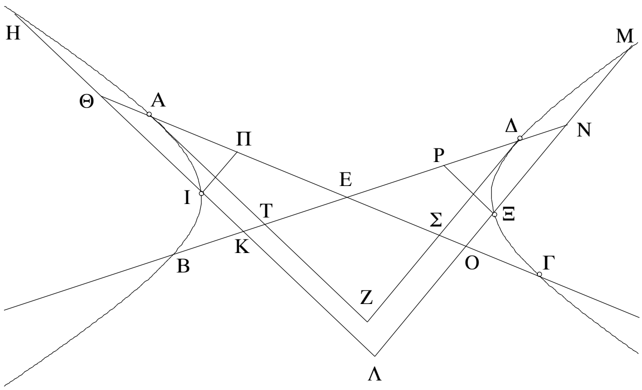
À *intervalle égal*, le rectangle ZE,EΔ est donc au carré sur EA comme le carré sur BΓ est au carré sur ΓA[132].

– 19 – *Si deux droites tangentes à des opposées se rencontrent, et que sont menées des parallèles aux tangentes, se coupant l'une l'autre ainsi que la section, le rectangle compris par les droites découpées entre la section et le point de rencontre des droites sera au rectangle compris par les droites prises pareillement comme le sont entre eux les carrés sur les tangentes.*

Soient des opposées, de diamètres AΓ et BΔ et de centre E ; que des tangentes AZ et ZΔ se rencontrent en un point Z, et que, de certains points, soient menées des parallèles HΘIKΛ et MNΞOΛ aux droites AZ et ZΔ.

Je dis que le rectangle HΛ,ΛI est au rectangle MΛ,ΛΞ comme le carré sur AZ est à celui sur ZΔ.

[124] *Éléments*, II.6.
[125] *Éléments*, I.29.
[126] *Éléments*, VI.19, V.16.
[127] *Éléments*, V.19.
[128] *Éléments*, VI.19 et V.16.
[129] Prop. 6.
[130] Prop. 1.
[131] *Éléments*, VI.19 et V.16.
[132] Dans son commentaire, Eutocius expose une autre démonstration trouvée dans ses manuscrits ; voir Note complémentaire [32].



Ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ διὰ τῶν Ξ, Ι αἱ ΙΠ, ΞΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ΘΛΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΘΙ πρὸς τὸ ΘΙΠ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς λοιπὸν τὸ ΙΠΟΛ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον· ἴσον δὲ τὸ ΑΖΣ τῷ ΔΖΤ καὶ τὸ ΠΟΛΙ τῷ ΚΡΞΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΤΖ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ΡΞΛΚ· ὡς δὲ τὸ ΔΤΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ΡΞΛΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

– κʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, ἀχθῇ δέ τις ἑτέρα εὐθεῖα παρὰ τὴν αὐτὴν τέμνουσα τάς τε τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

1 ΙΠ,ΞΡ Ψ : ΙΞ,ΠΡ V ‖ 6 ΗΛΙ Canon. : ΗΜ V ‖ 10 κʹ V[5] : om. V ‖ 17 εὐθειῶν Halley (jam Comm.) : εὐθείας V.

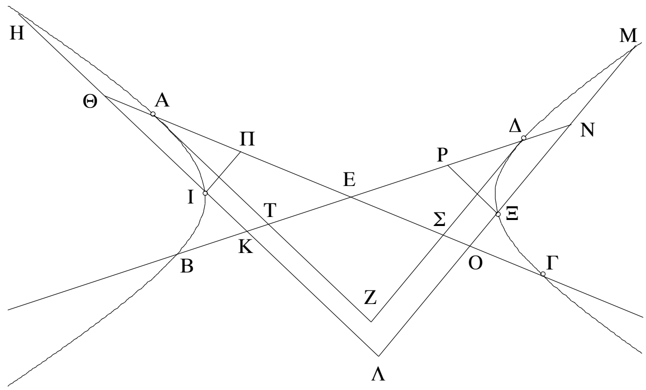


Fig. 19

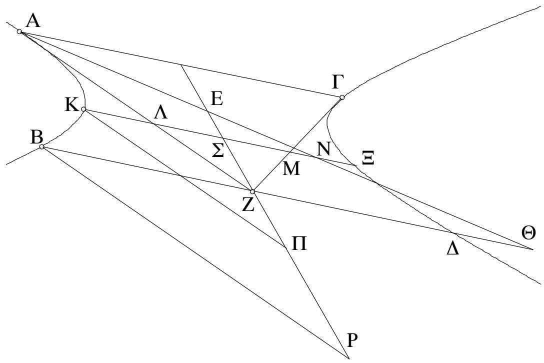
Puisque le carré sur ΘΛ est au triangle ΘΛΟ et que le carré sur ΘΙ est au triangle ΘΙΠ[133] comme le carré sur ΑΖ est au triangle ΑΖΣ, alors le rectangle restant ΗΛ,ΛΙ est aussi au quadrilatère restant ΙΠΟΛ comme le carré sur ΑΖ est au triangle ΑΖΣ[134] ; or le triangle ΑΖΣ est égal au triangle ΔΖΤ[135] et le quadrilatère ΠΟΛΙ est égal au quadrilatère ΚΡΞΛ[136] ; le rectangle ΗΛ,ΛΙ est donc aussi au quadrilatère ΡΞΛΚ comme le carré sur ΑΖ est au triangle ΔΤΖ ; or le quadrilatère ΡΞΛΚ est au rectangle ΜΛ,ΛΞ comme le triangle ΔΤΖ est au carré sur ΖΔ[137] ; *à intervalle égal*[138], le rectangle ΗΛ,ΛΙ est donc aussi au rectangle ΜΛ,ΛΞ comme le carré sur ΑΖ est à celui sur ΖΔ.

– 20 – *Si deux droites tangentes à des opposées se rencontrent, que, par le point de rencontre, est menée une certaine droite parallèle à la droite joignant les points de contact, que cette parallèle rencontre chacune des sections, qu'est menée une autre parallèle à la même droite, coupant les sections et les tangentes, le rectangle compris par les droites découpées entre les sections et la tangente est au carré sur la droite découpée du côté du point de contact comme le rectangle compris par les droites tombant du*

[133] *Éléments*, VI.19 et V.16.
[134] I.48 et *Éléments*, II.6 et V.19.
[135] Prop. 4.
[136] Prop. 7.
[137] *Éléments*, VI.19 ; I.48 ; *Éléments*, II.6 et V.19.
[138] L'opération est illustrée par des schémas marginaux dans **V**, voir Note complémentaire [33].

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὧν κέντρον τὸ Ε, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ αἱ ΕΖ, ΑΕ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΒΖΘ, καὶ εἰλήφθω ὃ ἔτυχε σημεῖον τὸ Κ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΚΛΣΜΝΞ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Β, παρὰ τὴν ΑΖ αἱ ΚΠ, ΒΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΚΣ πρὸς τὸ ΚΣΠ καὶ τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ΛΣΖ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΚΛΖΠ τετράπλευρον, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΒΖ τῷ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ δὲ ΒΡΖ τρίγωνον τῷ ΑΖΘ, τὸ δὲ ΚΛΖΠ τετράπλευρον τῷ ΑΛΝ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΑΛΝ. Ὡς δὲ τὸ ΑΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τὸ ΑΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

Δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

5 ΚΛΞ Canon. : ΛΚΞ V ‖ 9 ΚΣΠ Ψ : ἀπὸ ΚΣΠ V ‖ ΛΣΖ Canon. : ΛΕΖ V ‖ ΚΛΞ Canon. : ΛΚΞ V[1] ΛΚΖ V ‖ 12 ὑπὸ ΒΖΔ Canon. : ἀπὸ ΒΖ V ‖ pr. τὸ Ψ : om. V ‖ 13 ΚΛΞ Canon. : ΛΚΞ V ‖ ΑΛΝ Ψ : ΑΛΜ V ‖ 15 ΚΛΞ Canon. : ΛΚΞ V.

point de rencontre des tangentes sur les sections est au carré sur la tangente.

Soient des opposées ΑΒ et ΓΔ, de centre Ε et de tangentes ΑΖ et ΓΖ ; que soit menée une droite de jonction ΑΓ ; que soient aussi menées des droites de jonction ΕΖ et ΑΕ et qu'elles soient prolongées[139] ; que soit menée par Ζ une parallèle ΒΖΘ à ΑΓ ; que soit pris un point quelconque Κ, et que, par ce point, soit menée une parallèle ΚΛΣΜΝΞ à ΑΓ.

Je dis que le rectangle ΚΛ,ΛΞ est au carré sur ΑΛ comme le rectangle ΒΖ,ΖΔ est au carré sur ΖΑ.

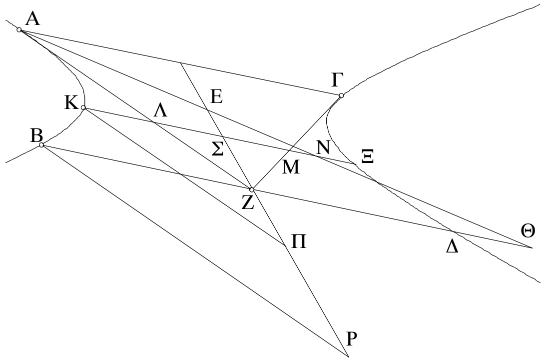


Fig. 20

Que soient menées par Κ et Β des parallèles ΚΠ et ΒΡ à ΑΖ.

Dès lors, puisque le carré sur ΚΣ est au triangle ΚΣΠ, que le carré sur ΛΣ est au triangle ΛΣΖ et que le rectangle restant ΚΛ,ΛΞ est au quadrilatère ΚΛΖΠ comme le carré sur ΒΖ est au triangle ΒΖΡ[140], que le carré sur ΒΖ est égal au rectangle ΒΖ,ΖΔ[141], que le triangle ΒΡΖ est égal au triangle ΑΖΘ[142] et que le quadrilatère ΚΛΖΠ est égal au triangle ΑΛΝ[143], alors le rectangle ΚΛ,ΛΞ est au triangle ΑΛΝ comme le rectangle ΒΖ,ΖΔ est au triangle ΑΖΘ. Or le triangle ΑΛΝ est au carré sur ΑΛ comme le triangle ΑΖΘ est au carré sur ΑΖ[144].

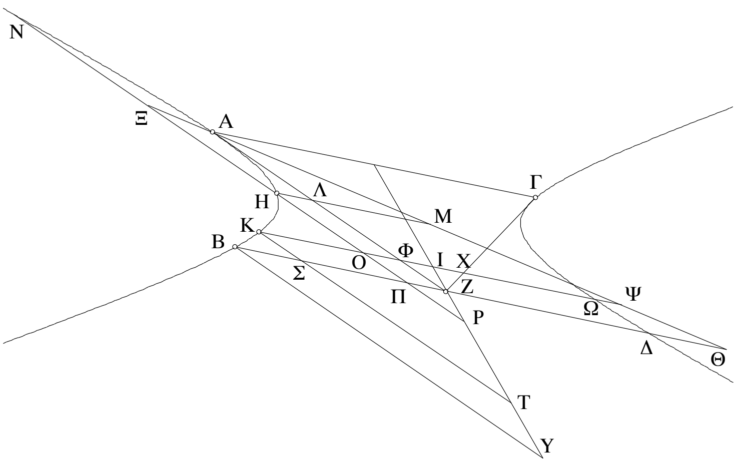
À intervalle égal, le rectangle ΚΛ,ΛΞ est donc au carré sur ΑΛ comme le rectangle ΒΖ,ΖΔ est au carré sur ΖΑ.

139 Voir Note complémentaire [8].
140 *Éléments*, VI.19, V.16 et II.5.
141 Prop. II.39 et II.38.
142 Prop. 11.
143 Prop. 11.
144 *Éléments*, VI.19 et V.16

– κα´ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὰς τομάς, ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως <τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως> εὐθειῶν.

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, εἰλήφθω δὲ σημεῖα τὰ Η, Κ, καὶ δι᾽ αὐτῶν ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ αἱ ΝΞΗΟΠΡ, ΚΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΑΓ αἱ ΗΛΜ, ΚΟΦΙΧΩΨ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΑΛΜ καὶ τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς τὸ ΞΟΨ καὶ τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς τὸ ΞΗΜ, ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς ὅλον τὸ ΞΟΨ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΗΜ. Καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΗΟΨΜ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ.

1 κα´ V^{5} : om. V ‖ 7-8 τῶν — συμπτώσεως addidi vide adn. ‖ 9 σημεῖα τὰ Η, Κ Federspiel^{5} : τὰ Η, Κ σημεῖα V ‖ 11 ΚΟΦΙΧΩΨ ego vide adn. : ΚΟΦΙΧΨΩ V ‖ 16 tert. τὸ e corr. V^{1}.

– 21 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, sur la section, sont pris deux points, que, par ces points, sont menées des droites se coupant l'une l'autre et coupant les sections, l'une parallèle à la tangente, l'autre parallèle à la droite joignant les points de contact, le rectangle compris par les droites découpées entre les sections et le point de rencontre* <*des droites sera au rectangle compris par les droites découpées entre la section et le point de rencontre*>[145] *comme le rectangle compris par les droites tombant du point de rencontre des* <*tangentes*> *sur les sections est au carré sur la tangente.*

Toutes choses égales d'ailleurs, que soient pris des points Η et Κ[146], et que, par ces points, soient menées des parallèles ΝΞΗΟΠΡ et ΚΣΤ à ΑΖ et des parallèles ΗΛΜ et ΚΟΦΙΧΩΨ[147] à ΑΓ.

Je dis que le rectangle ΚΟ,ΟΩ est au rectangle ΝΟ,ΟΗ comme le rectangle ΒΖ,ΖΔ est au carré sur ΖΑ.

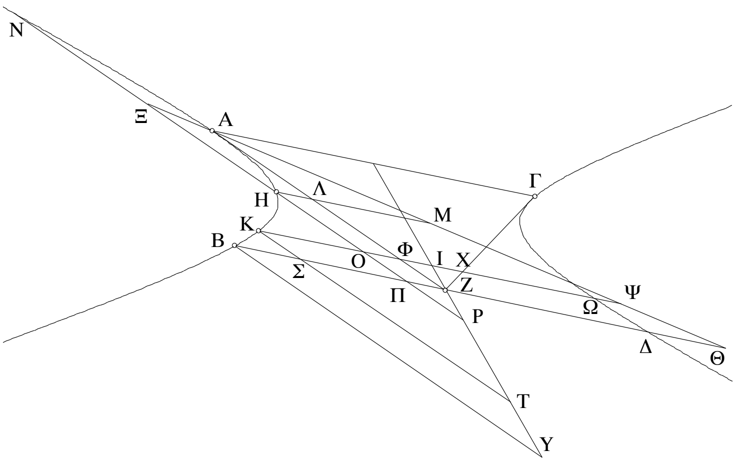


Fig. 21

Puisque le carré sur ΑΛ est au triangle ΑΛΜ, que le carré sur ΞΟ est au triangle ΞΟΨ et que le carré sur ΞΗ est au triangle ΞΗΜ comme le carré sur ΑΖ est au triangle ΑΖΘ[148], alors le carré retranché sur ΞΗ est au triangle retranché ΞΗΜ comme le carré entier sur ΞΟ est au triangle entier ΞΟΨ ; le rectangle restant ΝΟ,ΟΗ est donc aussi au quadrilatère restant

[145] Voir Note complémentaire [34].
[146] La rédaction est rapide. On attend la mention de la section ΑΒ.
[147] La figure représentée dans **V** impose cet ordre des lettres.
[148] *Éléments*, VI.19 et V.16.

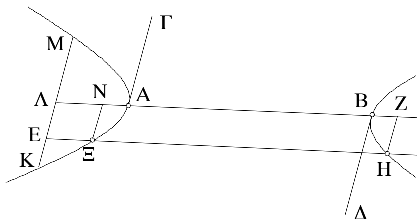
Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΖΘ τῷ ΒΥΖ, τὸ δὲ ΗΟΨΜ τῷ ΚΟΡΤ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΒΖΥ, τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ΚΟΡΤ· ὡς δὲ τὸ ΒΥΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ΚΟΡΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ.

Καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.

– κβʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἐπιψαύωσιν, ἀχθῶσι δέ τινες εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται ὡς ἡ τοῦ πρὸς τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ <τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ> τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι ἔστωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. Διήχθωσαν δὴ ἡ μὲν ΕΞΗ παρὰ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΚΕΛΜ παρὰ τὴν ΑΓ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν τοῦ εἴδους πλευράν, τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.



2 ΚΟΡΤ Canon. : ΚΟΡΠ V ‖ 4 ΚΟΡΤ V^1 : ΚΟΡΠ V ‖ 6 ΚΟΩ V^1 : ΚΟ,ΟΩ V ‖ 8 κβʹ V^5 : om. V ‖ 11 ἡ Ψ : om. V ‖ 12 πλευρὰ v Ψ : πλευρᾷ V ‖ 13-14 τῶν — μεταξὺ add. Mont. ‖ 16 δὴ V : δὲ Halley ‖ 17 ΚΕΛΜ Ψ : ΕΚΛΜ V.

HOΨM comme le carré sur AZ est au triangle AZΘ[149].

Or le triangle AZΘ est égal au triangle BYZ[150] et le quadrilatère HOΨM est égal au quadrilatère KOPT[151] ; le rectangle NO,OH est donc au quadrilatère KOPT comme le carré sur AZ est au triangle BZY ; or on a démontré que le quadrilatère KOPT était au rectangle KO,OΩ comme le triangle BYZ est au carré sur BZ[152], c'est-à-dire au rectangle BZ,ZΔ ; *à intervalle égal*, le rectangle NO,OH est donc au rectangle KO,OΩ comme le carrré sur AZ est au rectangle BZ,ZΔ[153].

Par inversion, le rectangle KO,OΩ est au rectangle NO,OH comme le rectangle BZ,ZΔ est au carré sur ZA.

– 22 – *Si deux droites parallèles sont tangentes à des opposées, et que sont menées certaines droites se coupant l'une l'autre et coupant les sections, l'une parallèle à la tangente, l'autre parallèle à la droite joignant les points de contact, le rectangle compris par les droites découpées entre <les sections et le point de rencontre sera au rectangle compris par les droites découpées entre> la section et le point de rencontre comme le côté transverse de la figure appliquée à la droite joignant les points de contact est au côté droit*.

Soient des opposées A et B ; que des tangentes AΓ et BΔ aux sections soient parallèles, et que soit menée une droite de jonction AB. Que soient menées[154] une parallèle EΞH à AB et une parallèle KEΛM à AΓ.

Je dis que le rectangle HE,EΞ est au rectangle KE,EM comme AB est au côté droit de la figure.

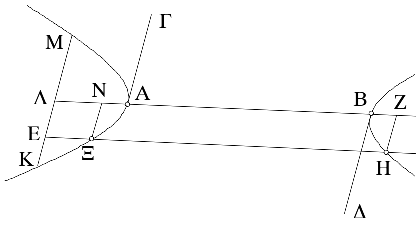


Fig. 22

[149] I.47 ; *Éléments*, II.6 et V.19.

[150] Prop. 11.

[151] Prop. 12.

[152] Voir Prop. 20.

[153] L'opération est illustrée par des schémas marginaux dans **V**, voir Note complémentaire [35].

[154] Voir Note complémentaire [36].

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ξ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΞΝ, ΗΖ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν παράλληλοί εἰσι, διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ᾽ αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΛ, ΞΝ, ΗΖ· ἔσται οὖν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, τό τε ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΝΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ. Ἔστιν ἄρα ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΚΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΒΝΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΑΝ — ἴση γὰρ ἡ ΝΑ τῇ ΒΖ — πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΕ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΝ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΕΜ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΖΛΝ τῷ ὑπὸ ΗΕΞ.

Ὡς ἄρα ἡ ΑΒ τοῦ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.

– κγ´ – Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τῶν κατ᾽ ἐναντίον τομῶν ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἐντὸς μιᾶς ἧς ἔτυχον τομῆς, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς ἑτέρας ἀντικειμένας, ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ Κ, καὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΛ ἤχθω ἡ ΗΜΝΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΛ ἡ ΘΠΡΞΣ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

13 κγ´ V[5] : om. V ‖ 14 συμπίπτωσιν V[1] : συμπίπτουσιν V ‖ ἐντὸς ego e prop. 25 : ἐπὶ V ‖ 24 ἡ ΗΜΝΞΟ Ψ : ΜΝΞΟ V ‖ ΕΛ V[1] : ΕΘ V.

Que soient menées par Η et Ξ des parallèles ΞΝ et ΗΖ à ΑΓ.

Puisque les tangentes ΑΓ et ΒΔ aux sections sont parallèles, ΑΒ est un diamètre, et les droites ΚΛ, ΞΝ et ΗΖ sont des droites abaissées sur ΑΒ de manière ordonnée[155]. Le rectangle ΒΛ,ΛΑ sera donc au carré sur ΛΚ, et le rectangle ΒΝ,ΝΑ au carré sur ΝΞ, c'est-à-dire à celui sur ΛΕ, comme ΑΒ est au côté droit[156]. Le rectangle retranché ΒΝ,ΝΑ, c'est-à-dire le rectangle ΖΑ,ΑΝ (puisque ΝΑ est égale à ΒΖ[157]), est donc au carré retranché sur ΛΕ comme le rectangle entier ΒΛ,ΛΑ est au carré entier sur ΚΛ ; le rectangle restant ΖΛ,ΛΝ[158] est donc aussi au rectangle restant ΚΕ,ΕΜ[159] comme ΑΒ est au côté droit[160]. Or le rectangle ΖΛ,ΛΝ est égal au rectangle ΗΕ,ΕΞ.

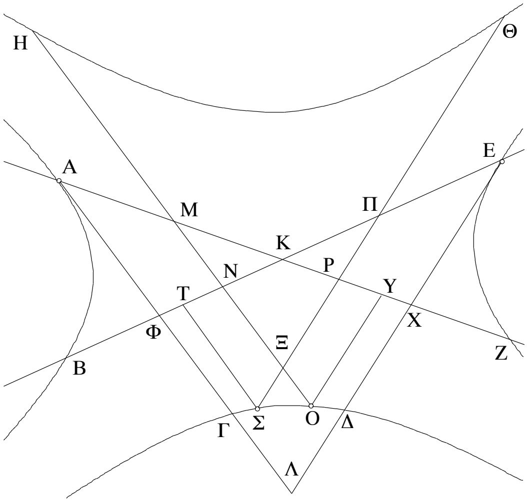
Le rectangle ΗΕ,ΕΞ est donc au rectangle ΚΕ,ΕΜ comme le côté transverse ΑΒ de la figure est au côté droit.

– 23 – *Si, dans des opposées conjuguées, deux droites tangentes à des sections opposées*[161] *se rencontrent à l'intérieur d'une section quelconque, et que sont menées certaines droites parallèles aux tangentes, se coupant l'une l'autre et coupant les autres opposées, le rectangle compris par les droites découpées entre les sections et le point de rencontre est au rectangle compris par les droites prises pareillement comme le sont entre eux les carrés sur les tangentes.*

Soient des opposées conjuguées ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ et ΗΘ, de centre Κ ; que des tangentes ΑΦΓΛ et ΕΧΔΛ aux sections ΑΒ et ΕΖ se rencontrent en un point Λ ; que soient menées des droites de jonction ΑΚ et ΕΚ et qu'elles soient prolongées jusqu'en des points Β et Ζ ; que, de Η, soient menées une parallèle ΗΜΝΞΟ à ΑΛ, et, de Θ, une parallèle ΘΠΡΞΣ à ΕΛ.

Je dis que le rectangle ΘΞ,ΞΣ est au rectangle ΗΞ,ΞΟ comme le carré sur ΕΛ est à celui sur ΛΑ.

[155] II.31.
[156] I.21.
[157] Voir I.16.
[158] La démonstration de ce résultat fait l'objet du *lemme* 4 de Pappus (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 161, 3-14).
[159] I.47 et *Éléments*, II.5.
[160] *Éléments*, V.19.
[161] Voir Note complémentaire [37].



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Σ παρὰ μὲν τὴν ΑΛ ἡ ΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΕΛ ἀπὸ τοῦ Ο ἡ ΟΥ.

Ἐπεὶ οὖν συζυγῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΕ, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΕΛ, καὶ παρ᾽ αὐτὴν ἦκται ἡ ΘΣ, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΠ τῇ ΠΣ, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΗΜ τῇ ΜΟ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΦΛ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ΠΤΣ καὶ τὸ ἀπὸ ΠΞ πρὸς τὸ ΠΝΞ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΤΝΞΣ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΦΛΕ τρίγωνον· ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΦΛ τρίγωνον τῷ ΑΛΧ, τὸ δὲ ΤΝΞΣ τετράπλευρον τῷ ΞΡΥΟ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΧ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΞΟΥΡ τετράπλευρον. Ἔστι δὲ ὡς τὸ ΑΧΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ ΞΡΥΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

Δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

2 Ο ἡ ΟΥ Canon. : ΟΗ, ΟΥ V ‖ 8 ΘΞΣ Canon. : ΘΣΞ V^1 ΘΓΞ V ‖ 13 τὸ ὑπὸ Ψ : τοῦ V.

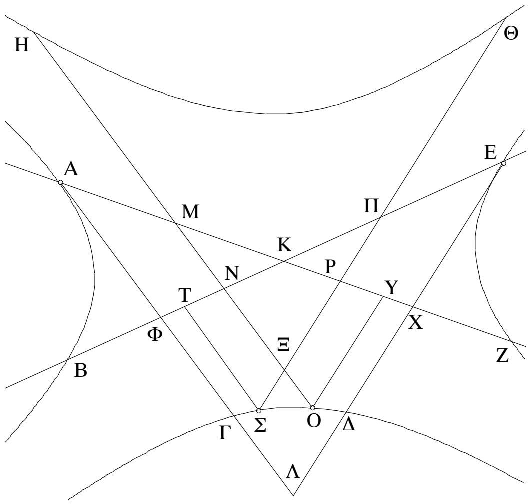


Fig. 23

Que soit menée par Σ une parallèle ΣΤ à ΑΛ et, par Ο, une parallèle ΟΥ à ΕΛ.

Dès lors, puisque ΒΕ est un diamètre des sections opposées conjuguées ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ et ΗΘ, que ΕΛ est tangente à la section, qu'est menée une parallèle ΘΣ à la tangente, ΘΠ est égale à ΠΣ[162] et, pour les mêmes raisons, ΗΜ est égale à ΜΟ.

Puisque le carré sur ΠΣ est au triangle ΠΤΣ et que le carré sur ΠΞ est au triangle ΠΝΞ comme le carré sur ΕΛ est au triangle ΕΦΛ[163], le rectangle restant ΘΞ,ΞΣ[164] est aussi au quadrilatère ΤΝΞΣ comme le carré sur ΕΛ est au triangle ΦΛΕ[165] ; or le triangle ΕΦΛ est égal au triangle ΑΛΧ[166] et le quadrilatère ΤΝΞΣ est égal au quadrilatère ΞΡΥΟ[167] ; le rectangle ΘΞ,ΞΣ est donc au quadrilatère ΞΟΥΡ comme le carré sur ΕΛ est au triangle ΑΛΧ. Or le quadrilatère ΞΡΥΟ est au rectangle ΗΞ,ΞΟ comme le triangle ΑΧΛ est au carré sur ΑΛ[168].

À intervalle égal, le rectangle ΘΞ,ΞΣ est donc au rectangle ΗΞ,ΞΟ comme le carré sur ΕΛ est à celui sur ΑΛ[169].

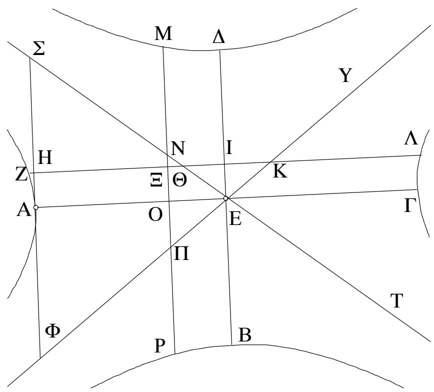
[162] I. *Premières définition*s 5 et II.20.
[163] *Éléments*, VI.19 et V.16.
[164] *Éléments*, II.5.
[165] *Éléments*, V.19.
[166] Prop. 4.
[167] L'égalité est obtenue à partir de la relation de la prop. 15.
[168] *Éléments*, VI.19 et V.16 ; *Éléments*, II.5.
[169] Sur le témoignage d'Eutocius, voir Note complémentaire [38].

– κδ΄ – Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἀπὸ τοῦ κέντρου διαχθῶσι πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν πλαγία διάμετρος, ἡ δὲ ὀρθία, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς δύο διαμέτρους συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, ἡ δὲ σύμπτωσις ᾖ τῶν εὐθειῶν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τεσσάρων τομῶν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον, ἴσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ ὧν κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε διήχθωσαν ἥ τε ΑΕΓ πλαγία καὶ ἡ ΔΕΒ ὀρθία, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΔΒ ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ξ.

Ἔστω δὲ πρότερον τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΦ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ ΥΕΤ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ ΜΞΡ ὃν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΣΕΤ, ΥΕΦ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΣΗΑΦ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΣΑΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΕ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ· τὸ δὲ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΣΑ πρὸς ΑΕ καὶ τοῦ τῆς ΦΑ πρὸς ΑΕ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΣΑ πρὸς

1 κδ΄ V^5 : om. V ‖ 5 ἐν c v Ψ : fere evan. V ‖ 7 ὃ λόγον Ψ : ὅλον V ‖ 8 ὃν v Ψ : ὂν V ‖ 20 ΣΗΑΦ edd. : ΑΗΣΦ V.

– 24 – *Si, dans des opposées conjuguées, sont menées deux droites du centre jusqu'aux sections, dont l'une est dite le diamètre droit et l'autre le diamètre transverse, que sont menées certaines parallèles aux deux diamètres, se rencontrant entre elles et rencontrant les sections, que le point de rencontre des droites est dans le lieu compris entre les quatre sections, la somme du rectangle compris par les segments de la parallèle au diamètre tranverse et du rectangle avec lequel le rectangle, compris par les segments de la parallèle au diamètre droit, a un rapport identique à celui du carré sur le diamètre droit au carré sur le diamètre transverse, sera égale au double du carré sur la moitié du diamètre transverse*.

Soient des opposées conjuguées Α, Β, Γ et Δ, de centre Ε ; que, de Ε, soient menés le diamètre transverse ΑΕΓ et le diamètre droit ΔΕΒ ; que soient menées des parallèles ΖΗΘΙΚΛ et ΜΝΞΟΠΡ à ΑΓ et à ΔΒ, qui se rencontrent entre elles en un point Ξ.

Que Ξ soit d'abord à l'intérieur de l'angle ΣΕΦ ou de l'angle ΥΕΤ.

Je dis que la somme du rectangle ΖΞΛ et du rectangle avec lequel le rectangle ΜΞ,ΞΡ a un rapport identique à celui du carré sur ΔΒ au carré sur ΑΓ, sera égale au double du carré sur ΑΕ.

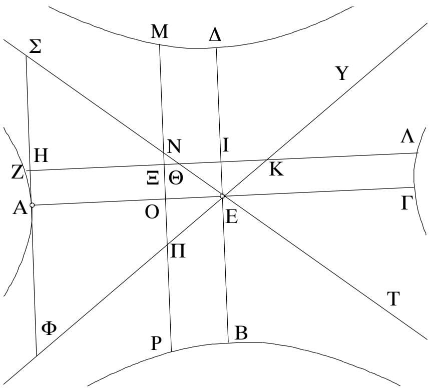


Fig. 24.1

Que soient menées les asymptotes ΣΕΤ et ΥΕΦ des sections et, par Α, une tangente ΣΗΑΦ à la section.

Dès lors, puisque le rectangle ΣΑ,ΑΦ est égal au carré sur ΔΕ[170], le carré sur ΔΕ est à celui sur ΕΑ comme le rectangle ΣΑ,ΑΦ est au carré sur ΕΑ ; or le rectangle ΣΑ,ΑΦ a, avec le carré sur ΑΕ, un rapport composé des rapports de ΣΑ à ΑΕ et de ΦΑ à ΑΕ ; mais ΝΞ est à ΞΘ

[170] I.60 et II.1.

ΑΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΘ, ὡς δὲ ἡ ΦΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΠΞ πρὸς ΞΚ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΝΞ πρὸς ΞΘ καὶ τοῦ τῆς ΠΞ πρὸς ΞΚ.

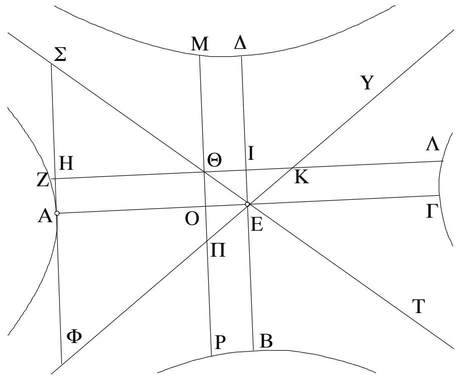
Σύγκειται δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. Καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ.

Ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΡΝΜ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΘΖ· ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ τῷ ὑπὸ ΡΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ.

Δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΑ.

Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. Ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΘΖ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ.

Συμπιπτέτωσαν δὴ αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὸ Θ.



9 ΛΘΖ Canon. : ΛΘΞ V ‖ 11 ΛΘΖ Canon. : ΛΘΞ V ‖ 12 ΡΝΜ Ψ : ΡΜΝ V ‖ 19 ΛΘΖ Canon. : ΛΖΘ V.

comme ΣA est à AE, et ΠΞ est à ΞK comme ΦA est à AE[171] ; le rapport du carré sur ΔE à celui sur AE est donc composé des rapports de NΞ à ΞΘ et de ΠΞ à ΞK.

Or le rapport du rectangle ΠΞ,ΞN au rectangle KΞ,ΞΘ est composé des mêmes rapports ; le rectangle ΠΞ,ΞN est donc au rectangle KΞ,ΞΘ comme le carré sur ΔE est à celui sur AE. La somme du carré sur ΔE et du rectangle ΠΞ,ΞN est donc à la somme du carré sur AE et du rectangle KΞ,ΞΘ comme le carré sur ΔE est à celui sur AE.

Or le carré sur ΔE est égal au rectangle ΠM,MN[172], c'est-à-dire au rectangle PN,NM[173], et le carré sur AE est égal au rectangle KZ,ZΘ, c'est-à-dire au rectangle ΛΘ,ΘZ ; la somme du rectangle ΠΞ,ΞN et du rectangle PN,NM est donc à la somme du rectangle KΞ,ΞΘ et du rectangle ΛΘ,ΘZ comme le carré sur ΔE est à celui sur EA ; or la somme du rectangle ΠΞ,ΞN et du rectangle PN,NM est égale au rectangle PΞ,ΞM[174] ; le rectangle PΞ,ΞM est donc à la somme du rectangle KΞ,ΞΘ et du rectangle KZ,ZΘ comme le carré sur ΔE est à celui sur EA.

Il faut donc démontrer que la somme du rectangle ZΞ,ΞΛ, du rectangle KΞ,ΞΘ et du rectangle KZ,ZΘ est égale au double du carré sur EA.

Que soit retranché le carré commun sur AE, c'est-à-dire le rectangle KZ,ZΘ ; il reste donc à démontrer que la somme du rectangle KΞ,ΞΘ et du rectangle ΛΞ,ΞZ est égale au carré sur AE. Or elle l'est ; en effet, la somme du rectangle KΞ,ΞΘ et du rectangle ΛΞ,ΞZ est égale au rectangle ΛΘ,ΘZ[175], c'est-à-dire au rectangle KZ,ZΘ, c'est-à-dire au carré sur AE.

Que les droites ZΛ et MP se rencontrent sur l'une des asymptotes en un point Θ.

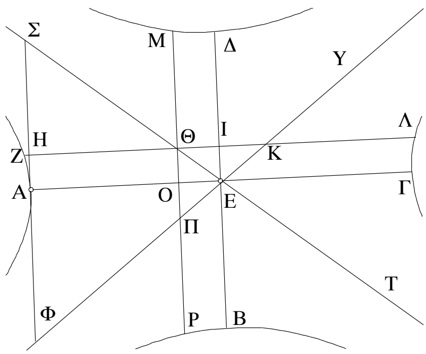
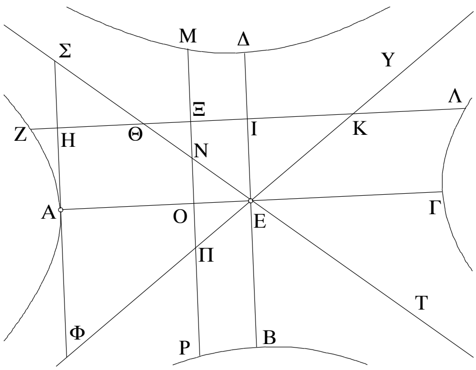


Fig. 24. 2

[171] *Éléments*, VI.4.
[172] II.11.
[173] II.16.
[174] Voir le *lemme* 5b chez Pappus (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 161, 15-17).
[175] Voir le *lemme* 5a chez Pappus (*ibid*., p. 161, 18-20).

Ἴσον δή ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ τῷ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ὑπὸ ΜΘΡ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΜΘΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΛ, ὥστε τὸ δὶς ὑπὸ ΖΘΛ ἴσον ζητοῦμεν τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. Ἔστι δέ.

Ἔστω δὲ τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΚ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ ΦΕΤ.



Ἔσται δὴ ὁμοίως διὰ τὴν συναφὴν τῶν λόγων ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· τῷ δὲ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΝΜ, τῷ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΖ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΚΞΘ · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὴν τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ <ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ>.

Δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.

Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. Ἔστι δέ· τὸ γὰρ ἔλασσον τὸ ὑπὸ ΚΞΘ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχὴν ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι τῷ ἀπὸ ΑΕ.

8 pr. τὸ Ψ : τῷ V ‖ 9 pr. τὸ c : τῷ V ‖ alt. ΛΘΖ Canon. : ΘΛΖ V ‖ 12 ὡς — ΕΑ add. Halley (jam Comm.) ‖ 17 τοῦ — ΑΕ c Ψ : iter. V.

Le rectangle ZΘ,ΘΛ est alors égal au carré sur AE, et le rectangle MΘ,ΘP est égal au carré sur ΔE[176] ; le rectangle MΘ,ΘP est donc au rectangle ZΘ,ΘΛ comme le carré sur ΔE est à celui sur EA, de sorte que, ce que nous cherchons, c'est l'égalité du double du rectangle ZΘ,ΘΛ au double du carré sur AE. Or cette égalité est vérifiée.

Que Ξ soit à l'intérieur de l'angle ΣEK ou de l'angle ΦET.

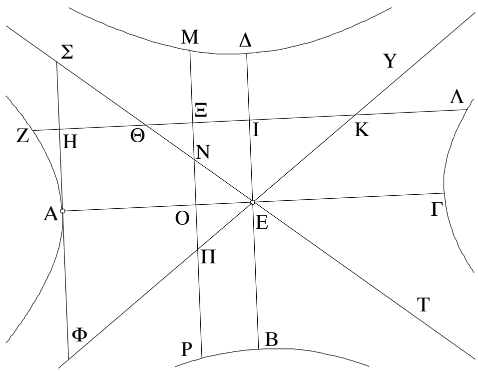


Fig. 24, 3[177]

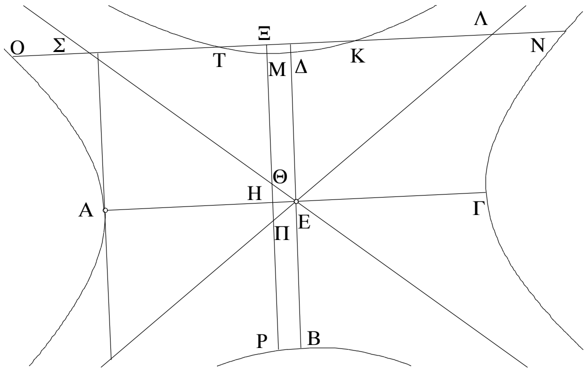
Alors, pareillement, en vertu de la composition des rapports, le rectangle ΠΞ,ΞN sera au rectangle KΞ,ΞΘ comme le carré sur ΔE est à celui sur EA[178] ; or le rectangle ΠM,MN, c'est-à-dire le rectangle PN,NM, est égal au carré sur ΔE, et le rectangle ΛΘ,ΘZ est égal au carré sur AE ; le rectangle retranché ΠΞ,ΞN est donc au rectangle retranché KΞ,ΞΘ comme le rectangle PN,NM est au rectangle ΛΘ,ΘZ ; le rectangle restant PΞ,ΞM[179] est donc aussi à l'excès restant dont le carré AE excède le rectangle KΞ,ΞΘ < comme le carré sur ΔE est à celui sur EA>[180].

Il faut donc démontrer que le rectangle ZΞ,ΞΛ, augmenté de l'excès dont le carré sur AE excède le rectangle KΞ,ΞΘ, est égale au double du carré sur AE. Que soit retranché le carré commun sur AE, c'est-à-dire rectangle ZΘ,ΘΛ. Il reste donc à démontrer[181] que le rectangle KΞ,ΞΘ[182], augmenté de l'excès dont le carré sur AE excède le rectangle KΞ,ΞΘ, est égale au carré sur AE. Or il l'est, puisque le petit rectangle KΞ,ΞΘ, augmenté de l'excès, est égal au grand carré sur AE.

176 Prop. II.11 et II.16.
177 Cette figure est absente dans **V**.
178 I.60 et II.1 ; *Éléments*, VI.4.
179 Voir le *lemme* 5a chez Pappus.
180 *Éléments*, V.19.
181 Voir Note complémentaire [39].
182 Voir le *lemme* 5b chez Pappus.

– κε΄ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἐντὸς μιᾶς τῶν Δ, Β τομῶν, ὡς ὑπόκειται, κατὰ τὸ Ξ.

Λέγω ὅτι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΜ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, μεῖζον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.



Διὰ γὰρ τὰ αὐτά ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΞΛ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ τῷ ὑπὸ ΛΟΣ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΟΣ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς ὅλον τὸ ὑπὸ ΛΞΣ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΛΟΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΣΤΛ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΤΞΚ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ.

1 κε΄ V^{5} : om. V ‖ 11 alt. ὑπὸ c v Ψ : iter. V ‖ τὸ Ψ : τῷ V ‖ 12 ΛΟΣ V^{1} : ΛΟ,ΟΣ V ‖ 16 ΣΤΛ Halley (jam Comm.) : ΝΣΟ V.

– 25 – Les mêmes hypothèses étant faites, que le point de rencontre des parallèles à ΑΓ et ΒΔ soit à l'intérieur de l'une des sections Δ et Β, comme on voit sur la figure, au point Ξ.

Je dis que le rectangle compris par les segments de la parallèle au diamètre transverse, c'est-à-dire le rectangle ΟΞ,ΞΝ, sera plus grand du double du carré sur la moitié du diamètre transverse que l'aire avec laquelle le rectangle compris par les segments de la parallèle au diamètre droit, c'est-à-dire le rectangle ΡΞ,ΞΜ, a un rapport identique à celui du carré sur le diamètre droit au carré sur le côté tranverse.

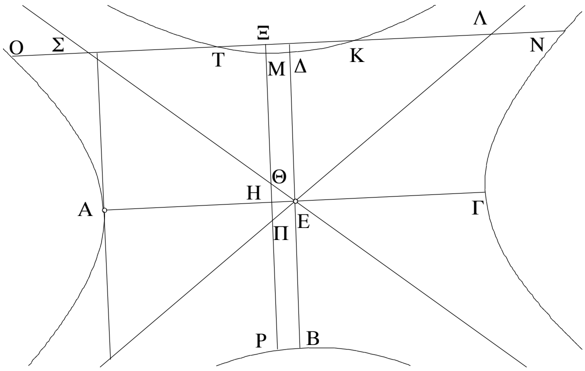


Fig. 25

Pour les mêmes raisons, le rectangle ΠΞ,ΞΘ est au rectangle ΣΞ,ΞΛ comme le carré sur ΔΕ est à celui sur ΕΑ ; or le carré sur ΔΕ est égal au rectangle ΠΜ,ΜΘ[183], et le carré sur ΑΕ est égal au rectangle ΛΟ,ΟΣ ; le rectangle ΠΜ,ΜΘ est donc aussi au rectangle ΛΟ,ΟΣ comme le carré sur ΔΕ est à celui sur ΑΕ.

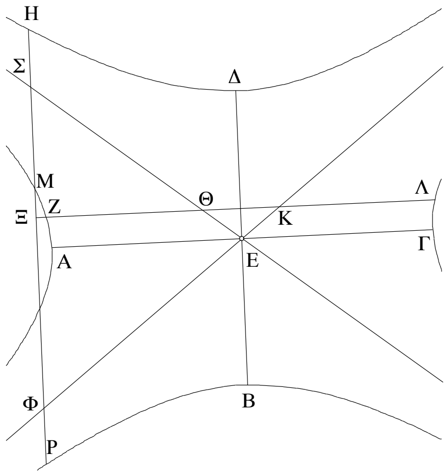
Puisque le rectangle retranché ΠΜ,ΜΘ est au rectangle retranché ΛΟ,ΟΣ, c'est-à-dire au rectangle ΣΤ,ΤΛ[184], comme le rectangle entier ΠΞ,ΞΘ est au rectangle entier ΛΞ,ΞΣ, le rectangle restant ΡΞ,ΞΜ[185] est donc aussi au rectangle restant ΤΞ,ΞΚ[186] comme le carré sur ΔΕ est à celui sur ΑΕ[187].

[183] II.11.
[184] II.22.
[185] II.16 et Pappus, *lemme* 4.
[186] II.8 et Pappus, *lemme* 5b.
[187] *Éléments*, V.19.

Δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ τοῦ ὑπὸ ΤΞΚ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.

Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΤΞΚ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΤΝ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ Α. Ἔστι δέ.

– κϛʹ – Ἐὰν δὲ ἡ κατὰ τὸ Ξ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ἐντὸς ᾖ μιᾶς τῶν Α, Γ τομῶν, ὡς ὑπόκειται, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΗ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, ἔλασσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.



Ἐπεὶ γὰρ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΦΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΗ λόγον ἔχει τὸν τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ.

5 κϛʹ V[5] : om. V ‖ 13 τοῦ ἀπὸ Ψ : ἀπὸ τοῦ V ‖ 14 πρὸς — ΑΕ V : post ΡΞΗ [l. 13] transp. Ψ post ἔχει [l. 13] transp. Halley.

Il faut donc démontrer que le rectangle ΟΞ,ΞΝ est plus grand que le rectangle ΤΞ,ΞΚ du double du carré sur ΑΕ.

Que soit retranché le rectangle commun ΤΞ,ΞΚ ; il reste donc à démontrer que le rectangle ΟΤ,ΤΝ[188] est égal au double du carré sur ΑΕ. Or il l'est[189].

– 26 – Mais, si la rencontre au point Ξ[190] est à l'intérieur de l'une des sections Α et Γ, comme on voit sur la figure, le rectangle compris par les segments de la parallèle au diamètre transverse, c'est-à-dire le rectangle ΛΞ,ΞΖ, sera plus petit, du double du carré sur la moitié du diamètre transverse, que l'aire avec laquelle le rectangle compris par les segments de l'autre parallèle, c'est-à-dire le rectangle ΡΞ,ΞΗ, a un rapport identique à celui du carré sur le diamètre droit au carré sur le diamètre transverse.

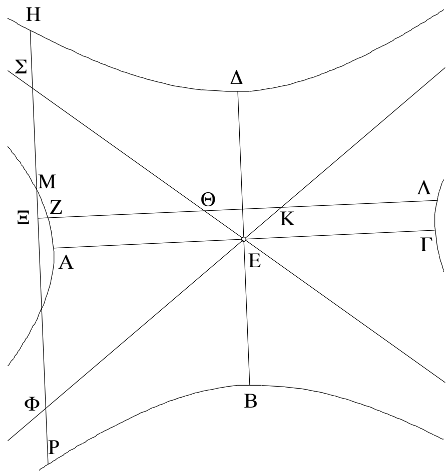


Fig. 26

Puisque, pour les mêmes raisons qu'auparavant, le rectangle ΦΞ,ΞΣ est au rectangle ΚΞ,ΞΘ comme le carré sur ΔΕ est à celui sur ΕΑ, le rectangle entier ΡΞ,ΞΗ a, avec la somme du rectangle ΚΞ,ΞΘ et du carré sur ΑΕ, un rapport identique à celui du carré sur le diamètre droit au carré sur le diamètre transverse[191].

[188] II.8 et II.16 et Pappus, *lemme* 5b.
[189] II.23.
[190] Voir Note complémentaire [40].
[191] II.11 et II.16 et Pappus, *lemme* 5b.

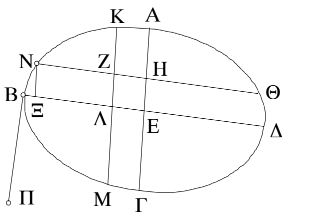
Δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἔλασσόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.

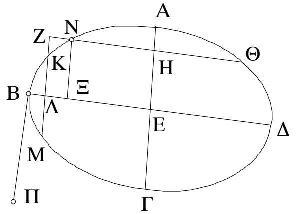
Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ ΛΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ ἔλασσόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ. Ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΛΘΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΞΘ.

– κζʹ – Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, καὶ παρ' αὐτὰς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ γραμμῇ, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εἴδη τῷ ὑποκειμένῳ εἴδει πρὸς τῇ ὀρθίᾳ διαμέτρῳ ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου τετραγώνῳ.

Ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ ἧς κέντρον τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο συζυγεῖς διάμετροι, ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἤχθωσαν αἱ ΝΖΗΘ, ΚΖΛΜ.

Λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΜ εἴδη ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ.





1 ΛΞΖ V^1 : ΛΞΘ V ‖ 4 pr. τῷ c Ψ : τοῦ corr. e τῷ V^1 ‖ 7 κζʹ V^5 : om. V ‖ 10 ἐπ' εὐθείας V : an ἀπὸ τῆς εὐθείας ? ‖ 13 ἐπ' εὐθείας V : an ἀπὸ τῆς εὐθείας ? ‖ 16 διαμέτρῳ Ψ : μέτρῳ V ‖ 21 ΝΖ V^1 : ΝΞ V.

Il faut donc démontrer que la somme du rectangle ΛΞ,ΞZ et du carré sur AE est plus petite que le rectangle KΞ,ΞΘ du double du carré sur AE.

Que soit retranché le carré commun sur AE; il reste donc à démontrer que le rectangle ΛΞ,ΞZ est plus petit que le rectangle KΞ,ΞΘ du carré sur AE, c'est-à-dire du rectangle ΛΘ,ΘZ[192]. Or il l'est, puisque la somme du rectangle ΛΘ,ΘZ et du rectangle ΛΞ,ΞZ est égale au rectangle KΞ,ΞΘ[193].

– 27 – *Si sont menés des diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une circonférence de cercle, dont l'un est dit le diamètre droit, et l'autre le diamètre transverse, et que sont menées deux parallèles à ces diamètres, qui se rencontrent entre elles et rencontrent la ligne, la somme des carrés sur les droites découpées sur la droite menée parallèlement au diamètre transverse entre le point de rencontre des parallèles et la ligne, augmentée de la somme des figures sur les droites découpées sur la droite menée parallèlement au diamètre droit entre le point de rencontre des parallèles et la ligne, figures semblables et semblablement décrites à la figure appliquée au diamètre droit, sera égale au carré sur le diamètre transverse.*

Soit une ellipse ou une circonférence de cercle ABΓΔ, de centre E ; que soient menés deux diamètres conjugués de la section, le diamètre droit AEΓ et le diamètre transverse BEΔ, et que soient menées des parallèles NZHΘ et KZΛM à AΓ et BΔ.

Je dis que la somme des carrés sur NZ et ZΘ, augmentée de la somme des figures sur KZ et ZM semblables et semblablement décrites à la figure appliquée à AΓ, sera égale au carré sur BΔ.

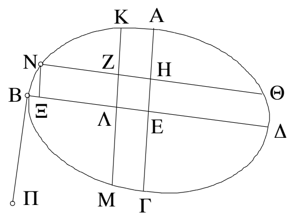


Fig. 27.1

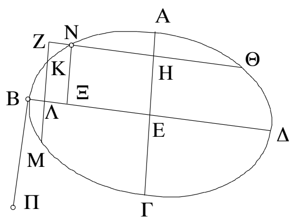


Fig. 27.2[194]

[192] II.11 et II.16

[193] II.16 et Pappus, *lemme* 4.

[194] La rédaction de l'*ecthèse* correspond à la figure 1, comme le montre l'ordre des lettres désignatrices des parallèles NZHΘ et KZΛM.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ν παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΝΞ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἐπὶ τὴν ΒΔ. Καὶ ἔστω ὀρθία ἡ ΒΠ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΑΓ, ἡ ΑΓ πρὸς ΒΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ· τὸ δὲ ἀπὸ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει · καὶ ὡς ἄρα ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΞΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΛ, ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, τῷ ὑπὸ ΒΞΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ ἀπὸ ΚΛ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΛΔ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΘ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΝ τετράγωνα διπλάσιά εἰσι τῶν ἀπὸ ΘΗ, ΗΖ, τουτέστι τῶν ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛΖ τετραγώνων, καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖΚ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛΖ ὁμοίων εἰδῶν· ἴσα δέ ἐστι τὰ μὲν ἀπὸ ΚΛΖ εἴδη τοῖς ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ, τὰ δὲ ἀπὸ ΝΗΖ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ ΞΕΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῆς ΑΓ εἴδει διπλάσιά ἐστι τῶν ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ καὶ τῶν ἀπὸ ΞΕΛ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΔ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ ΒΞΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ, ὥστε τὰ ὑπὸ ΒΞΔ καὶ ὑπὸ ΒΛΔ καὶ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΛΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΕ. Τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΓΑ εἴδει διπλάσιά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιον τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ.

6 pr. τὸ Ψ : om. V ǁ 9 alt. ΝΞ V[1] : ΝΖ V ǁ 15 alt. τῶν V[1] : τῷ V ǁ 24 μ[ετὰ e corr. V[1].

Que soit menée de N une parallèle NΞ à AE ; c'est donc une droite abaissée sur BΔ de manière ordonnée. Soit le côté droit BΠ.

Dès lors, puisque AΓ est à BΔ comme BΠ est à AΓ[195], alors le carré sur AΓ est aussi à celui sur BΔ comme BΠ est à BΔ ; or le carré sur BΔ est égal à la figure appliquée à AΓ[196] ; le carré sur AΓ est donc à la figure sur AΓ comme BΠ est à BΔ ; or le carré sur NΞ est à la figure sur NΞ, semblable à la figure appliquée à AΓ, comme le carré sur AΓ est à la figure sur AΓ ; le carré sur NΞ est donc aussi à la figure sur NΞ, semblable à la figure appliquée à AΓ, comme ΠB est à BΔ ; or le carré sur NΞ est aussi au rectangle BΞ,ΞΔ comme ΠB est à BΔ[197] ; la figure sur NΞ, c'est-à-dire le carré sur ZΛ, semblable à la figure appliquée à AΓ, est donc égale au rectangle BΞ,ΞΔ. On démontrera pareillement que la figure sur KΛ, semblable à la figure appliquée à AΓ, est égale au rectangle BΛ,ΛΔ.

Puisqu'une droite NΘ est coupée en parties égales en un point H et en parties inégales en un point Z, la somme des carrés sur ΘZ et ZN est le double de la somme de ceux sur ΘH et HZ[198], c'est-à-dire de ceux sur NH et HZ. Pour les mêmes raisons, la somme des carrés sur MZ et ZK est aussi le double de la somme de ceux sur KΛ et ΛZ, et la somme des figures sur MZ et ZK, semblables à la figure appliquée à AΓ, est le double de la somme des figures semblables sur KΛ et ΛZ ; or les figures sur KΛ et ΛZ sont égales aux rectangles BΞ,ΞΔ et BΛ,ΛΔ, et la somme des carrés sur NH et HZ est égale à la somme de ceux sur ΞE et EΛ; les sommes des carrés sur NZ et ZΘ et des figures sur KZ et ZM, semblables à la figure appliquée à AΓ, sont donc les doubles des sommes des rectangles BΞ,ΞΔ et BΛ,ΛΔ et des carrés sur ΞE et EΛ.

Puisqu'une droite BΔ est coupée en parties égales en un point E et en parties inégales en un point Ξ, la somme du rectangle BΞ,ΞΔ et du carré sur ΞE est égale au carré sur BE[199]. De même, la somme du rectangle BΛ,ΛΔ et du carré sur ΛE est aussi égale au carré sur BE, de sorte que les sommes des rectangles BΞ,ΞΔ et BΛ,ΛΔ et des carrés sur ΞE et ΛE sont égales au double du carré sur BE[200]. Les sommes des carrés sur NZ et ZΘ et des figures sur KZ et ZM, semblables à la figure appliquée à AΓ, sont donc les doubles du double du carré sur BE. Or le carré sur BΔ est aussi le double du double du carré sur BE.

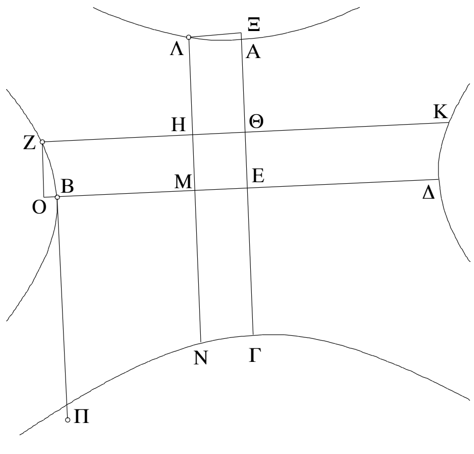
[195] I. *Secondes définition*s 3.
[196] I.15.
[197] I.21.
[198] *Éléments*, II.9.
[199] *Éléments*, II.5.
[200] Voir Note complémentaire [41].

Τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ ΚΖΜ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ.

– κη′ – Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, ἀχθῶσι δὲ παρ᾽ αὐτὰς δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ᾽ εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ᾽ εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα λόγον ἔχουσιν ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρ᾽ αὐτὰς ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς.

Λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗΝ τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Λ τεταγμένως αἱ ΛΞ, ΖΟ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ ταῖς ΑΓ, ΒΔ. Ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἤχθω ἡ ὀρθία τῆς

3 κη′ V^5 : om. V ‖ 6 ἀπολαμβανομένων Mont. : λαμβανομένων V ‖ ἐπ᾽ εὐθείας V : an ἀπὸ τῆς εὐθείας ? ‖ 8 τὰ Ψ : τὸ V ‖ 9 ἐπ᾽ εὐθείας V : an ἀπὸ τῆς εὐθείας ? ‖ ἠγμένης Ψ : τῆς ἠγμένης V ‖ 14 ΒΕΔ Ψ : ΑΕΔ V ‖ 15 ΛΗΜΝ Ψ : ΗΛΜΝ V ‖ 19 ΑΓ, ΒΔ Ψ : ΑΒ, ΓΔ V.

La somme des carrés sur ΝΖ et ΖΘ, augmentée de la somme des figures sur ΚΖ et ΖΜ, semblables à la figure appliquée à ΑΓ, est donc égale au carré sur ΒΔ.

– 28 – *Si, dans des opposées conjuguées, sont menés des diamètres conjugués, dont l'un est dit le diamètre droit, et l'autre le diamètre transverse, que sont menées deux parallèles à ces diamètres qui se rencontrent entre elles et rencontrent les sections, la somme des carrés sur les droites découpées sur la droite menée parallèlement au diamètre droit, entre le point de rencontre des droites et les sections, a, avec la somme des carrés sur les droites découpées sur la droite menée parallèlement au diamètre transverse, entre le point de concours des droites et les sections, un rapport identique au rapport du carré sur le diamètre droit au carré sur le diamètre transverse.*

Soient des opposées conjuguées Α, Β, Γ et Δ, de diamètre droit ΑΕΓ et de diamètre transverse ΒΕΔ ; que soient menées des parallèles ΖΗΘΚ et ΛΗΜΝ à ces diamètres, se coupant l'une l'autre et coupant les sections.

Je dis que la somme des carrés sur ΛΗ et ΗΝ a à la somme de ceux sur ΖΗ et ΗΚ un rapport identique à celui du carré sur ΑΓ au carré sur ΒΔ.

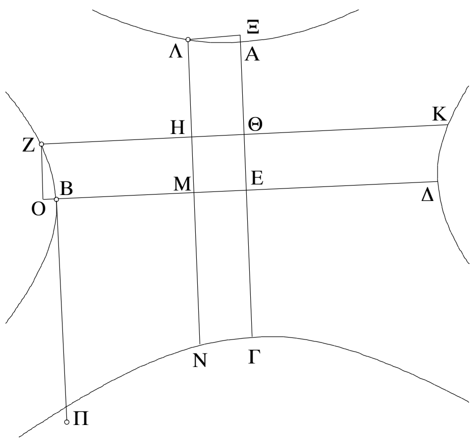


Fig. 28

Que soient menées, de Ζ et de Λ, des droites ΛΞ et ΖΟ de manière ordonnée ; elles sont donc parallèles aux droites ΑΓ et ΒΔ. Que, de Β, soit

ΒΔ ἢ ΒΠ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΟΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΓΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα.

Ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΟΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΛΞ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΜΕ· ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΟΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΞΕΘ πρὸς τὰ ἀπὸ ΟΕΜ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΛΜΗ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΘΗ. Καὶ ἔστι τῶν μὲν ἀπὸ ΛΜΗ διπλάσια τὰ ἀπὸ ΝΗΛ, ὡς δέδεικται, τῶν δὲ ἀπὸ ΖΘΗ τὰ ἀπὸ ΖΗΚ.

Καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΛΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ.

– κθʹ – Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἡ τῇ ὀρθίᾳ παράλληλος τέμνῃ τὰς ἀσυμπτώτους, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ᾽ εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετραγώνου πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐπ᾽ εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τῷ πρότερον, ἡ δὲ ΝΛ τεμνέτω τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, Ο.

3 ΛΞ Ψ : ΔΞ V[1] ΔΖ V ‖ 7 alt. το]ῦ fere evan. V ‖ 12 ΖΘΗ Canon. : ΖΗΘ V ‖ 13 ΖΘΗ Mont. : ΖΗΘ V ‖ 16 κθʹ V[5] : om. V ‖ 18 ἐπ᾽ εὐθείας V : an ἀπὸ τῆς εὐθείας ? ‖ post συμπτώσεως del. compendium καὶ V[1] ‖ 21 ἐπ᾽ εὐθείας V : an ἀπὸ τῆς εὐθείας ? ‖ 25 ΝΛ Heiberg (ΛΝ Ψ) : ΜΛ V ‖ 26 τὰ Ψ : τὸ V.

mené le côté droit ΒΠ correspondant au côté transverse ΒΔ[201] ; il est évident que le carré sur ΑΓ est à celui sur ΒΔ, que le carré sur ΑΕ est à celui sur ΕΒ, que le carré sur ΖΟ est au rectangle ΒΟ,ΟΔ, et que le rectangle ΓΞ,ΞΑ est au carré sur ΛΞ comme ΠΒ est à ΒΔ[202]. La somme des antécédents est donc à la somme des conséquents comme l'un des antécédents est à l'un des conséquents.

La somme du rectangle ΓΞ,ΞΑ, du carré sur ΑΕ et du carré sur ΟΖ, c'est-à-dire du carré sur ΕΘ, est donc à la somme du rectangle ΔΟ,ΟΒ, du carré sur ΒΕ et du carré sur ΛΞ, c'est-à-dire du carré sur ΜΕ, comme le carré sur ΑΓ est au carré sur ΒΔ ; mais la somme du rectangle ΓΞ,ΞΑ et du carré sur ΑΕ est égale au carré sur ΞΕ[203], et la somme du rectangle ΔΟ,ΟΔ et du carré sur ΒΕ est égale au carré sur ΟΕ ; la somme des carrés sur ΞΕ et ΕΘ est donc à la somme de ceux sur ΟΕ et ΕΜ, c'est-à-dire la somme des carrés sur ΛΜ et ΜΗ est à la somme de ceux sur ΖΘ et ΘΗ, comme le carré sur ΑΓ est au carré sur ΒΔ. D'autre part, la somme des carrés sur ΝΗ et ΗΛ est le double de la somme de ceux sur ΛΜ et ΜΗ, comme on l'a démontré[204], et la somme des carrés sur ΖΗ et ΗΚ est le double de la somme de ceux sur ΖΘ et ΘΗ.

La somme des carrés sur ΛΗ et ΗΝ est donc à la somme de ceux sur ΖΗ et ΗΚ comme le carré sur ΑΓ est au carré sur ΒΔ.

– 29 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si la droite parallèle au diamètre droit coupe les asymptotes, la somme des carrés sur les droites découpées sur la droite menée parallèlement au diamètre droit, entre le point de rencontre des droites et les asymptotes, augmentée de la moitié du carré sur le diamètre droit, a, avec la somme des carrés sur les droites découpées sur la droite menée parallèlement au diamètre transverse, entre le point de concours des droites et les sections, un rapport identique au rapport du carré sur le diamètre droit au carré sur le diamètre transverse.*

Toutes choses égales d'ailleurs, que ΝΛ coupe les asymptotes en des points Ξ et Ο.

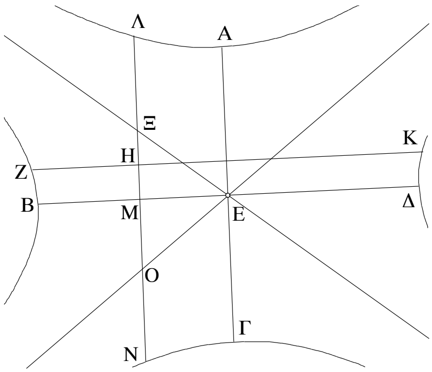
[201] L'expression ἡ ὀρθία τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ (littéralement « le côté droit ΒΠ du côté <transverse> ΒΔ ») est à la fois peu compréhensible et elliptique.

[202] I. *Secondes définitions* 3, I.21 et I.60.

[203] *Éléments*, II.6.

[204] Voir Prop. 27.

Δεικτέον ὅτι τὰ ἀπὸ ΞΗΟ προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ δὶς ἀπὸ ΕΑ [τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ ΟΛΞ], πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΟΝ, τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗΟ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΝΞΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΞΗΟ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΛΗΝ. Τὰ δὲ ἀπὸ ΛΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

Καὶ τὰ ἀπὸ ΞΗΟ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

– λʹ – Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

1 ΞΗΟ Canon. : ΞΝΟ V ‖ 2 τουτέστι — ΟΞΛ del. Heiberg ‖ 5 τῷ Ψ : τὸ V ‖ 9 alt. ἀπὸ Ψ : om. V ‖ 10 λʹ V[5] : om. V.

Il faut démontrer que la somme des carrés sur ΞΗ et ΗΟ, augmentée de la moitié du carré sur ΑΓ, c'est-à-dire du double du carré sur ΕΑ [c'est-à-dire du double du rectangle ΟΛ,ΛΞ], a, avec la somme des carrés sur ΖΗ et ΗΚ, un rapport identique au rapport du carré sur ΑΓ à celui sur ΒΔ.

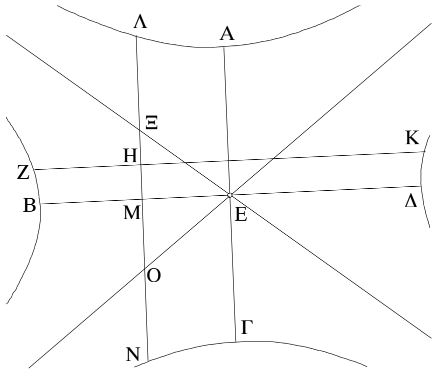


Fig. 29

Puisque ΛΞ est égale à ΟΝ[205], la somme des carrés sur ΛΗ et ΗΝ excède la somme des carrés sur ΞΗ et ΗΟ du double du rectangle ΝΞ,ΞΛ[206] ; la somme des carrés sur ΞΗ et ΗΟ et du double du carré sur ΑΕ[207] est donc égale à la somme des carrés de ΛΗ et ΗΝ. Or la somme des carrés sur ΛΗ et ΗΝ, a, avec la somme des carrés sur ΖΗ et ΗΚ, un rapport identique à celui du carré sur ΑΓ au carré sur ΒΔ[208].

La somme des carrés sur ΞΗ et ΗΟ et du double du carré sur ΕΑ a donc, avec la somme des carrés sur ΖΗ et ΗΚ, un rapport identique à celui du carré sur ΑΓ au carré sur ΒΔ.

– 30 – *Si deux droites tangentes à une hyperbole se rencontrent, que, par les points de contact, une droite est menée, que, par le point de rencontre, une droite est menée*[209] *parallèlement à l'une des asymptotes et coupe la section et la droite joignant les points de contact, la droite découpée entre le point de rencontre et la droite joignant les points de contact sera coupée en deux parties égales par la section.*

[205] II.16.

[206] Ce résultat est démontré dans le *lemme* 7 de Pappus (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 162, 3-16) et dans le commentaire d'Eutocius (*ibid*., p. 340, 12-342, 9), mais selon deux voies différentes.

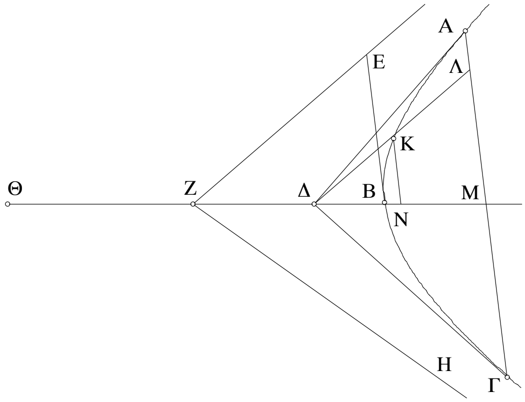
[207] II.11.

[208] Prop. 28.

[209] L'emploi de ἐκβάλλειν au sens de *mener* est anomal (voir prop. 31-33, 39).

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΔΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΔΚΛ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΖΔΒΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ’ ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ διὰ τῶν Β, Κ σημείων παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΚΝ· τεταγμένως ἄρα κατηγμέναι εἰσίν.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· ἀλλ’ ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ τῷ ἀπὸ ΔΝ.

Ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΒ, διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ κατῆκται, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ.· τὸ δὲ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἄρα μετὰ τοῦ

3 ΖΕ Mont. : ΖΗ V ‖ 11-12 ἀλλ’ — ὀρθίαν Ψ : om. V.

Soit une hyperbole ΑΒΓ, de tangentes ΑΔ et ΔΓ et d'asymptotes ΕΖ et ΖΗ ; que soit menée une droite de jonction ΑΓ, et que, par Δ, soit menée une parallèle ΔΚΛ à ΖΕ.

Je dis que ΔΚ est égale à ΚΛ.

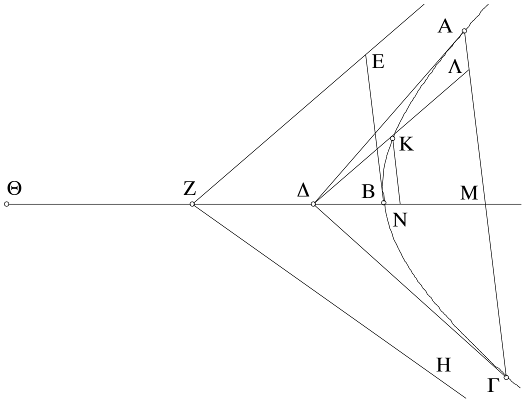


Fig. 30

Que soit menée une droite de jonction ΖΔΒΜ et qu'elle soit prolongée de part et d'autre ; que soit placée une droite ΖΘ égale à ΒΖ, et que, par les points Β et Κ, soient menées des parallèles ΒΕ et ΚΝ à ΑΓ ; elles sont donc abaissées de manière ordonnée.

Puisque le triangle ΒΕΖ est semblable au triangle ΔΝΚ, alors le carré sur ΒΖ est à celui sur ΒΕ comme le carré sur ΔΝ est à celui sur ΝΚ[210] ; or ΘΒ est au côté droit comme le carré sur ΒΖ est à celui sur ΒΕ[211] ; ΘΒ est donc aussi au côté droit comme le carré sur ΔΝ est à celui sur ΝΚ ; mais le rectangle ΘΝ,ΝΒ est au carré sur ΝΚ comme ΘΒ est au côté droit[212] ; le rectangle ΘΝ,ΝΒ est donc aussi au carré sur ΝΚ comme le carré sur ΔΝ est à celui sur ΝΚ. Le rectangle ΘΝ,ΝΒ est donc égal au carré sur ΔΝ.

Or le rectangle ΜΖ,ΖΔ est aussi égal au carré sur ΖΒ, puisque ΑΔ est une tangente et que ΑΜ est une droite abaissée[213], de sorte que la somme du rectangle ΘΝ,ΝΒ et du carré sur ΖΒ est aussi égale à la somme du rectangle ΜΖ,ΖΔ et du carré sur ΔΝ ; or la somme du rectangle ΘΝ,ΝΒ et du carré sur ΖΒ est égale au carré sur ΖΝ[214] ; la somme du rectangle

[210] *Éléments*, VI.4.
[211] II.1.
[212] I.21.
[213] I.37.
[214] *Éléments*, II.6.

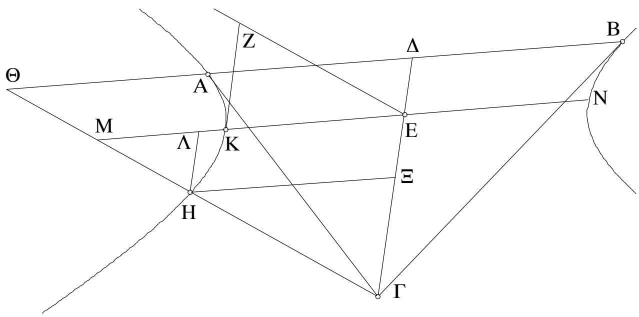
ἀπὸ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ. Ἡ ἄρα ΔΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ν προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. Καὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΚΝ, ΛΜ.

Ἴση ἄρα ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.

– λα΄ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΓΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ ἐκβεβλήσθω, ἀσύμπτωτος δὲ ἔστω ἡ ΖΕ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΓΗΘ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.



Ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ διὰ τῶν Ε, Η παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθωσαν ἡ ΝΕΚΜ καὶ ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Η, Κ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΚΖ, ΗΛ.

Ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΖΕ τῷ ΜΛΗ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ἀπὸ ΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, δέδεικται τὸ ὑπὸ ΝΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΛΚ τῷ ἀπὸ ΜΛ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΚΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΝΛΚ

4 λα΄ V[5] : om. V ‖ 10 ΑΓΒ Heiberg (ΑΓ, ΒΓ Ψ) : ΑΓ V ‖ 12 Γ Ψ : ΓΑ V ‖ 15 ΝΕΚΜ edd. : ΕΚ, ΜΝ V ‖ 18 alt. τὸ Ψ : om. V in extr. lin.

ΜΖ,ΖΔ et du carré sur ΔΝ est donc aussi égale au carré sur ΖΝ. La droite ΔΜ, augmentée de la droite ΔΖ, est donc coupée en deux parties égales au point Ν[215]. D'autre part, ΚΝ et ΛΜ sont parallèles.

ΔΚ est donc égale à ΚΛ[216].

– 31 – *Si deux droites tangentes à des opposées se rencontrent, que, par les points de contact, une droite est menée, et que, par le point de rencontre, est menée une droite parallèlement à l'asymptote, coupant la section et la droite joignant les points de contact, la droite découpée entre le point de rencontre et la droite joignant les points de contact sera coupée en deux parties égales par la section*[217].

Soient des opposées Α et Β, de tangentes ΑΓ et ΓΒ ; que soit menée une droite de jonction ΑΒ et qu'elle soit prolongée ; soit une asymptote ΖΕ, et que, par Γ, soit menée une parallèle ΓΗΘ à ΖΕ.

Je dis que ΓΗ est égale à ΗΘ.

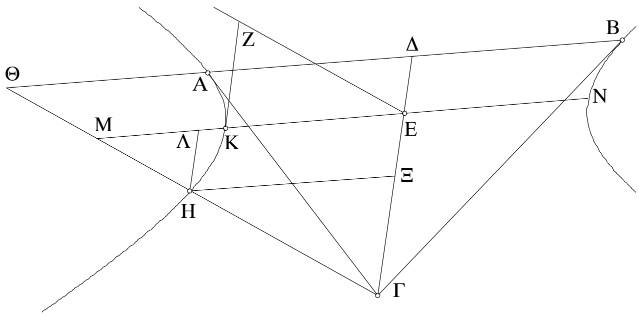


Fig. 31

Que soit menée une droite de jonction ΓΕ et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Δ ; que, par Ε et Η, soient menées des parallèles ΝΕΚΜ et ΗΞ à ΑΒ, et, par Η et Κ, des parallèles ΚΖ et ΗΛ à ΓΔ.

Puisque le triangle ΚΖΕ est semblable au triangle ΜΛΗ, le carré sur ΜΛ est à celui sur ΛΗ comme le carré sur ΚΕ est à celui sur ΚΖ[218] ; or on a démontré que le rectangle ΝΛ,ΛΚ était au carré sur ΛΗ comme le carré sur ΕΚ est à celui sur ΚΖ[219] ; le rectangle ΝΛ,ΛΚ est donc égal au carré sur

[215] *Éléments*, II.6. Voir Note complémentaire [42].
[216] *Éléments*, VI.2.
[217] Voir Note complémentaire [43].
[218] *Éléments*, VI.4.
[219] Voir Prop. 30.

μετὰ τοῦ ἀπὸ ΚΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΞ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ.

Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΞ πρὸς τὰ ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΞΓ πρὸς τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΚΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΓ τοῖς ἀπὸ ΗΛ, ΚΖ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΛΗ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΞ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΞΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΕΔ. Ἡ ἄρα ΓΔ δίχα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε. Καὶ παράλληλος ἡ ΔΘ τῇ ΗΞ.

Ἴση ἄρα ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.

– λβʹ – Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ἀπολαμβανομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ ἧς κέντρον τὸ Δ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ καὶ ἡ ΖΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Η, Θ· φανερὸν δὴ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. Ἤχθω δὴ διὰ μὲν τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΖΚ, διὰ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΛΚ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΘΛ.

3 ΗΞ V[1] : ΗΓ V ‖ τὰ Ψ : τὸ V ‖ 4 τὰ Ψ : τὸ V ‖ 10 λβʹ V[5] : om. V ‖ 17 ΖΔ Ψ : ΞΔ V.

ΜΛ. Que soit ajouté le carré commun sur ΚΕ ; la somme du rectangle ΝΛ,ΛΚ et du carré sur ΚΕ, c'est-à-dire le carré sur ΛΕ[220], c'est-à-dire le carré sur ΗΞ, est donc égale à la somme des carrés sur ΜΛ et sur ΚΕ.

Or le carré sur ΞΓ est à la somme des carrés sur ΛΗ et ΚΖ comme le carré sur ΗΞ est à la somme des carrés sur ΜΛ et ΚΕ[221] ; le carré sur ΞΓ est donc égal à la somme des carrés sur ΗΛ et ΚΖ ; or le carré sur ΛΗ est égal au carré sur ΞΕ, et le carré sur ΚΖ est égal au carré sur la moitié du second diamètre[222], c'est-à-dire au rectangle ΓΕ,ΕΔ[223] ; le carré sur ΓΞ est donc égal à la somme du carré sur ΞΕ et du rectangle ΓΕ,ΕΔ. La droite ΓΔ est donc coupée en deux parties égales au point Ξ et en deux parties inégales au point Ε[224]. D'autre part, ΔΘ est parallèle à ΗΞ.

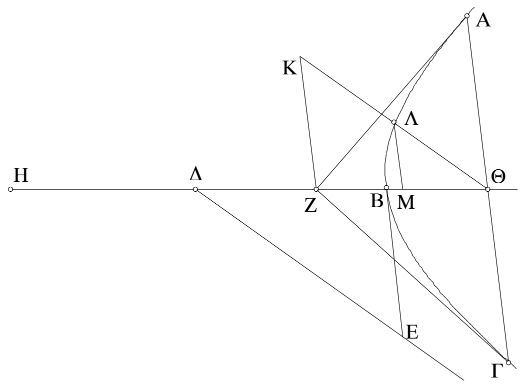
ΓΗ est donc égale à ΗΘ[225].

– 32 – *Si deux droites tangentes à une hyperbole se rencontrent, que, par les points de contact, une droite est menée, que, par le point de rencontre des tangentes, est menée une droite parallèlement à la droite joignant les points de contact, et que, par le milieu de la droite joignant les points de contact, est menée une droite parallèlement à l'une des asymptotes, la droite découpée entre le milieu et la parallèle sera coupée en deux parties égales par la section.*

Soit une hyperbole ΑΒΓ, de centre Δ et d'asymptote ΔΕ ; que soient menées des tangentes ΑΖ et ΖΓ ; que soient menées des droites de jonction ΓΑ et ΖΔ et qu'elles soient prolongées jusqu'en des points Η et Θ[226] ; il est évident que ΑΘ est égale à ΘΓ[227]. Que soit menée par Ζ une parallèle ΖΚ à ΑΓ et, par Θ, une parallèle ΘΛΚ à ΔΕ.

Je dis que ΚΛ est égale à ΘΛ.

[220] *Éléments*, II.6.
[221] *Éléments*, VI.4.
[222] II.1.
[223] I.38.
[224] *Éléments*, II.5. Voir Note complémentaire [44].
[225] *Éléments*, VI.2.
[226] Voir Note complémentaire [8].
[227] II.30.



Ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Λ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΛΜ, ΒΕ· ἔσται δή, ὡς προδέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, τό τε ἀπὸ ΘΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΜΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΒ τῷ ἀπὸ ΜΘ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, διότι ἐφάπτεται ἡ ΑΖ, καὶ κατῆκται ἡ ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΜΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΜΘ. Δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΖΘ κατὰ τὸ Μ προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. Καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΚΖ, ΛΜ.

Ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΛΘ.

– λγʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων συμπίπτουσα τῇ τομῇ καὶ τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ παραλλήλῳ, ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ὑπὸ τῆς τομῆς δίχα διαιρεθήσεται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΗ, ΔΗ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ

4 alt. τῷ V^1 : τὸ V ‖ 7 ΖΘ Canon. : ΞΘ V ‖ 10 λγʹ V^5 : om. V.

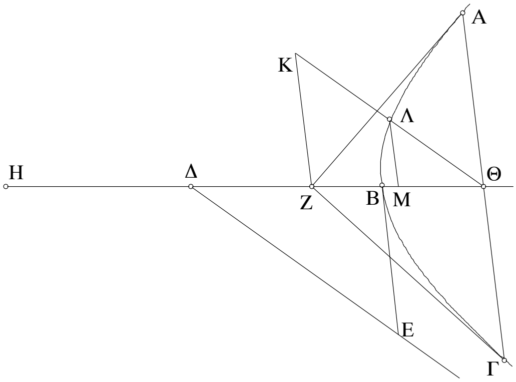


Fig. 32

Que soient menées par B et Λ des parallèles ΛM et BE à AΓ ; alors, comme on l'a démontré antérieurement[228], le carré sur ΘM sera à celui sur MΛ, et le rectangle BM,MH sera au carré sur MΛ, comme le carré sur ΔB est au carré sur BE ; le rectangle HM,MB est donc égal au carré sur MΘ ; or le rectangle ΘΔ,ΔZ est aussi égal au carré sur ΔB[229], puisque AZ est une tangente et que AΘ est une droite abaissée ; la somme du rectangle HM,MB et du carré sur ΔB, ce qui fait le carré sur ΔM[230], est donc égale à la somme du rectangle ΘΔ,ΔZ et du carré sur MΘ. La droite ZΘ, augmentée de la droite ΔZ, est donc coupée en deux parties égales en un point M[231]. D'autre part, les droites KZ et ΛM sont parallèles.

KΛ est donc égale à ΛΘ[232].

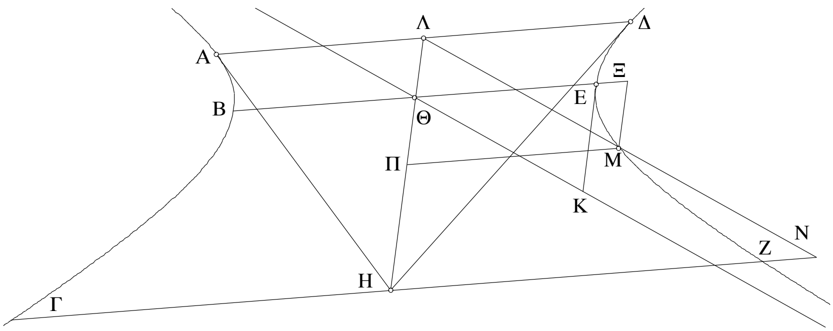
– 33 – *Si deux tangentes à des opposées se rencontrent, que, par les points de contact, est menée une droite, que, par le point de rencontre des tangentes, est menée une droite parallèlement à la droite joignant les points de contact, que, par le milieu de la droite joignant les points de contact, est menée une droite parallèlement à l'une des asymptotes et rencontrant la section et la parallèle menée par le point de rencontre, la droite découpée entre le milieu et la parallèle sera coupée en deux parties égales par la section*[233].

Soient des opposées ABΓ et ΔEZ, de tangentes AH et ΔH, de centre Θ et d'asymptote KΘ ; que soit menée une droite de jonction ΘH et qu'elle

[228] Voir Prop. 30.
[229] I.37.
[230] *Éléments*, II.6.
[231] Voir Note complémentaire [45].
[232] *Éléments*, VI.2.
[233] Voir Note complémentaire [46].

καὶ ἐκβεβλήσθω, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΛΔ· φανερὸν δὴ ὅτι δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Λ. Ἤχθωσαν δὴ διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὴν ΑΔ αἱ ΒΘΕ, ΓΗΖ, παρὰ δὲ τὴν ΘΚ διὰ τοῦ Λ ἡ ΛΜΝ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Μ παρὰ τὴν ΗΘ αἱ ΕΚ, ΜΞ, διὰ δὲ τοῦ Μ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΜΠ.

Ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ὑπὸ ΒΞΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ὑπὸ ΒΞΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΕ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ ΘΞ, πρὸς τὰ ἀπὸ ΚΕ, ΞΜ· τὸ δὲ ἀπὸ ΚΕ ἴσον δέδεικται τῷ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΜ τῷ ἀπὸ ΘΠ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΘΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΠ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΗ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ.

Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ, τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. Ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΠ τῷ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. Εὐθεῖα ἄρα ἡ ΛΗ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Π, εἰς

5 Ἤχθωσαν Federspiel[2] : Κατήχθωσαν V || 6 τ[ὴν V[1] : δ V || 8 ΒΞΕ Canon. : ΞΕ V || 9 ΒΞΕ V[1] : ΒΖΕ V || ΘΕ, ὅ Ψ : ΘΕΟ V || 10 ΗΘΛ Ψ : ΘΗΛ V || 12 ΛΘΗ Heiberg : ΗΘΛ Ψ ΘΛ, ΘΗ V.

soit prolongée, que soit aussi menée une droite de jonction ΑΛΔ ; il est évident que cette droite est coupée en deux parties égales en un point Λ[234]. Que soient menées par Η et Θ des parallèles ΒΘΕ et ΓΗΖ à ΑΔ et, par Λ, une parallèle ΛΜΝ à ΘΚ.

Je dis que ΛΜ est égale à ΜΝ.

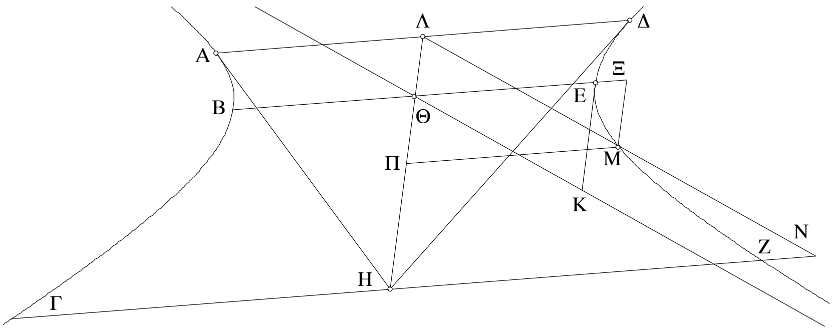


Fig. 33

Que, de Ε et de Μ, soient menées des parallèles ΕΚ et ΜΞ à ΗΘ, et, par Μ, une parallèle ΜΠ à ΑΔ.

Dès lors, puisque, en vertu de ce qui a été démontré, le rectangle ΒΞ,ΞΕ est au carré sur ΞΜ comme le carré sur ΘΕ est à celui sur ΕΚ[235], alors la somme du rectangle ΒΞ,ΞΕ et du carré sur ΘΕ, ce qui fait le carré sur ΘΞ[236], est donc à la somme des carrés sur ΚΕ et ΞΜ comme le carré sur ΘΕ est au carré sur ΕΚ ; or on a démontré que le carré sur ΚΕ était égal au rectangle ΗΘ,ΘΛ[237], et le carré sur ΞΜ est égal à celui sur ΘΠ ; le carré sur ΞΘ, c'est-à-dire le carré sur ΜΠ, est donc à la somme du rectangle ΛΘ,ΘΗ et du carré sur ΘΠ comme le carré sur ΘΕ est à celui sur ΕΚ.

Or le carré sur ΜΠ est à celui sur ΠΛ comme le carré sur ΘΕ est à celui sur ΚΕ[238] ; le carré sur ΜΠ est donc à la somme du rectangle ΗΘ,ΘΛ et du carré sur ΘΠ comme le carré sur ΜΠ est à celui sur ΠΛ. Le carré sur ΛΠ est donc égal à la somme du rectangle ΗΘ,ΘΛ et du carré sur ΘΠ. Une droite ΛΗ est donc coupée en deux parties égales en un point

[234] II.30.
[235] Voir Prop. 30.
[236] *Éléments*, II.6.
[237] II.1 et I.38.
[238] *Éléments*, VI.4.

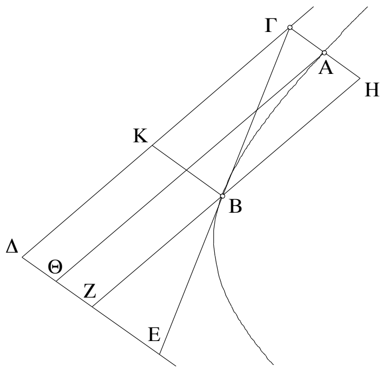
δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ. Καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΜΠ, ΗΝ.

Ἴση ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.

– λδʹ – Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἡ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμτώτων ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα διαιρεθήσεται.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΖΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ ἡ ΓΑΗ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.



Ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΔΕ ἡ ΒΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΔ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΚΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΑΘ, ἴση δὲ ἡ ΒΖ τῇ ΔΚ, τουτέστι τῇ ΓΚ, καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΔΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

3 λδʹ V[5] : om. V ‖ 17 ΚΒΖ Ψ : ΚΖΒ V.

Π et en deux parties inégales en un point Θ[239]. D'autre part, les droites ΜΠ et ΗΝ sont parallèles.

ΛΜ est donc égale à ΜΝ[240].

– 34 – *Si, sur l'une des asymptotes d'une hyperbole, est pris un certain point, que, de ce point, est menée une tangente à la section, et que, par le point de contact, est menée une parallèle à l'asymptote, la parallèle à l'autre asymptote, menée par le point pris, sera divisée par la section en deux parties égales*[241].

Soit une hyperbole ΑΒ, d'asymptotes ΓΔ et ΔΕ ; que soit pris sur ΓΔ un point quelconque Γ ; que, par ce point, soit menée une tangente ΓΒΕ à la section ; que, par Β, soit menée une parallèle ΖΒΗ à ΓΔ et, par Γ, une parallèle ΓΑΗ à ΔΕ.

Je dis que ΓΑ est égale à ΑΗ.

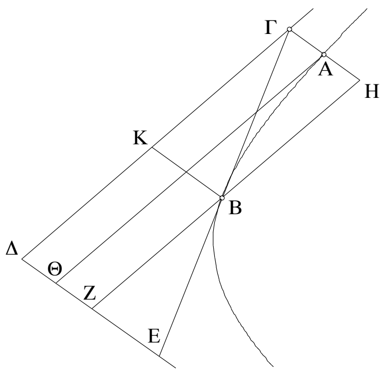


Fig. 34

Que soient menées par Α une parallèle ΑΘ à ΓΔ et, par Β, une parallèle ΒΚ à ΔΕ.

Dès lors, puisque ΓΒ est égale à ΒΕ[242], alors ΓΚ est aussi égale à ΚΔ et ΔΖ à ΖΕ[243].

Puisque le rectangle ΚΒ,ΒΖ est égal au rectangle ΓΑ,ΑΘ[244], que ΒΖ est

[239] *Éléments*, II.5 ; voir Note complémentaire [44].

[240] *Éléments*, VI.2.

[241] Dans son commentaire, Eutocius expose quatre variantes (précédées de ἄλλως) relatives aux propositions 34-36. Elles sont bâties sur le même procédé démonstratif.

[242] II.3

[243] *Éléments*, VI.2.

[244] II.12.

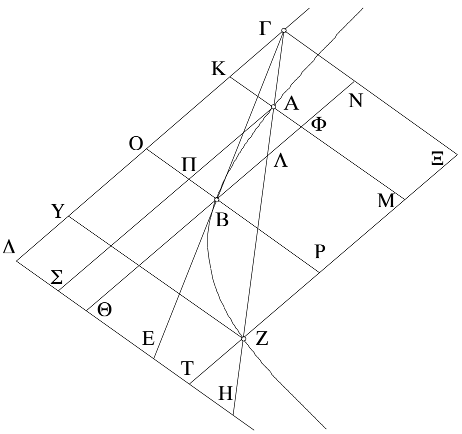
ΚΓΗ · ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΓΗ πρὸς ΑΓ· διπλῆ δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΚ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ τῆς ΑΓ.

Ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

– λε′ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου εὐθεῖά τις ἀχθῇ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, τὰ τμήματα τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας.

Ἔστω γὰρ ἡ ΑΒ ὑπερβολὴ καὶ αἱ ΓΔΕ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ ΓΒΕ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ΘΒ παράλληλος, καὶ διὰ τοῦ Γ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΑΛΖΗ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Ζ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΖΛ πρὸς ΑΛ.



Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Γ, Α, Β, Ζ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΓΝΞ, ΚΑΜ, ΟΠΒΡ, ΖΥ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῇ ΤΗ· ἡ δὲ ΚΑ τῇ ΔΣ· καὶ ἡ ΤΗ ἄρα τῇ ΔΣ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ.

3 ΓΑ Ψ : ΗΓΑ V ‖ 4 λε′ V[5] : om. V ‖ 8 ὑπερβολὴ v Ψ : ὑποβολὴ V ‖ 13 ΤΖΡΜΞ Ψ : ΖΤΡΜΞ V ‖ 14 pr. ΚΑ Ψ : ΓΑ V.

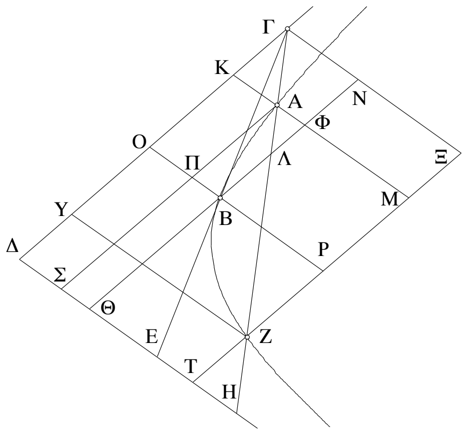
égale à ΔΚ, c'est-à-dire à ΓΚ, et que ΑΘ est égale à ΔΓ, alors le rectangle ΔΓ,ΓΑ est égal au rectangle ΚΓ,ΓΗ ; ΓΗ est donc à ΑΓ comme ΔΓ est à ΓΚ ; or ΔΓ est le double de ΓΚ ; ΓΗ est donc aussi le double de ΑΓ.

ΓΑ est donc égale à ΑΗ.

– 35 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, du point pris, est menée une certaine droite coupant la section en deux points, les segments de la droite découpée à l'intérieur seront*[245] *comme la droite entière est à la droite découpée à l'extérieur*.

Soient l'hyperbole[246] ΑΒ, les asymptotes ΓΔ et ΔΕ, la tangente ΓΒΕ et la parallèle ΘΒ ; que, par Γ, soit menée une certaine droite ΓΑΛΖΗ coupant la section en des points Α et Ζ.

Je dis que ΖΛ est à ΑΛ comme ΖΓ est à ΓΑ.



Que soient menées par Γ, Α, Β et Ζ, des parallèles ΓΝΞ, ΚΑΜ[247], ΟΠΒΡ et ΖΥ à ΔΕ et, par Α et Ζ, des parallèles ΑΠΣ et ΤΖΡΜΞ à ΓΔ.

Dès lors, puisque ΑΓ est égale à ΖΗ[248], alors ΚΑ est aussi égale à ΤΗ[249] ; or ΚΑ est égale à ΔΣ ; ΤΗ est donc aussi égale à ΔΣ, de sorte que

[245] On attend πρὸς ἄλληλα (« entre eux ») ; on retrouve la même rédaction dans les propositions 37-40.

[246] Voir Note complémentaire [47].

[247] Il manque ici le point Φ.

[248] II.8.

[249] *Éléments*, VI.4.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ, ἴση καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΓΥ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ· ὡς δὲ ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΔΑ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ.

Ἴσον δὲ τὸ ΑΔ τῷ ΔΒ, τουτέστι τῷ ΟΝ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΔΟ τῇ ΟΓ · ὡς ἄρα τὸ ΔΜ πρὸς ΟΝ, τὸ ΚΘ πρὸς ΚΝ, καὶ λοιπὸν τὸ ΜΘ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΚ ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΔΜ πρὸς ὅλον τὸ ΟΝ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΣ τῷ ΘΟ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΠ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΘ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΚΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ . Ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, οὕτω τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΜΦ πρὸς ΦΑ, τουτέστιν ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ.

Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ.

– λϛʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου διαγομένη εὐθεῖα μήτε τὴν τομὴν τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα μήτε παράλληλος ᾖ τῇ ἀσυμπτώτῳ, συμπεσεῖται μὲν τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, ἔσται δὲ ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῆς ἁφῆς παραλλήλου, ἡ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης καὶ τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ ἑτέρας τομῆς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β ὧν κέντρον τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΗ σημεῖον εἰλήφθω τὸ Η, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ

1 pr. ΔΚ Ψ : ΔΓ V ‖ 8 ΔΜ Mont. : ΛΜ V ‖ 14 ΖΛ Ψ : ΧΛ V ‖ 16 λϛʹ V[5] : om. V ‖ 19 ἁφῆς Canon. : om. V.

ΓΚ est aussi égale à ΔΥ[250].

Puisque ΓΚ est égale à ΔΥ, ΔΚ est aussi égale à ΓΥ ; ΥΓ est donc à ΓΚ comme ΔΚ est à ΚΓ ; or ΖΓ est à ΓΑ comme ΥΓ est à ΓΚ, ΜΚ est à ΚΑ comme ΖΓ est à ΓΑ[251], le quadrilatère ΜΔ est au quadrilatère ΔΑ comme ΜΚ est à ΚΑ[252] et le quadrilatère ΘΚ est à au quadrilatère ΚΝ comme ΔΚ est à ΚΓ ; le quadrilatère ΘΚ est donc au quadrilatère ΚΝ comme le quadrilatère ΜΔ est au quadrilatère ΔΑ.

Or le quadrilatère ΑΔ est égal au quadrilatère ΔΒ[253], c'est-à-dire au quadrilatère ΟΝ[254], puisque ΓΒ est égale à ΒΕ[255] et ΔΟ est égale à ΟΓ[256] ; le quadrilatère ΚΘ est donc au quadrilatère ΚΝ comme le quadrilatère ΔΜ est au quadrilatère ΟΝ, et le quadrilatère entier ΔΜ est au quadrilatère entier ΟΝ comme le quadrilatère restant ΜΘ est au quadrilatère restant ΒΚ[257].

Puisque le quadrilatère ΚΣ est égal au quadrilatère ΘΟ, que soit retranché le quadrilatère commun ΔΠ ; le quadrilatère restant ΚΠ est donc égal au quadrilatère ΠΘ. Que soit ajouté le quadrilatère commun ΑΒ ; le quadrilatère entier ΚΒ est donc égal au quadrilatère ΑΘ. Le quadrilatère ΜΘ est donc au quadrilatère ΘΑ comme le quadrilatère ΜΔ est au quadrilatère ΔΑ ; mais ΜΚ est à ΚΑ, c'est-à-dire ΖΓ est à ΓΑ, comme le quadrilatère ΜΔ est au quadrilatère ΔΑ, et ΜΦ est à ΦΑ, c'est-à-dire ΖΛ est à ΛΑ[258], comme le quadrilatère ΜΘ est au quadrilatère ΘΑ[259].

ΖΛ est donc aussi à ΛΑ comme ΖΓ est à ΓΑ.

– 36 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si la droite menée du point ne coupe pas la section en deux points et n'est pas parallèle à l'asymptote, elle rencontrera la section opposée, et la droite découpée entre la section opposée et l'asymptote sera à la droite découpée entre l'asymptote et l'autre section comme la droite entière est à la droite découpée entre la section et la parallèle menée par le point de contact.*

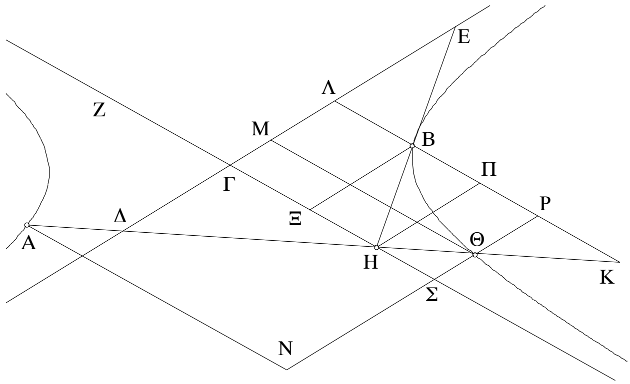
Soient des opposées Α et Β, de centre Γ et d'asymptotes ΔΕ et ΖΗ ;

[250] *Éléments*, VI.4.
[251] On attend la conclusion de ce deuxième syllogisme.
[252] *Éléments*, VI.1.
[253] II.12.
[254] *Éléments*, VI.1.
[255] II.3.
[256] *Éléments*, VI.2.
[257] *Éléments*, V.19.
[258] *Éléments*, VI.2.
[259] *Éléments*, VI.1.

ἤχθω ἡ μὲν ΗΒΕ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΗΘ μήτε παράλληλος οὖσα τῇ ΓΕ μήτε τὴν τομὴν τέμνουσα κατὰ δύο σημεῖα.

Ὅτι μὲν ἡ ΘΗ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τε ΓΔ καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῇ Α τομῇ, δέδεικται. Συμπιπτέτω κατὰ τὸ Α, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΓΗ παράλληλος ἡ ΚΒΛ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Θ σημείων παρὰ τὴν ΓΗ αἱ ΘΜ, ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η, Θ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΒΞ, ΗΠ, ΡΘΣΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΗΘ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, <ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ>, ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ, τὸ ΡΓ πρὸς ΡΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ, τὸ ΓΡ πρὸς τὸ ΡΗ. Καὶ ὡς ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὅλον τὸ ΝΛ πρὸς ΓΘ καὶ ΡΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΛΒ τῇ ΒΠ καὶ τὸ ΛΞ

5 ΚΒΛ edd. : ΒΚΛ V ‖ 8 ΡΘΣΝ Ψ : ΘΡΣΝ V ‖ 9-10 ἡ ΔΘ — ἀλλ᾽ ὡς μὲν [καὶ Halley] ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ add. edd. (jam Comm.) ‖ 12 τὸ ΝΓ c v Ψ : τὸν Γ V ‖ 15 ΡΗ Ψ : ἡ ΡΗ V.

que, sur ΓH, soit pris un point H ; que, de ce point, soient menées une tangente HBE et une droite HΘ qui n'est pas parallèle à ΓE et ne coupe pas la section en deux points.

On a démontré que le prolongement de ΘH rencontrait ΓΔ et, pour cette raison, la section A[260]. Qu'il la rencontre en un point A, et que soit menée par B une parallèle KBΛ à ΓH.

Je dis que AH est à HΘ comme AK est à KΘ.

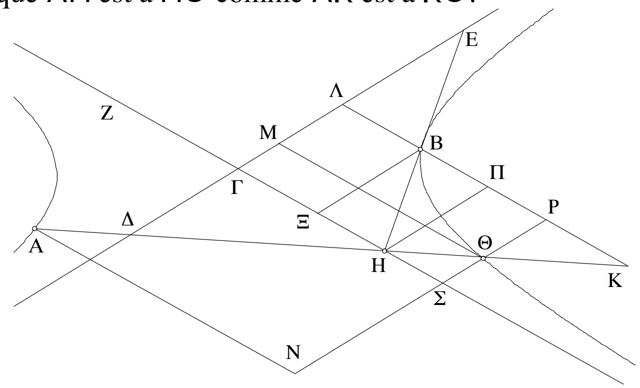


Fig. 36

Que soient menées des points A et Θ des parallèles ΘM et AN à ΓH et, des points B, H et Θ, des parallèles BΞ, HΠ et PΘΣN à ΔE.

Dès lors, puisque AΔ est égale à HΘ[261], ΔΘ est à ΘH comme AH est à HΘ ; mais NΣ est à ΣΘ comme AH est à HΘ[262], et ΓΣ est à ΣH comme ΔΘ est à ΘH[263] ; ΓΣ est donc aussi à ΣH comme NΣ est à ΣΘ ; mais le quadrilatère NΓ est au quadrilatère ΓΘ comme NΣ est à ΣΘ[264] et le quadrilatère PΓ est au quadrilatère PH comme ΓΣ est à ΣH ; le quadrilatère ΓP est donc aussi au quadrilatère PH comme le quadrilatère NΓ est au quadrilatère ΓΘ. D'autre part, le tout est au tout comme l'un est à l'un ; le quadrilatère entier NΛ est donc à la somme des quadrilatères ΓΘ et PH comme le quadrilatère NΓ est au quadrilatère ΓΘ.

Puisque EB est égale à BH[265], ΛB est aussi égale à BΠ[266], et le

[260] II.11.
[261] II.16.
[262] *Éléments*, VI.2.
[263] *Éléments*, VI.4.
[264] *Éléments*, VI.1.
[265] II.3.
[266] *Éléments*, VI.2.

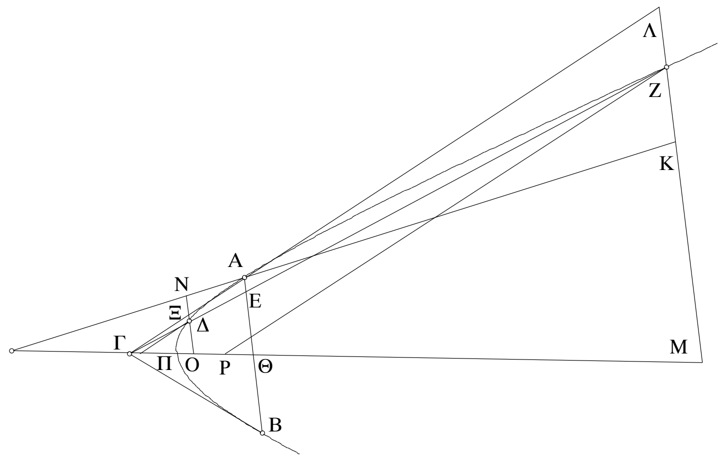
τῷ ΒΗ· τὸ δὲ ΛΞ ἴσον τῷ ΓΘ· καὶ τὸ ΒΗ ἄρα ἴσον τῷ ΓΘ. Ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, οὕτως ὅλον τὸ ΛΝ πρὸς τὸ ΒΗ καὶ ΡΗ, τουτέστι τὸ ΡΞ· ἴσον δὲ τὸ ΡΞ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΒΓ καὶ τὸ ΜΒ τῷ ΞΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ, οὕτω τὸ ΝΛ πρὸς ΛΘ. Ἀλλ’ ὡς μὲν τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς ΛΘ, ἡ ΝΡ πρὸς ΡΘ, τουτέστιν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ.

Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ.

– λζ′ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἐπὶ μὲν τὰς ἁφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

Ἔστω κώνου τομὴ ἡ ΑΒ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔΕΖ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΓΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.



3 ΒΓ Canon.[1] : ΒΘ V Canon. ‖ 9 λζ′ V[5] : om. V ‖ 14 τὰς ἁφὰς Halley (jam Memus) : ἐπὶ τὰς ἁφὰς V ‖ 17 ΓΖ Canon. : ΓΔ V ‖ ΓΔ Ψ : ΓΖ V.

quadrilatère ΛΞ est égal au quadrilatère BH[267] ; or le quadrilatère ΛΞ est égal au quadrilatère ΓΘ[268] ; le quadrilatère BH est donc aussi égal au quadrilatère ΓΘ. Le quadrilatère entier ΛN est donc à la somme des quadrilatères BH et PH, c'est-à-dire au quadrilatère PΞ, comme le quadrilatère NΓ est au quadrilatère NΘ ; or le quadrilatère PΞ est égal au quadrilatère ΛΘ, puisque le quadrilatère ΓΘ est aussi égal au quadrilatère BΓ et que le quadrilatère MB est égal au quadrilatère ΞΘ ; le quadrilatère NΛ est donc au quadrilatère ΛΘ comme le quadrilatère NΓ est au quadrilatère ΓΘ. Mais NΣ est à ΣΘ, c'est-à-dire AH est à HΘ, comme le quadrilatère NΓ est au quadrilatère ΓΘ, et NP est à PΘ, c'est-à-dire AK est à KΘ, comme le quadrilatère NΛ est au quadrilatère ΛΘ[269].

AH est donc aussi à HΘ comme AK est à KΘ.

– 37 – *Si deux tangentes à une section de cône, à une circonférence de cercle ou à des sections opposées se rencontrent, qu'une droite joint les points de contact, et que, du point de rencontre des tangentes, est menée une certaine droite coupant la ligne en deux points, les segments obtenus par la droite joignant les points de contact seront comme la droite entière est à la droite découpée à l'extérieur*.

Soient une section de cône AB et des tangentes AΓ et ΓB ; que soient menée une droite de jonction AB, et que soit menée une droite ΓΔEZ.

Je dis que ZE est à EΔ comme ΓZ est à ΓΔ.

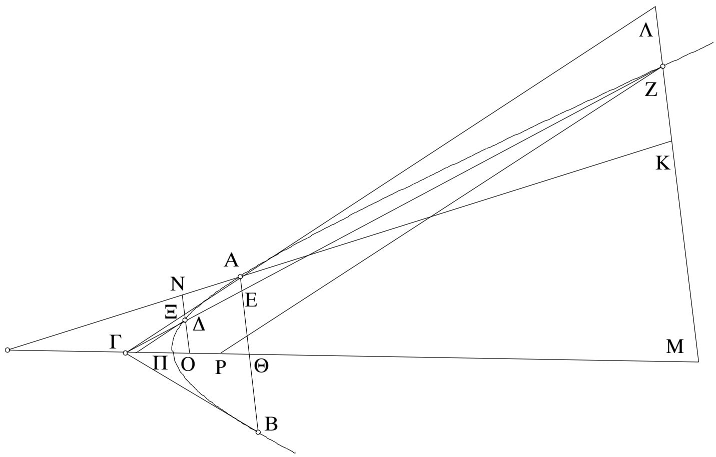
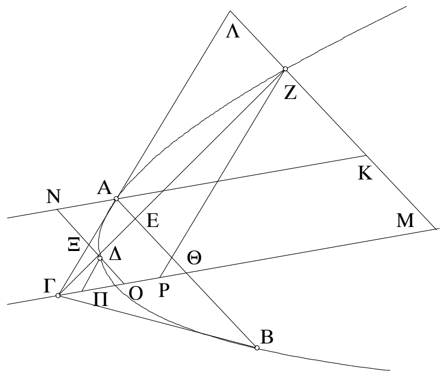
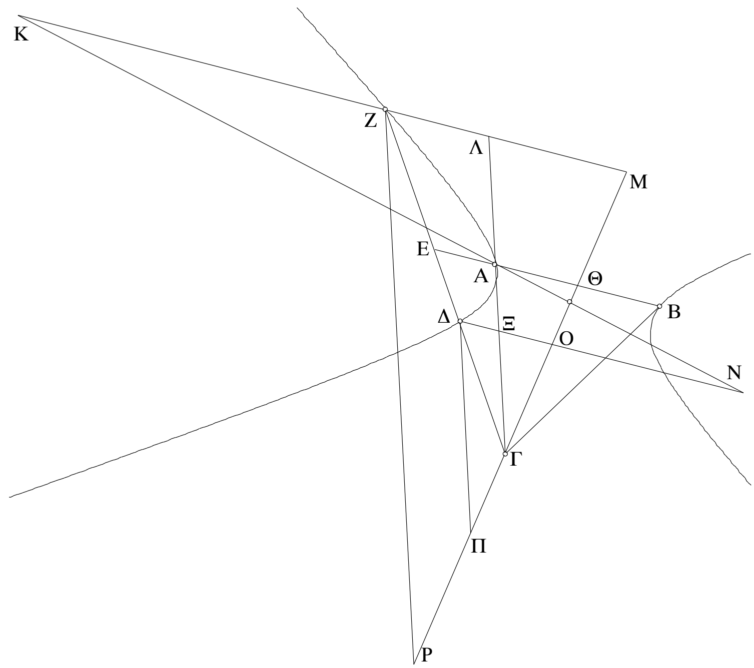


Fig. 37.1

[267] *Éléments*, VI.1.
[268] II.12.
[269] *Éléments*, VI.4 et VI.1.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Α διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΘ, ΑΚ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὰς ΑΘ, ΛΓ αἱ ΔΠ, ΖΡ, ΛΖΜ, ΝΔΟ.





Que soient menés par Γ et Α des diamètres ΓΘ et ΑΚ de la section et, par Ζ et Δ, des parallèles ΔΠ, ΖΡ, ΛΖΜ et ΝΔΟ à ΑΘ et ΛΓ.

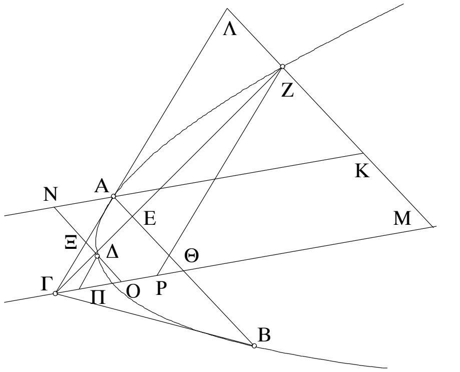


Fig. 37.2

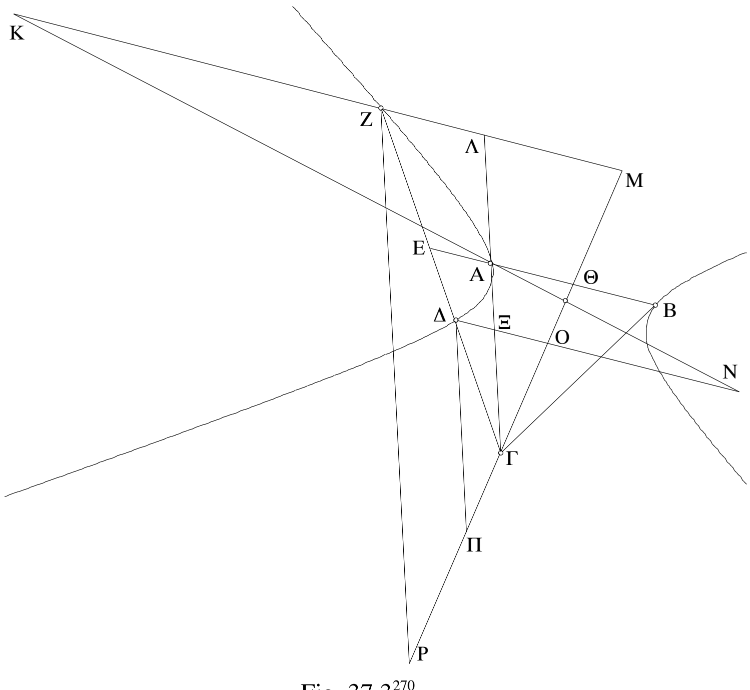


Fig. 37.3[270]

[270] **V** présente deux autres figures des sections opposées ; voir Note complémentaire [48].

Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΖΜ τῇ ΞΔΟ, ἔστιν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΛΖ πρὸς ΞΔ καὶ ἡ ΖΜ πρὸς ΔΟ καὶ ἡ ΛΜ πρὸς ΞΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ· ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ΛΜΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΓΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, τὸ ΖΡΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΓΜ πρὸς τὸ ΞΟΓ, τὸ ΖΡΜ πρὸς τὸ ΔΠΟ, καὶ λοιπὸν τὸ ΛΓΡΖ τετράπλευρον πρὸς λοιπὸν τὸ ΞΓΠΔ.

Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΛΓΡΖ τετράπλευρον τῷ ΑΛΚ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΞΓΠΔ τῷ ΑΝΞ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ· ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΛΚ πρὸς τὸ ΑΝΞ, τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ.

Καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΔΕ.

– λη΄ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ διὰ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα καὶ τὴν διὰ τῆς συμπτώσεως παράλληλον τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ, ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένης.

Ἔστω ἡ ΑΒ τομὴ καὶ αἱ ΑΓ, ΒΓ ἐφαπτόμεναι καὶ ἡ ΑΒ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα καὶ αἱ ΑΝ, ΓΜ διάμετροι· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΓΟ, καὶ διήχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΖΕΔΟ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΟ πρὸς ΟΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.

3 pr. τὸ V^1 : τὼ V ‖ 7 ΛΓΡΖ Ψ : ΑΓΡΖ V^1 ΑΓΡΞ V ‖ 10 ΛΜ — ἀπὸ Ψ : om. V ‖ 15 λη΄ V^5 : om. V ‖ 26 ΖΕΔΟ Ψ : ΖΕΟΔ V.

Dès lors, puisque ΛΖΜ est parallèle à ΞΔΟ, ΛΖ est à ΞΔ, ΖΜ est à ΔΟ et ΛΜ est à ΞΟ comme ΖΓ est à ΓΔ[271] ; le carré sur ΖΜ est donc à celui sur ΔΟ comme le carré sur ΛΜ est à celui sur ΞΟ ; mais le triangle ΛΜΓ est au triangle ΞΓΟ comme le carré sur ΛΜ est à celui sur ΞΟ[272], et le triangle ΖΡΜ est au triangle ΔΠΟ comme le carré sur ΖΜ est à celui sur ΟΔ ; le triangle ΖΡΜ est donc aussi au triangle ΔΠΟ, et le quadrilatère restant ΛΓΡΖ est au quadrilatère restant ΞΓΠΔ, comme le triangle ΛΓΜ est au triangle ΞΟΓ[273].

Or le quadrilatère ΛΓΡΖ est égal au triangle ΑΛΚ[274], et le quadrilatère ΞΓΠΔ est égal au triangle ΑΝΞ ; le triangle ΑΛΚ est donc au triangle ΑΝΞ comme le carré sur ΛΜ est à celui sur ΞΟ ; mais le carré sur ΖΓ est à celui sur ΓΔ comme le carré sur ΛΜ est à celui sur ΞΟ, le carré sur ΛΑ est à celui sur ΑΞ[275] et le carré sur ΖΕ est à celui sur ΕΔ[276] comme le triangle ΑΛΚ est au triangle ΑΝΞ ; le carré sur ΖΕ est donc aussi à celui sur ΕΔ comme le carré sur ΖΓ est à celui sur ΓΔ.

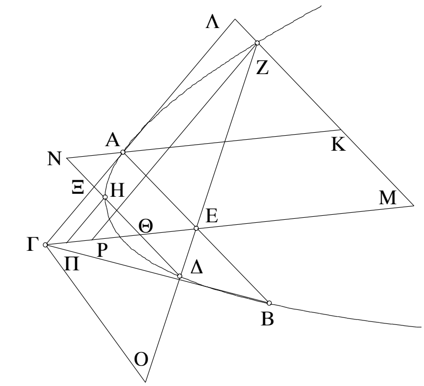
En vertu de quoi, ΖΕ est à ΔΕ comme ΖΓ est à ΓΔ.

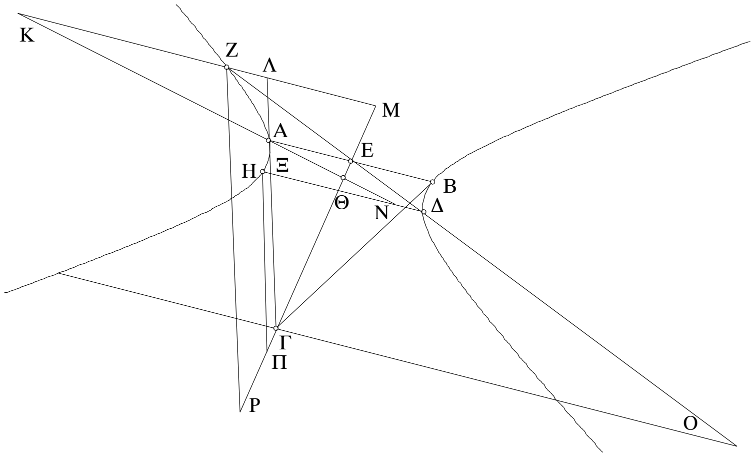
– 38 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, par le point de rencontre des tangentes, est menée une certaine droite parallèle à la droite joignant les points de contact, et que, par le milieu de la droite joignant les points de contact, est menée une droite coupant la section en deux points et la parallèle, passant par le point de rencontre, à la droite joignant les points de contact, les segments obtenus par la droite joignant les points de contact seront comme la droite entière est à la droite découpée à l'extérieur entre la section et la parallèle.*

Soient la section ΑΒ, les tangentes ΑΓ et ΒΓ, la droite ΑΒ joignant les points de contact et les diamètres ΑΝ et ΓΜ ; il est évident que ΑΒ sera coupée en deux parties égales au point Ε[277]. Que soit menée de Γ une parallèle ΓΟ à ΑΒ, et que soit menée par Ε une droite ΖΕΔΟ.

Je dis que ΖΕ est à ΕΔ comme ΖΟ est à ΟΔ.

[271] *Éléments*, VI.4.
[272] *Éléments*, VI.19.
[273] *Éléments*, V.19.
[274] Prop. 2 et 11.
[275] *Éléments*, VI.19.
[276] *Éléments*, VI.2.
[277] II.30 et 39.





Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΛΖΚΜ, ΔΘΗΞΝ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Η παρὰ τὴν ΛΓ αἱ ΖΡ, ΗΠ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ, τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ· καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ, τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΞ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ, καὶ ὡς ἡ ΖΟ

1 Ζ Ψ : Ξ V || ΔΘΗΞΝ Ψ : ΔΘΗΝΞΝ V || 5 ΟΔ Ψ : ΑΔ V.

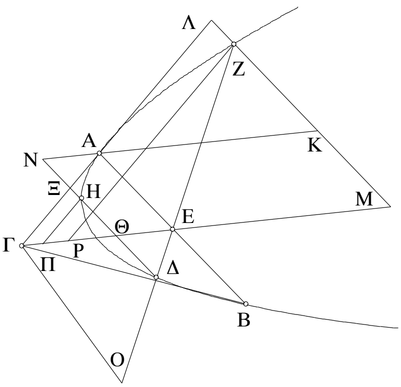


Fig. 38.1

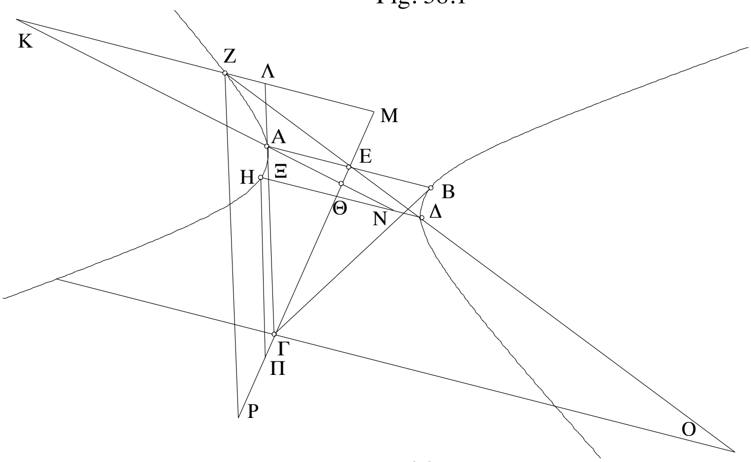


Fig. 38.2[278]

Que soient menées de Z et Δ des parallèles ΛZKM et ΔΘHΞN à AB, et, par Z et H, des parallèles ZP et HΠ à ΛΓ. On démontrera pareillement qu'auparavant que le carré sur ΛA est à celui sur AΞ comme le carré sur ΛM est à celui sur ΞΘ[279] ; d'autre part, le carré sur ΛΓ est à celui sur ΓΞ et le carré sur ZO est à celui sur OΔ comme le carré sur ΛM est à celui sur ΞΘ[280], et le carré sur ZE est à celui sur EΔ comme le carré sur ΛA est à

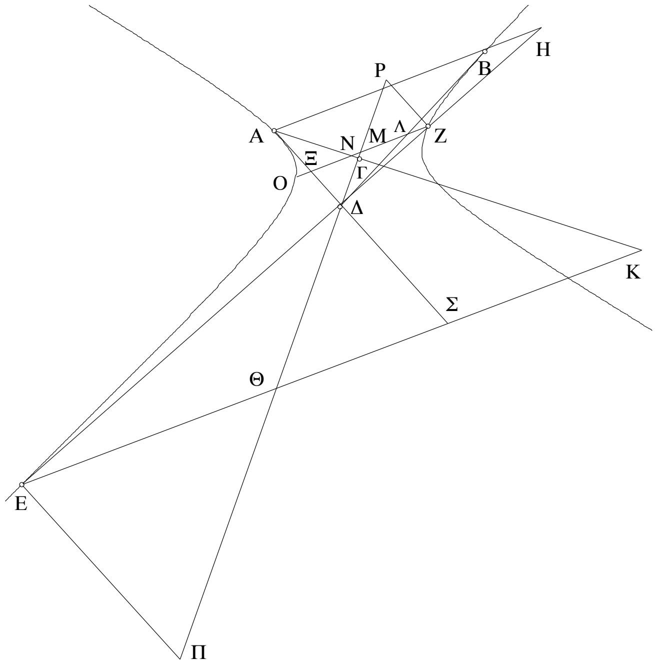
[278] On trouve une seconde figure des opposées dans **V** ; L'hyperbole et l'ellipse ne sont pas représentées.
[279] Voir prop. 37.
[280] *Éléments*, VI.4 et VI.2.

πρὸς ΟΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.

– λθʹ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης, οὕτω τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΔΖΗ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ.



2 λθʹ V[5] : om. V ‖ 7 alt. τῆς Canon. : ὑπὸ τῆς V ‖ 11 Δ Canon. : Ε V.

celui sur AΞ[281] ; le carré sur ZE est donc à celui sur EΔ comme le carré sur ZO est à celui sur OΔ, et ZE est à EΔ comme ZO est à OΔ.

– 39 – *Si deux tangentes à des opposées se rencontrent, qu'une droite est menée par les points de contact, que, du point de rencontre des tangentes, est menée une droite coupant chacune des sections et la droite joignant les points de contact, les segments de la droite obtenus par les sections et le point de rencontre des tangentes seront comme la droite entière est à la droite découpée à l'extérieur entre la section et la droite joignant les points de contact*.

Soient des opposées A et B, de centre Γ et de tangentes AΔ et ΔB ; que soient menées des droites de jonction AB et ΓΔ et qu'elles soient prolongées, et que, par Δ, soit menée une certaine droite EΔZH.

Je dis que EΔ est à ΔZ comme EH est à HZ.

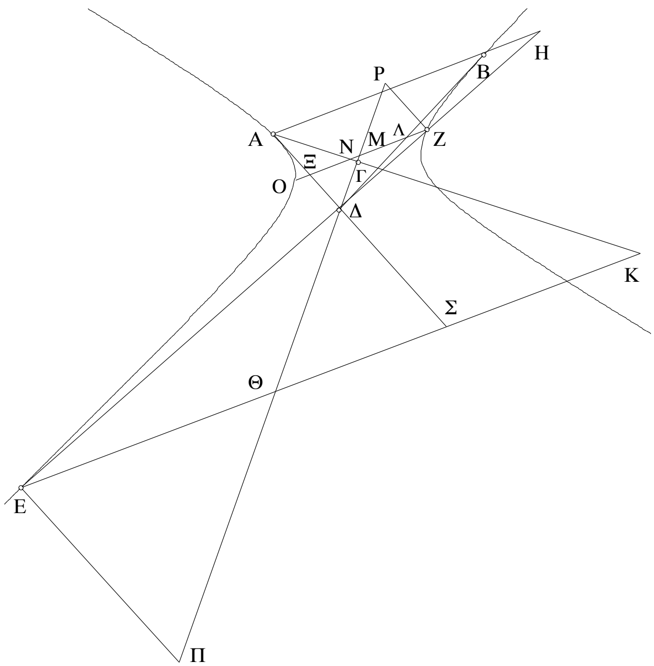


Fig. 39

[281] *Éléments*, VI.2.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, παρὰ μὲν τὴν ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΘΣ, ΖΛΜΝΞΟ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΕΠ, ΖΡ.

Ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΞ, ΕΣ καὶ διηγμέναι εἰς αὐτὰς αἱ ΕΖ, ΞΣ, ΘΜ, ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΣ, ἡ ΖΜ πρὸς ΜΞ. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΖΜ, ἡ ΘΣ πρὸς ΞΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΖ, τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΖ, τὸ ΕΘΠ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΜ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ, τὸ ΔΘΣ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΜΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΘΠ πρὸς τὸ ΖΡΜ, τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ.

Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΘΠ τοῖς ΑΣΚ, ΘΔΣ, τὸ δὲ ΡΜΖ τοῖς ΑΞΝ, ΔΜΞ· ὡς ἄρα τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ, τὸ ΑΣΚ μετὰ τοῦ ΘΔΣ πρὸς τὸ ΑΞΝ μετὰ τοῦ ΞΜΔ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΣΚ πρὸς λοιπὸν τὸ ΑΝΞ ἐστιν ὡς τὸ ΔΣΘ πρὸς τὸ ΔΞΜ.

Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΑΣΚ πρὸς τὸ ΑΝΞ, τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ὡς δὲ τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΔΜ, τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΜ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ.

Καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ.

– μʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ ἀπὸ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτω τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

2 ΖΛΜΝΞΟ Ψ : ΞΛΜΝΞΟ V ‖ 5 ΖΜ Ψ : ΞΜ V ‖ 11 ΑΞΝ Canon. : ΑΞΜ Ψ ‖ 13 alt. τὸ Mont. : ὡς τὸ V ‖ 19 μʹ V^5 : om. V.

Que soit menée une droite de jonction ΑΓ et qu'elle soit prolongée, et que, par Ε et Ζ, soient menées des parallèles ΕΘΣ et ΖΛΜΝΞΟ à ΑΒ, et des parallèles ΕΠ et ΖΡ à ΑΔ.

Dès lors, puisque ΖΞ et ΕΣ sont parallèles, et que sont menées jusqu'à elles des droites ΕΖ, ΞΣ et ΘΜ, ΖΜ est à ΜΞ comme ΕΘ est à ΘΣ[282]. *Par permutation*, ΘΣ est à ΞΜ comme ΕΘ est à ΖΜ ; le carré sur ΘΣ est donc aussi à celui sur ΞΜ comme le carré sur ΘΕ est à celui sur ΜΖ ; mais le triangle ΕΘΠ est au triangle ΖΡΜ comme le carré sur ΕΘ est à celui sur ΜΖ[283], et le triangle ΔΘΣ est au triangle ΞΜΔ comme le carré sur ΘΣ est à celui sur ΞΜ ; le triangle ΔΘΣ est donc aussi au triangle ΞΜΔ comme le triangle ΕΘΠ est au triangle ΖΡΜ.

Or le triangle ΕΘΠ est égal à la somme des triangles ΑΣΚ et ΘΔΣ[284], et le triangle ΡΜΖ est égal à la somme des triangles ΑΞΝ et ΔΜΞ ; la somme du triangle ΑΣΚ et du triangle ΘΔΣ est donc à la somme du triangle ΑΞΝ et du triangle ΞΜΔ comme le triangle ΔΘΣ est au triangle ΞΜΔ, et le triangle restant ΑΣΚ est au triangle restant ΑΝΞ comme le triangle ΔΣΘ est au triangle ΔΞΜ[285].

Mais le carré sur ΚΑ est à celui sur ΑΝ, c'est-à-dire le carré sur ΕΗ est à celui sur ΖΗ[286], comme le triangle ΑΣΚ est au triangle ΑΝΞ[287], et le carré sur ΘΔ est à celui sur ΔΜ, c'est-à-dire le carré sur ΕΔ est à celui sur ΔΖ[288], comme le triangle ΔΘΣ est au triangle ΞΔΜ[289].

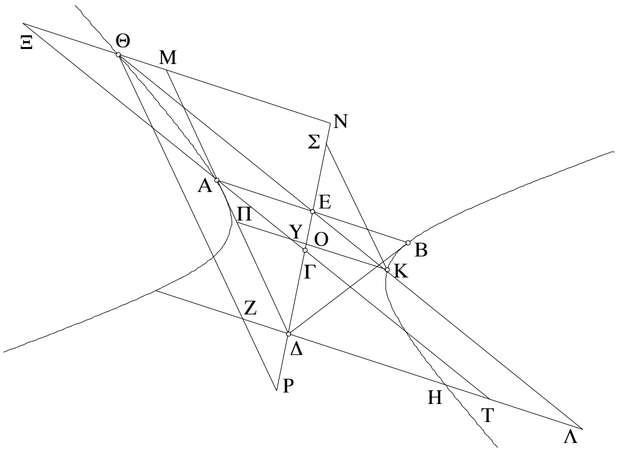
ΕΔ est donc aussi à ΔΖ comme ΕΗ est ΗΖ.

– 40 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, par le point de rencontre des tangentes, est menée une droite parallèle à la droite joignant les points de contact, et que, du milieu de la droite joignant les points de contact est menée une droite coupant chacune des sections et la parallèle à la droite joignant les points de contact, les segments de la droite obtenus par les sections et la droite joignant les points de contact seront comme la droite*

[282] *Éléments*, VI.4.
[283] *Éléments*, VI.19.
[284] Prop. 11.
[285] *Éléments*, VI.19.
[286] *Éléments*, VI.4 et VI.2.
[287] *Éléments*, VI.19.
[288] *Éléments*, VI.4.
[289] *Éléments*, VI.19.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΔΓΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. Καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθω ἡ ΖΔΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΘΕΚΛ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ.



Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, Κ παρὰ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΞΘΜΝ, ΚΟΠ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΘΡ, ΚΣ, καὶ διήχθω ἡ ΞΑΓΤ.

Ἐπεὶ οὖν εἰς παραλλήλους τὰς ΞΜ, ΚΠ διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΞΑΥ, ΜΑΠ, ἔστιν ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΥ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΥ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΘΕΝ, ΚΕΟ τριγώνων· ὡς ἄρα ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΟ, τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ.

Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΚ, τὸ ΘΡΝ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΣΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ, τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΘΝΡ πρὸς τὸ ΚΟΣ, τὸ ΞΜΑ πρὸς τὸ ΑΥΠ· ἴσον δὲ τὸ ΘΝΡ τοῖς ΞΑΜ, ΜΝΔ, τὸ δὲ ΣΟΚ τοῖς ΑΥΠ, ΔΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΞΜΑ μετὰ τοῦ ΜΝΔ τριγώνου

2 ΔΓΕ Ψ : ΓΔΕ V ‖ 4 ΘΕΚΛ Ψ : ΔΕ V ‖ 6 ΞΘΜΝ Ψ : ΘΜΝΞ V ‖ 7 ΞΑΓΤ Ψ : ΑΓΞΤ V ‖ 9 ΜΑΠ Ψ : ΜΑΓ V ‖ ΜΑ Ψ : ΜΔ V ‖ 13 πρὸς c v Ψ : iter. V ‖ 16-17 τὸ ΞΜΑ Ψ : om. V.

entière menée est à la droite découpée à l'extérieur entre la parallèle et la section.

Soient des opposées, de centre Γ et de tangentes ΑΔ et ΔΒ, et que soient menées des droites de jonction ΑΒ et ΔΓΕ ; ΑΕ est donc égale à ΕΒ[290]. Que, de Δ, soit menée une parallèle ΖΔΗ à ΑΒ et, par Ε, une droite quelconque ΘΕΚΛ.

Je dis que ΘΕ est à ΕΚ comme ΘΛ est à ΛΚ.

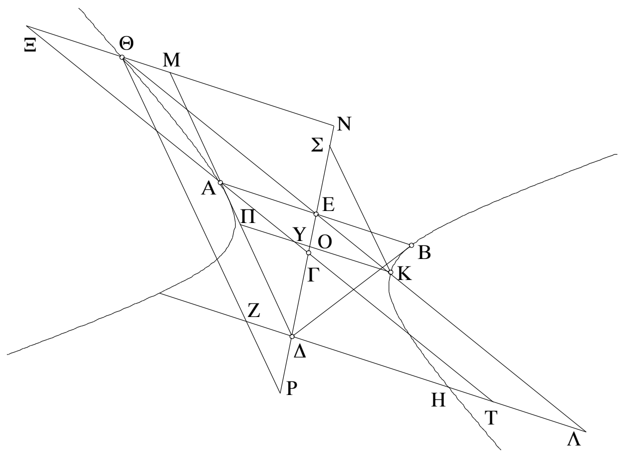


Fig. 40

Que soient menées de Θ et de Κ des parallèles ΞΘΜΝ et ΚΟΠ[291] à ΑΒ et des parallèles ΘΡ et ΚΣ à ΑΔ, et que soit menée une droite ΞΑΓΤ.

Dès lors, puisque des droites ΞΑΥ et ΜΑΠ sont menées jusqu'à des parallèles ΞΜ et ΚΠ, ΜΑ est à ΑΠ comme ΞΑ est à ΑΥ[292] ; mais ΘΕ est à ΕΚ comme ΞΑ est à ΑΥ[293] et ΘΝ est à ΚΟ comme ΘΕ est à ΕΚ, à cause de la similitude des triangles ΘΕΝ et ΚΕΟ[294] ; ΜΑ est donc à ΑΠ comme ΘΝ est à ΚΟ ; le carré sur ΜΑ est donc aussi à celui sur ΑΠ comme le carré sur ΘΝ est à celui sur ΚΟ.

Mais le triangle ΘΡΝ est au triangle ΚΣΟ comme le carré sur ΘΝ est à celui sur ΟΚ[295], et le triangle ΞΜΑ est au triangle ΑΥΠ comme le carré sur ΜΑ est à celui sur ΑΠ ; le triangle ΞΜΑ est donc aussi au triangle

[290] II.39.
[291] Il manque ici le point Υ.
[292] *Éléments*, VI.4.
[293] *Éléments*, VI.2 et VI.4.
[294] *Éléments*, VI.4.
[295] *Éléments*, VI.19.

πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΠΔΟ τριγώνου, οὕτω τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΠΥΑ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΜΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΟΠ τρίγωνόν ἐστιν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

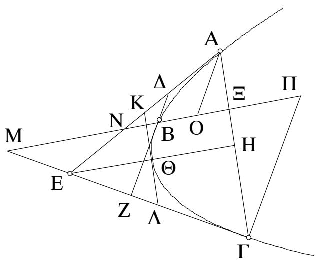
Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, ὡς δὲ τὸ ΜΔΝ πρὸς τὸ ΠΔΟ, τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ.

Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ.

– μαʹ – Ἐὰν παραβολῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσονται.

Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ.

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ καὶ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ.



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Η.

Ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Η διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς, φανερόν.

2 ΝΜΔ Canon. : ΞΝΜΔ V ‖ 4 post ὡς fort. addendum μὲν ‖ 13 μαʹ V^5 : om. V.

ΑΥΠ comme le triangle ΘΝΡ est au triangle ΚΟΣ ; or le triangle ΘΝΡ est égal la somme des triangles ΞΑΜ et ΜΝΔ[296], et le triangle ΣΟΚ est égal à la somme des triangles ΑΥΠ et ΔΟΠ ; le triangle ΞΜΑ est donc aussi au triangle ΠΥΑ comme la somme du triangle ΞΜΑ et du triangle ΜΝΔ est à la somme du triangle ΑΥΠ et du triangle ΠΔΟ ; le triangle restant ΝΜΔ est donc aussi au triangle restant ΔΟΠ comme le tout est au tout[297].

Mais le carré sur ΞΑ est à celui sur ΑΥ comme le triangle ΞΜΑ est au triangle ΑΥΠ, et le carré sur ΜΝ est à celui sur ΠΟ comme le triangle ΜΔΝ est au triangle ΠΔΟ[298] ; le carré sur ΞΑ est donc à celui sur ΑΥ comme le carré sur ΜΝ est à celui sur ΠΟ ; or le carré sur ΝΔ est à celui sur ΟΔ comme le carré sur ΜΝ est à celui sur ΠΟ[299], le carré sur ΘΕ est à celui sur ΕΚ comme le carré sur ΞΑ est à celui sur ΑΥ[300], et le carré sur ΘΛ est à celui sur ΛΚ comme le carré sur ΝΔ est à celui sur ΔΟ[301] ; le carré sur ΘΛ est donc aussi à celui sur ΚΛ comme le carré sur ΘΕ est à celui sur ΕΚ.

ΘΛ est donc à ΛΚ comme ΘΕ est à ΕΚ.

– 41 – *Si trois droites tangentes à une parabole se rencontrent entre elles, elles seront coupées dans le même rapport.*

Soient une parabole ΑΒΓ et des tangentes ΑΔΕ, ΕΖΓ et ΔΒΖ.

Je dis que ΕΔ est à ΔΑ et ΖΒ est à ΒΔ comme ΓΖ est à ΖΕ.

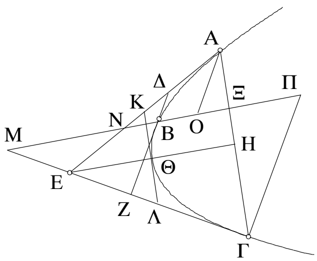


Fig. 41

Que soit menée une droite de jonction ΑΓ et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Η.

[296] Prop. 11.
[297] *Éléments*, V.19.
[298] *Éléments*, VI.19.
[299] *Éléments*, VI.4.
[300] On attend la conclusion de ce deuxième syllogisme.
[301] *Éléments*, VI.4 et VI.2.

Εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ Β ἔρχεται, παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Β ὑπὸ τῆς ΕΗ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἔσται ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΕ, καὶ φανερὸν τὸ ζητούμενον.

Μὴ ἐρχέσθω <δὴ> διὰ τοῦ Β, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΛ· ἐφάψεται ἄρα τῆς τομῆς κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τὰ εἰρημένα ἴση ἔσται ἡ ΑΚ τῇ ΚΕ καὶ ἡ ΛΓ τῇ ΛΕ. Ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΕΗ ἡ ΜΝΒΞ, διὰ δὲ τῶν Α, Γ παρὰ τὴν ΔΖ αἱ ΑΟ, ΓΠ.

Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΕΘ, διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ· καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β ἡ ΔΖ· κατηγμέναι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΟ, ΓΠ.

Καὶ ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΜ, κατηγμένη δὲ ἡ ΓΠ, ἴση ἔσται ἡ ΜΒ τῇ ΒΠ, ὥστε καὶ ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΓ, ἔστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΖ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΛ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ· ἀλλ' ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ, ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ· ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΛΓ πρὸς ΓΕ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΞ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΖ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΕΖ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ· διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ.

Πάλιν ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΝ καὶ κατηγμένη ἡ ΑΟ, ἴση ἐστὶν ἡ ΝΒ τῇ ΒΟ καὶ ἡ ΝΔ τῇ ΔΑ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΑ· ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΑΚ, ἡ ΝΑ πρὸς ΑΔ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ· ἀλλ' ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ· ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ, ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ· διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, ἡ ΕΑ πρὸς ΑΔ· διελόντι ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ

4 δὴ add. Federspiel[5] vide adn. ‖ 5 ΚΘΛ Ψ : ΘΚΛ V ‖ 9 post ΜΒ del. τῇ ΕΘ, διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ V^1 ‖ 12 ἔσται c v Ψ : iter. V ‖ 18 ΑΞ V^1 : ΑΓ V.

Il est d'abord évident que la droite menée de E à H est un diamètre de la section[302].

Si d'abord elle passe par B, ΔZ est parallèle à AΓ[303] et elle sera coupée en deux parties égales en B par EH ; en vertu de quoi, AΔ sera égale à ΔE et ΓZ à ZE, et ce qui est cherché est évident.

Que, <maintenant>, elle ne passe pas par B[304], mais par Θ, et que soit menée par Θ une parallèle KΘΛ à AΓ ; elle sera donc tangente à la section en Θ[305], et, en vertu de ce qu'on vient de dire, AK sera égale à KE et ΛΓ sera égale à ΛE. Que soient menées par B une parallèle MNBΞ à EH et, par A et Γ, des parallèles AO et ΓΠ à ΔZ.

Dès lors, puisque MB est parallèle à EΘ, MB est un diamètre ; d'autre part, ΔZ est une tangente en B ; les droites AO et ΓΠ sont donc des droites abaissées.

Puisque MB est un diamètre, que ΓM est une tangente, que ΓΠ est une droite abaissée, MB sera égale à BΠ[306], de sorte que MZ sera aussi égale à ZΓ[307].

Puisque MZ est égale à ZΓ et que EΛ est égale à ΛΓ, EΓ est à ΓΛ comme MΓ est à ΓZ ; *par permutation*, ZΓ est à ΓΛ comme MΓ est à ΓE ; mais ΞΓ est à ΓH comme MΓ est à ΓE[308] ; ΞΓ est donc aussi à ΓH comme ZΓ est à ΓΛ ; or ΛΓ est à ΓE comme HΓ est à ΓA, puisque chacune est le double ; *à intervalle égal*, EΓ est donc à ΓZ comme AΓ est à ΓΞ ; *par interversion*, ΓA est à AΞ comme EΓ est à EZ ; *par division*, ΓΞ est à ΞA comme ΓZ est à ZE.

De même, puisque MB est un diamètre, que AN est une tangente et que AO est une droite abaissée, NB est égale à BO[309] et NΔ est égale à ΔA[310] ; or EK est aussi égale à KA ; NA est donc à AΔ comme AE est à AK ; *par permutation*, KA est à AΔ comme EA est à AN ; mais HA est à AΞ comme EA est à AN[311] ; HA est donc à AΞ comme KA est à AΔ ; or EA est aussi à AK comme ΓA est à HA puisque chacune est le double de chacune ; *à intervalle égal*, EA est à AΔ comme ΓA est à AΞ ; *par division*, EΔ est à ΔA comme ΓΞ est à ΞA ; or on a démontré aussi que

[302] II.29.
[303] II.5.
[304] Voir la Note complémentaire [14] au Livre II.
[305] I.32.
[306] I.35.
[307] *Éléments*, VI.2.
[308] *Éléments*, VI.4.
[309] I.35.
[310] *Éléments*, VI.2.
[311] *Éléments*, VI.4.

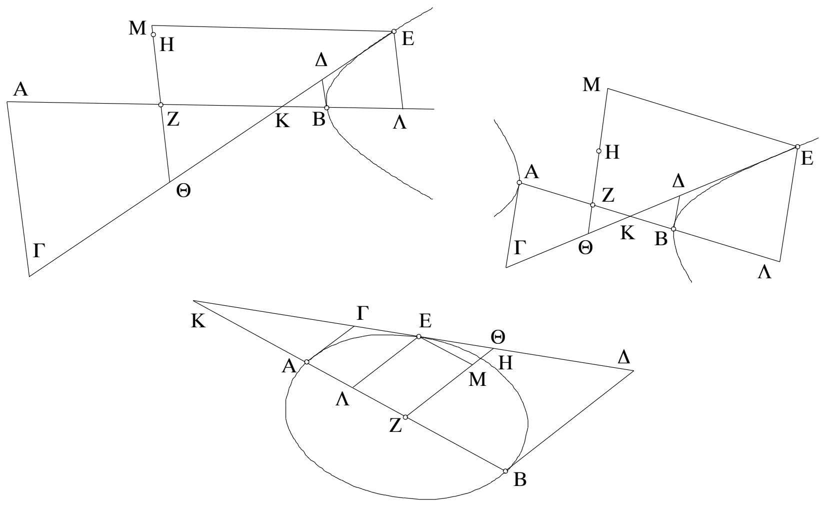
ΕΔ πρὸς ΔΑ· ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΑΞ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· ὡς ἄρα ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΕΔ πρὸς ΑΔ.

Πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΓΠ πρὸς ΑΟ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΓΠ τῆς ΒΖ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ, ἡ δὲ ΑΟ τῆς ΒΔ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΝ τῆς ΝΔ, ὡς ἄρα ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ καὶ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ καὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ.

– μβʹ – Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ᾽ ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἀχθῇ ἐφαπτομένη, ἀποτεμεῖ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδους.

Ἔστω γάρ τις τῶν προειρημένων τομῶν ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Β ἤχθωσαν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην αἱ ΑΓ, ΔΒ, ἄλλη δέ τις ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Ε ἡ ΓΕΔ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ,ΒΔ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.



7 μβʹ V^5 : om. V || ἐν Ψ : om. V.

ΓΖ était à ΖΕ comme ΓΞ est à ΑΞ ; ΕΔ est donc à ΑΔ comme ΓΖ est à ΖΕ.

De même, puisque ΓΠ est à ΑΟ comme ΓΞ est à ΞΑ[312], et que ΓΠ est le double de ΒΖ[313], puisque ΓΜ est aussi le double de ΜΖ, et que ΑΟ est le double de ΒΔ, puisque ΑΝ est aussi le double de ΝΔ, alors ΖΒ est à ΒΔ comme ΓΞ est à ΞΑ, et ΕΔ est à ΔΑ comme ΓΖ est à ΖΕ.

– 42 – *Si, dans une hyperbole, une ellipse, une circonférence de cercle ou des opposées, sont menées depuis les extrémités*[314] *d'un diamètre des parallèles à une droite abaissée de manière ordonnée, et qu'une autre droite quelconque est menée comme une tangente, elle découpera sur ces droites des droites comprenant une aire égale au quart de la figure appliquée au même diamètre*.

Soit l'une des sections susdites, de diamètre ΑΒ ; que, des points Α et Β, soient menées des parallèles ΑΓ et ΔΒ à une droite abaissée de manière ordonnée, et qu'une autre droite ΓΕΔ soit tangente en un point Ε.

Je dis que le rectangle ΑΓ,ΒΔ est égal au quart de la figure appliquée à ΑΒ.

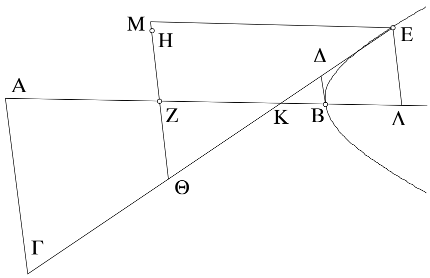


Fig. 42.1

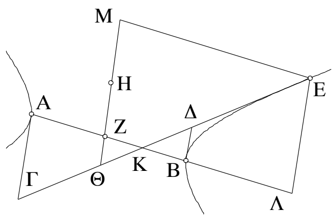


Fig. 42.2

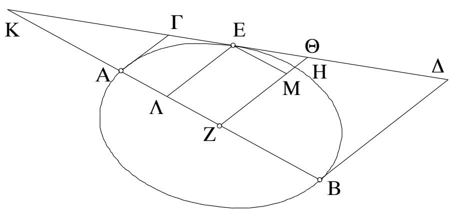


Fig. 42.3[315]

[312] *Éléments*, VI.4.

[313] *Éléments*, VI.4.

[314] L'adjectif ἄκρας est au singulier parce qu'il détermine le singulier τῆς διαμέτρου. Mais, ici et dans les protases de III, 45 et 53, on est obligé de traduire ce singulier par un pluriel.

[315] **V** représente la figure du cercle ; voir Note complémentaire [49].

Ἔστω γὰρ κέντρον τὸ Ζ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἡ ΖΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοί εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ παράλληλος, συζυγὴς ἄρα διάμετρός ἐστι τῇ ΑΒ, ὥστε τὸ ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΖΗ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ Ε ἔρχεται, ἴσαι γίνονται αἱ ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ, καὶ φανερὸν αὐτόθεν ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ,ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Μὴ ἐρχέσθω δή, καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ μὲν τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΕΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΒ ἡ ΕΜ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΖΛ τῷ ἀπὸ ΑΖ, ἔστιν ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΖΛ, καὶ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΛ ἐστιν ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ, τουτέστι πρὸς ΖΒ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΚ, ἡ ΛΑ πρὸς ΑΚ· συνθέντι ἢ διελόντι ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΖ, ἡ ΛΚ πρὸς ΚΑ · καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς ΖΘ, ἡ ΕΛ πρὸς ΓΑ. Τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΒ,ΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘ,ΕΛ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘΖΜ. Τὸ δὲ ὑπὸ ΘΖΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ,ΓΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

– μγʹ – Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύῃ, ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης κατὰ τὴν πρὸς τῷ ἄξονι κορυφὴν τῆς τομῆς.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ, ἄξων δὲ ὁ ΒΔ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη ἡ ΖΒΗ, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἐφαπτομένη ἡ ΓΑΘ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΔΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔΘ.

14 ἐστιν Heiberg : ἐστι δὲ V ‖ Ζ]Α e corr. V[1] ‖ 15 Ζ]Β e corr. V[1] ‖ pr. ἡ Ψ : om. V ‖ 22 μγʹ V[5] : om. V ‖ ἀποτεμεῖ V : -ῇ V[1sl] ‖ ἀπὸ τῶν c Ψ : iter. V ‖ 26 ἄ]ξ[ων V : χ V ‖ 27 ΖΒΗ Ψ : ΒΖΗ V.

Soit un centre Z, et que, par Z, soit menée une parallèle ZHΘ aux droites AΓ et BΔ.

Dès lors, puisque AΓ et BΔ sont parallèles, et que ZH est aussi parallèle, ZH est un diamètre conjugué au diamètre AB, de sorte que le carré sur ZH est égal au quart de la figure appliquée à AB[316].

Si d'abord, dans le cas de l'ellipse et du cercle, ZH passe par E, les droites AΓ, ZH et BΔ sont égales, et il va évidemment de soi que le rectangle AΓ,BΔ est égal au carré sur ZH, c'est-à-dire au quart de la figure appliquée à AB.

Que ZH, maintenant, ne passe pas par E ; que les prolongements des droites ΔΓ et BA se rencontrent en un point K ; que, par E, soient menées une parallèle EΛ à AΓ et une parallèle EM à AB.

Dès lors, puisque le rectangle KZ,ZΛ est égal au carré sur AZ[317], ZA est à ZΛ comme KZ est à ZA, et KA est à AΛ comme KZ est à ZA[318], c'est-à-dire à ZB ; *par inversion*, ΛA est à AK comme BZ est à ZK ; *par composition* ou *par division*, ΛK est à KA comme BK est à KZ[319] ; EΛ est donc aussi à ΓA comme ΔB est à ZΘ[320]. Le rectangle ΔB,ΓA est donc égal au rectangle ZΘ,EΛ, c'est-à-dire au rectangle ΘZ,ZM. Or le rectangle ΘZ,ZM est égal au carré sur ZH[321], c'est-à-dire au quart de la figure appliquée à AB.

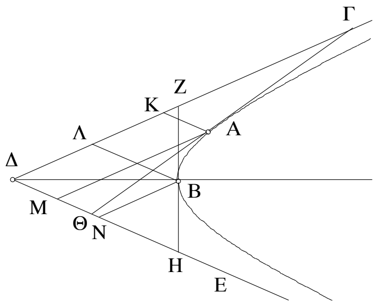
Le rectangle ΔB,ΓA est donc aussi égal au quart de la figure appliquée à AB.

– 43 – *Si une droite est tangente à une hyperbole, elle découpera sur les asymptotes et du côté du centre de la section des droites comprenant une aire égale au rectangle compris par les droites découpées par la tangente au sommet de la section situé sur l'axe*.

Soit une hyperbole AB, d'asymptotes ΓΔ et ΔE et d'axe BΔ ; que soit menée par B une tangente ZBH, et que soit menée une autre tangente quelconque ΓAΘ.

Je dis que le rectangle ZΔ,ΔH est égal au rectangle ΓΔ,ΔΘ.

[316] I. *Secondes définitions* 3.
[317] I.37.
[318] *Éléments*, V.12 (hyperbole) et *Éléments*, V.19 (ellipse).
[319] Voir Note complémentaire [50].
[320] *Éléments*, VI.4.
[321] I.38.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Β παρὰ μὲν τὴν ΔΗ αἱ ΑΚ, ΒΛ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ αἱ ΑΜ, ΒΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓΑΘ, ἴση ἡ ΓΑ τῇ ΑΘ, ὥστε ἡ ΓΘ τῆς ΘΑ διπλῆ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΑΜ καὶ ἡ ΔΘ τῆς ΑΚ. Τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔΘ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΚΑΜ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται τὸ ὑπὸ ΖΔΗ τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΛΒΝ· ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΑΜ τῷ ὑπὸ ΛΒΝ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΓΔΘ τῷ ὑπὸ ΖΔΗ.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν ἡ ΔΒ ἑτέρα τις ᾖ διάμετρος καὶ μὴ ἄξων.

– μδʹ – Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι ταῖς ἀσυμπτώτοις, αἱ ἐπὶ τὰς τομὰς ἀγόμεναι παράλληλοι ἔσονται τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ.

Ἔστω γὰρ ἢ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔΕ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΑΘΖ, ΕΒΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΖΗ, ΓΕ.

Λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν.

10 μδʹ V[5] : om. V ‖ 14 ΑΒ Ψ : ΑΗ V.

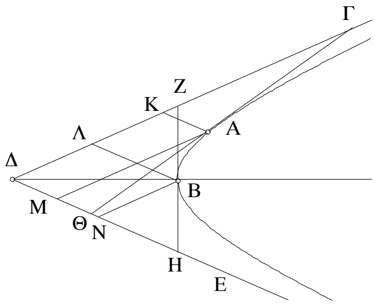


Fig. 43

Que soient menées de A et de B des parallèles AK et BΛ à ΔH, et des parallèles AM et BN à ΓΔ.

Dès lors, puisque ΓAΘ est une tangente, ΓA est égale à AΘ[322], de sorte que ΓΘ est le double de ΘA, ΓΔ le double de AM[323] et ΔΘ le double de AK[324]. Le rectangle ΓΔ,ΔΘ est donc le quadruple du rectangle KA,AM. On démontrera pareillement que le rectangle ZΔ,ΔH est le quadruple du rectangle ΛB,BN ; or le rectangle KA,AM est égal au rectangle ΛB,BN[325] ; le rectangle ΓΔ,ΔΘ est donc aussi égal au rectangle ZΔ,ΔH.

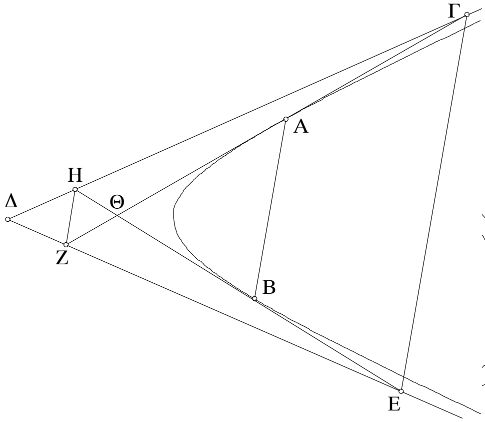
On fera une démonstration semblable même si ΔB est un autre diamètre et pas l'axe.

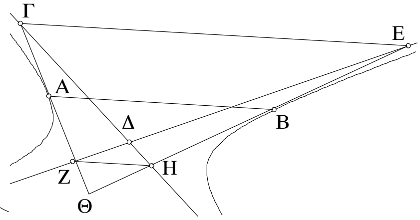
– 44[326] – *Si deux tangentes à une hyperbole ou à des opposées rencontrent les asymptotes, les droites menées jusqu'aux points d'intersection*[327] *seront parallèles à la droite joignant les points de contact*.

Soient une hyperbole ou des opposées AB, d'asymptotes ΓΔ et ΔE et de tangentes ΓAΘZ et EBΘH ; que soient menées des droites de jonction AB, ZH et ΓE.

Je dis qu'elles sont parallèles.

[322] II.3.
[323] *Éléments*, VI.2.
[324] *Éléments*, VI.4.
[325] II.12.
[326] Sur la rédaction de cette proposition, voir Note complémentaire [51].
[327] L'emploi du mot τομή au sens de « point d'intersection » est un *hapax* dans les *Coniques*.





Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΔΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΔΕ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΗΔ πρὸς ΔΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΖΗ. Καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΓ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ· ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς ΗΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΑΖ· διπλῆ γὰρ ἑκατέρα· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ.

Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ.

– με′ – Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ᾽ ἄκρου τοῦ ἄξονος ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὀρθάς, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παρὰ τὸν ἄξονα παραβληθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐλλεῖπον, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς συμπίπτουσα ταῖς πρὸς ὀρθὰς εὐθείαις, αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα ὀρθὰς ποιοῦσι γωνίας πρὸς τοῖς εἰρημένοις σημείοις.

1 τῷ c Ψ : τὸ V ‖ ἔστιν — ΓΔ Ψ : om. V ‖ 7 με′ V[5] : om. V.

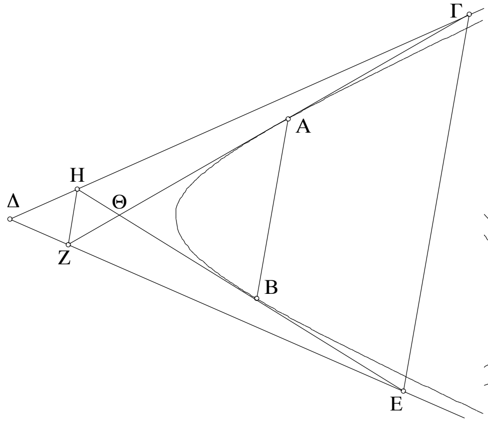


Fig. 44.1

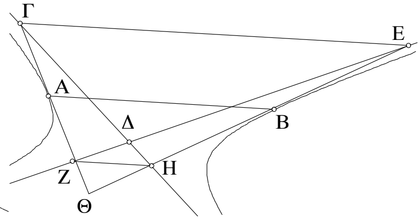


Fig. 44.2

Puisque le rectangle ΓΔ,ΔΖ est égal au rectangle ΗΔ,ΔΕ[328], ΗΔ est à ΔΖ comme ΓΔ est à ΔΕ ; ΓΕ est donc parallèle à ΖΗ[329] ; en vertu de quoi, ΘΗ est à ΗΕ comme ΘΖ est à ΖΓ[330] ; or ΓΖ est à ΑΖ comme ΗΕ est à ΗΒ, puisque chacune est le double[331] ; *à intervalle égal*, ΘΖ est donc à ΖΑ comme ΘΗ est à ΗΒ.

ΖΗ est donc parallèle à ΑΒ[332].

– 45 – *Si, dans une hyperbole, une ellipse, une circonférence de cercle ou des opposées, des droites sont menées à angles droits depuis les extrémités de l'axe, qu'est appliquée à l'axe de part et d'autre une aire égale au quart de la figure, dans le cas de l'hyperbole et des opposées en excès d'une figure carrée, dans le cas de l'ellipse, en défaut d'une figure carrée, et qu'est menée une certaine droite tangente à la section et rencontrant les droites menées à angles droits, les droites menées des points de rencontre jusqu'aux points obtenus au moyen de l'application produiront des angles droits appliqués aux points en question.*

[328] Prop. 43.

[329] *Éléments*, VI.6 et I.28 (fig. 1) ou I.27 (fig. 2). Dans son commentaire de la proposition, Eutocius expose une variante de démonstration (précédée de ἄλλως) qui déduit de ce résultat le parallélisme des droites ΖΗ et ΑΒ.

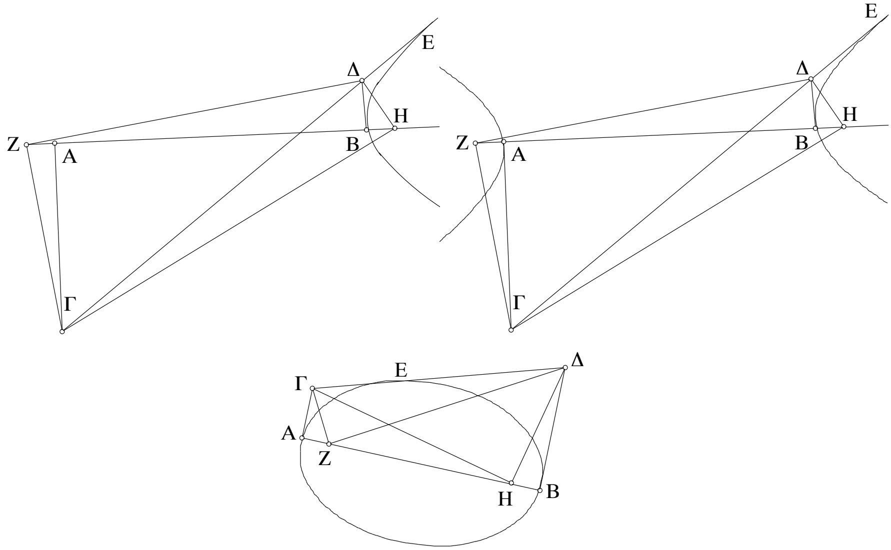
[330] *Éléments*, VI.2.

[331] II.3.

[332] *Éléments*, VI.2.

Ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΕΔ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παραβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα, ὡς εἴρηται, τὸ ὑπὸ ΑΖΒ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ.

Λέγω ὅτι ἥ τε ὑπὸ ΓΖΔ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ γωνία ὀρθή ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ,ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ· καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Β σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΖΔΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΖ, ΑΖΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΖΑ, ΔΖΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν.

5 ΓΖΔ V^{pc} Ψ : ΓΔΖ V^{ac} c v ‖ 10 pr. ὑπὸ V^{1sl} : om. V.

Soit l'une des sections en question, d'axe AB ; que soient menées à angles droits des droites AΓ et BΔ ainsi qu'une tangente ΓEΔ ; que soit appliquée de part et d'autre une aire égale au quart de la figure, comme on a dit, c'est-à-dire les rectangles AZ,ZB et AH,HB, et que soient menées des droites de jonction ΓZ, ΓH, ΔZ et ΔH.

Je dis que les angles ΓZΔ et ΓHΔ sont droits.

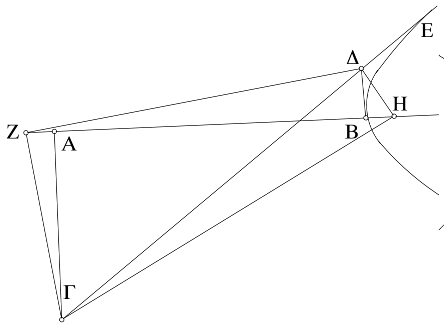


Fig. 45.1

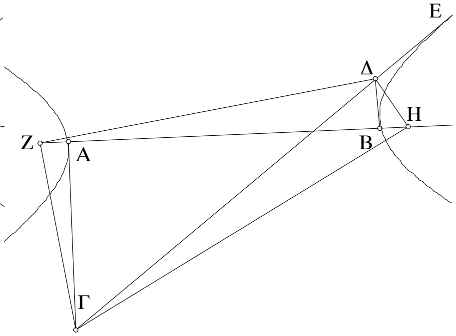


Fig. 45.2

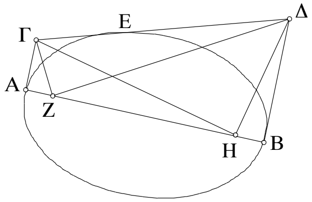


Fig. 45.3

Puisque l'on a démontré que le rectangle AΓ,BΔ était égal au quart de la figure appliquée à AB[333], et puisque le rectangle AZ,ZB est aussi égal au quart de la figure, alors le rectangle AΓ,ΔB est égal au rectangle AZ,ZB. ZB est donc à BΔ comme ΓA est à AZ ; d'autre part, les angles aux points A et B sont droits ; l'angle AΓZ est donc égal à l'angle BZΔ, et l'angle AZΓ est égal à l'angle ZΔB[334].

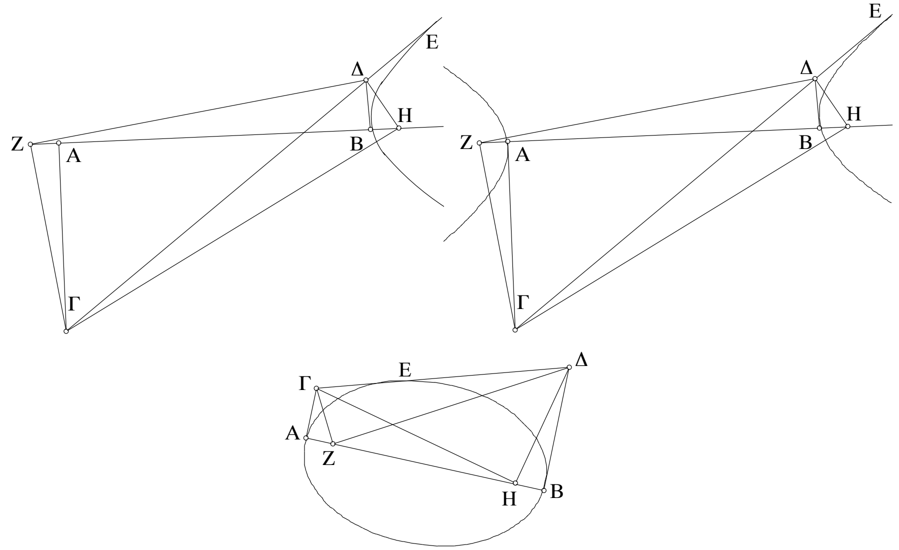
Puisque l'angle ΓAZ est droit, alors la somme des angles AΓZ et AZΓ est égale à un droit ; or on a aussi démontré que l'angle AΓZ était égal à l'angle ΔZB ; la somme des angles ΓZA et ΔZB est donc égale à un droit.

[333] Prop. 42.
[334] *Éléments*, VI.6.

Λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ὀρθή ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ ὀρθή.

– μς´ – Τῶν αὐτῶν ὄντων αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις.

Τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΖΔ, ΓΗΔ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ζ, Η σημείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου εἰσίν. Ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ, ὥστε ἡ ὑπὸ ΔΓΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ. Ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.

2 ΓΗΔ V^{pc} Ψ : ΓΔΗ V^{ac} c v ‖ 3 μς´ V^{5} : om. V ‖ 6 ΓΔΖ e corr. V^{1} ‖ 11 ΔΓΗ Ψ : ΔΓΖ V.

L'angle restant ΔZΓ est donc droit. On démontrera pareillement que l'angle ΓHΔ aussi est droit.

– 46 – *Les mêmes hypothèses étant faites, les droites de jonction font des angles égaux avec les tangentes.*

Les mêmes hypothèses étant faites, je dis que l'angle AΓZ est égal à l'angle ΔΓH et que l'angle ΓΔZ est égal à l'angle BΔH.

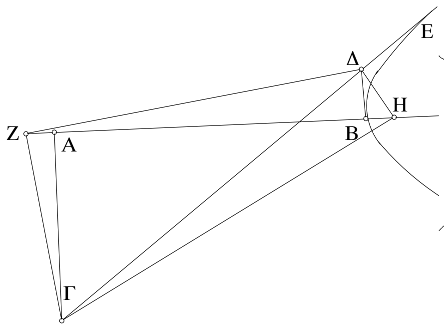


Fig. 46.1

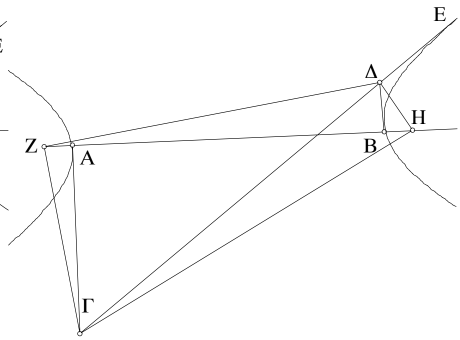


Fig. 46.2

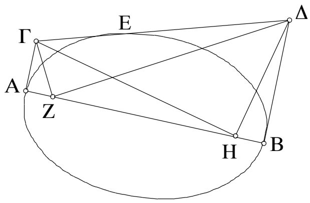


Fig. 46.3

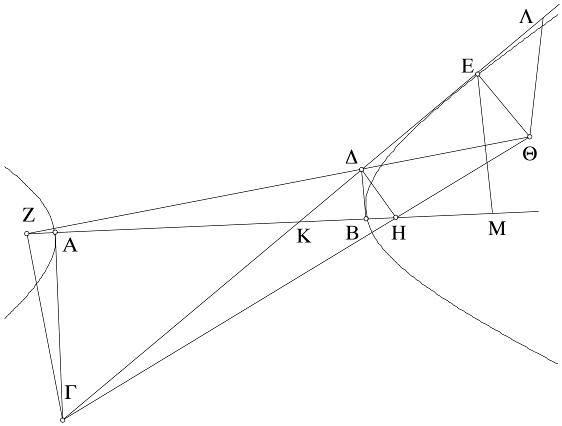
Puisque l'on a démontré que chacun des angles ΓZΔ et ΓHΔ était droit[335], le cercle décrit autour du diamètre ΓΔ passera par les points Z et H[336] ; l'angle ΔΓH est donc égal à l'angle ΔZH, puisqu'ils sont dans le même segment de cercle[337] ; or on a démontré que l'angle ΔZH était égal à l'angle AΓZ[338], de sorte que l'angle ΔΓH est égal à l'angle AΓZ. Pareillement, l'angle ΓΔZ est aussi égal à l'angle BΔH.

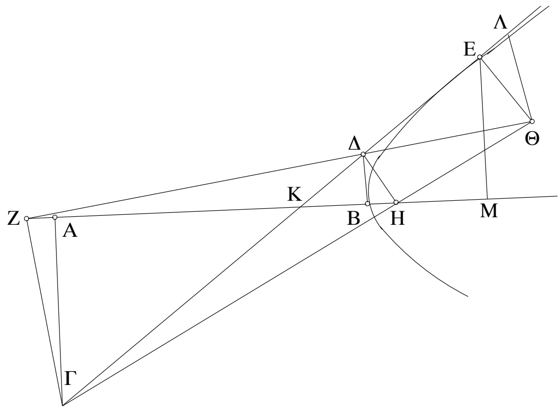
[335] Prop. 45.
[336] *Éléments*, III.31.
[337] *Éléments*, III.21.
[338] Prop. 45.

– μζ΄ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ.

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις αἱ μὲν ΓΗ, ΖΔ κατὰ τὸ Θ, αἱ δὲ ΓΔ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ.

Λέγω ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ ΕΘ ἐπὶ τὴν ΓΔ.





1 μζ΄ V^5 : om. V.

– 47 – *Les mêmes hypothèses étant faites, la droite menée du point de rencontre des droites de jonction jusqu'au point de contact sera à angles droits avec la tangente*.

Toutes choses égales d'ailleurs, que les droites ΓΗ et ΖΔ se rencontrent entre elles en un point Θ ; que les prolongements des droites ΓΔ et ΒΑ se rencontrent un un point Κ, et que soit menée une droite de jonction ΕΘ.

Je dis que ΕΘ est perpendiculaire à ΓΔ.

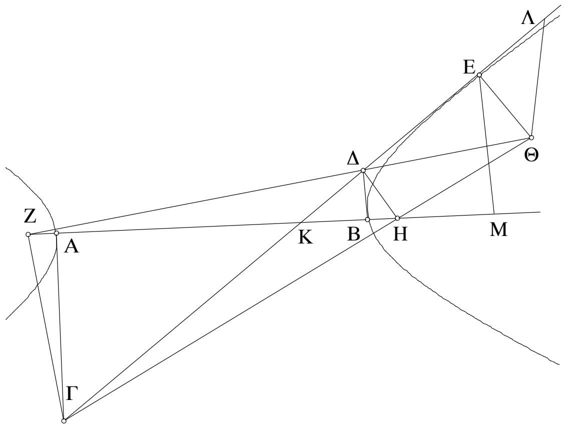


Fig. 47.1

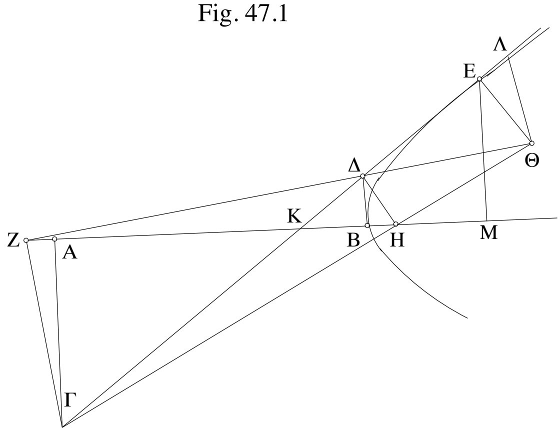
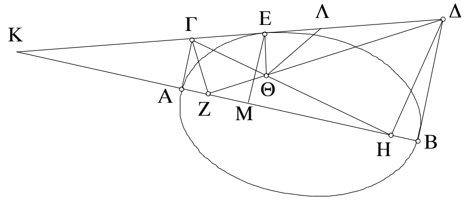


Fig. 47.2



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΘΛ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΛΘ ἴση, ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΗΒ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ. Ὡς ἄρα ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ζ, Η καὶ τὰς πρὸς τῷ Θ ἴσας· ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΓΘ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΖΓ, ΛΓΘ τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ. Ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ, ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ · ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΓΛ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΕΜ· τεταγμένως ἄρα ἔσται κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ, ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ· ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα ἡ ΘΛ κάθετός ἐστιν, οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΘΕ.

– μη´ – Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ.

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΔ.

2 ΔΒΗ Ψ : ΒΔΗ V^{ac} ΒΗΔ V^{pc} || 3 τὸ Ψ : τὸ ὑπὸ V || 15 μη´ V^{5} : om. V || αἱ Ψ : om. V.

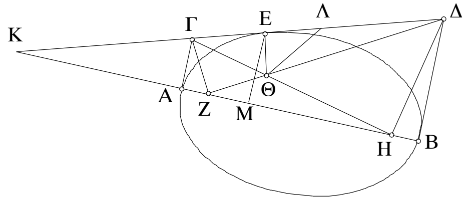


Fig. 47.3

Si elle ne l'est pas, que soit menée de Θ une perpendiculaire ΘΛ à ΓΔ.

Dès lors, puisque l'angle ΓΔZ est égal à l'angle HΔB[339], et que l'angle droit ΔBH est aussi égal à l'angle droit ΔΛΘ, alors le triangle ΔHB est semblable au triangle ΛΘΔ. BΔ est donc à ΔΛ comme HΔ est à ΔΘ[340] ; mais ZΓ est à ΓΘ comme HΔ est à ΔΘ, puisque les angles en Z et H sont droits[341] et que les angles en Θ sont égaux ; or AΓ est à ΓΛ comme ΓZ est à ΓΘ, en vertu de la similitude des triangles AZΓ et ΛΓΘ[342] ; AΓ est donc aussi à ΓΛ comme BΔ est à ΔΛ. *Par permutation*, ΔΛ est à ΛΓ comme ΔB est à ΓA ; mais BK est à KA comme ΔB est à ΓA[343] ; BK est donc aussi à KA comme ΔΛ est à ΓΛ.

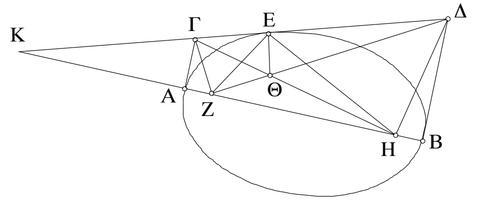
Que soit menée de E une parallèle EM à AΓ ; ce sera donc une droite abaissée sur AB de manière ordonnée, et BM sera à MA comme BK est à KA[344] ; or ΔE est à EΓ comme BM est à MA[345] ; ΔE est donc aussi à EΓ comme ΔΛ est à ΛΓ, ce qui est absurde ; ΘΛ n'est donc pas perpendiculaire, ni non plus une autre droite sauf ΘE.

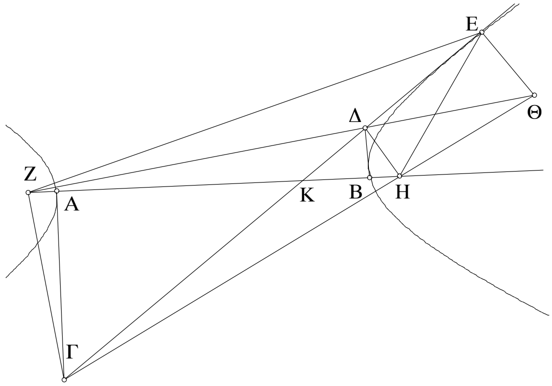
– 48 – *Les mêmes hypothèses étant faites, il faut démontrer que les droites menées du point de contact jusqu'aux points obtenus au moyen de l'application feront des angles appliqués à la tangente égaux.*

Soient les mêmes hypothèses, et que soient menées des droites de jonction EZ et EH.

Je dis que l'angle ΓEZ est égal à l'angle HEΔ.

[339] Prop. 46.
[340] *Éléments*, VI.4.
[341] Prop. 45.
[342] Prop. 46 et *Éléments*, VI.4.
[343] *Éléments*, VI.4.
[344] I.36.
[345] *Éléments*, VI.2.





Ἐπεὶ γὰρ ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΔΗΘ, ΔΕΘ γωνίαι, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΘ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ε, Η σημείων, ὥστε ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΘΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι. Ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΓΘΖ ἐστιν ἴση. Ἡ δὲ ὑπὸ ΓΘΖ τῇ ὑπὸ ΔΘΗ ἴση· κατὰ κορυφὴν γάρ.

Καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστιν ἴση.

– μθ′ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπό τινος τῶν σημείων κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, αἱ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ὀρθὴν ποιοῦσι γωνίαν.

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΘ.

7 μθ′ V^{5} : om. V.

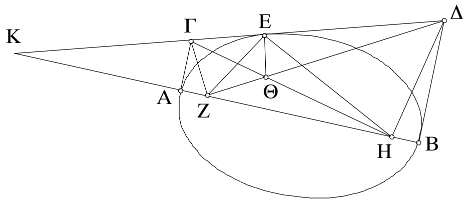


Fig. 48.1

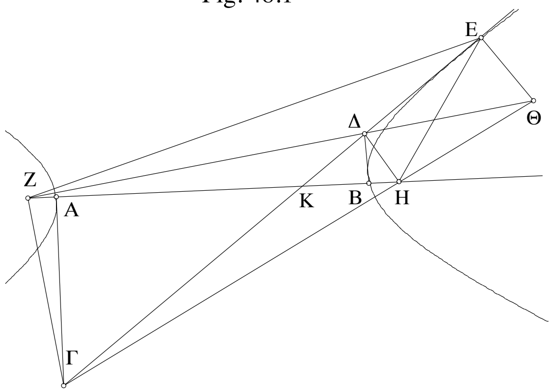


Fig. 48.2

Puisque les angles ΔΗΘ et ΔΕΘ sont droits[346], le cercle décrit autour du diamètre ΔΘ passera par les points E et H[347], de sorte que l'angle ΔΘΗ sera égal à l'angle ΔΕΗ, puisqu'ils sont dans le même segment[348]. Pareillement, l'angle ΓΕΖ sera aussi égal à l'angle ΓΘΖ. Or l'angle ΓΘΖ est égal à l'angle ΔΘΗ, puisqu'ils sont opposés par le sommet.

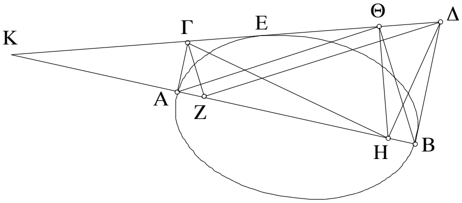
L'angle ΓΕΖ est donc aussi égal à l'angle ΔΕΗ.

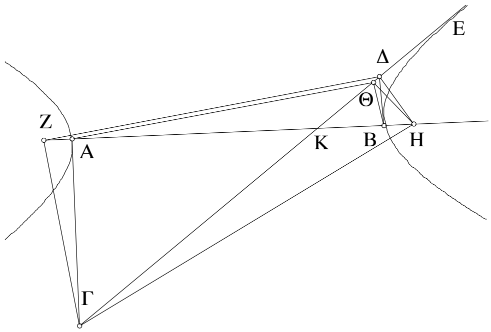
– 49 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, de l'un des points, est menée une perpendiculaire à la tangente, les droites menées du point obtenu aux extrémités de l'axe font un angle droit.*

Soient les mêmes hypothèses ; que, de H, soit menée une perpendiculaire ΗΘ à ΓΔ, et que soient menées des droites de jonction ΑΘ et ΒΘ.

[346] Prop. 45 et 47.
[347] *Éléments*, III.31.
[348] *Éléments*, III.21.

Λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΘΒ γωνία ὀρθή ἐστιν.





Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΗ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Θ, Β, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΗ· ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΘΓ, ἐστιν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ.

Ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ.

– *ν*ʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς προσπέσῃ τις τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ἴση ἔσται τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος.

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΘΛ.

1 ΑΘΒ Ψ : ΑΒΘ V || 5 ΑΗΓ Ψ : ΗΓ V || 8 *ν*ʹ V[5] : om. V.

Je dis que l'angle ΑΘΒ est droit.

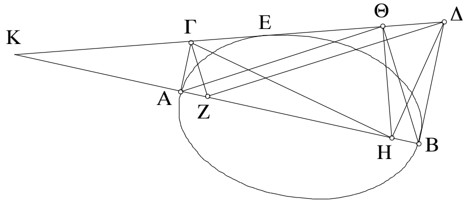


Fig. 49.1

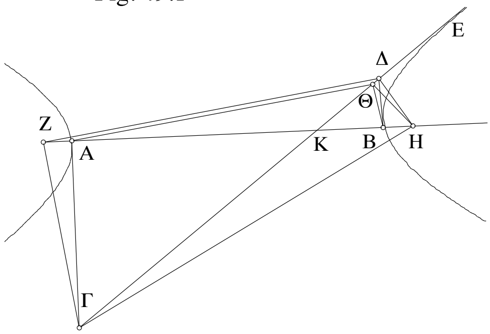


Fig. 49.2

Puisque les angles ΔΒΗ et ΔΘΗ sont droits, le cercle décrit autour du diamètre ΔΗ passera par les points Θ et Β[349], et l'angle ΗΘΒ sera égal à l'angle ΒΔΗ[350] ; or on a démontré que l'angle ΑΗΓ était égal à l'angle ΒΔΗ[351] ; l'angle ΒΘΗ est donc aussi égal à l'angle ΑΗΓ, c'est-à-dire à l'angle ΑΘΓ[352], de sorte que l'angle ΓΘΗ est aussi égal à l'angle ΑΘΒ. Or l'angle ΓΘΗ est droit.

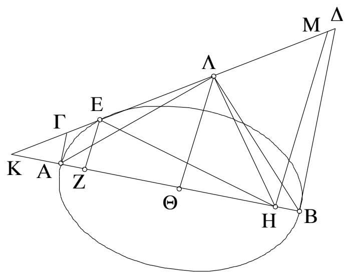
L'angle ΑΘΒ est donc aussi droit.

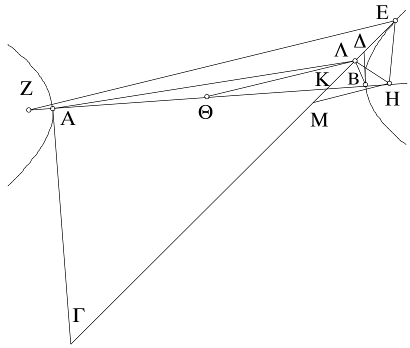
– 50 – *Les mêmes hypothèses étant faites, si, du centre de la section, tombe sur la tangente une certaine droite parallèle à la droite menée par le point de contact et l'un des points, elle sera égale à la moitié de l'axe.*

Soient les mêmes données qu'auparavant et un centre Θ ; que soit menée une droite de jonction ΕΖ ; que les droites ΔΓ et ΒΑ se rencontrent en un point Κ, et que, par Θ, soit menée une parallèle ΘΛ à ΕΖ.

[349] *Éléments*, III.31.
[350] *Éléments*, III.21.
[351] Prop. 45.
[352] *Éléments*, III.31 et 21.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ.





Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΗ, ΑΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΗΜ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΗΒ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΗΒ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα τῇ ΘΗ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἴση.

Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΜΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΜΗ τῇ ὑπὸ ΜΕΗ. Ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΜ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἐδείχθη ἴση· κάθετος ἄρα ἡ ΗΛ ἐπὶ τὴν ΕΜ, ὥστε διὰ τὸ προδειχθὲν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΛΒ, καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Λ. Καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΑ τῇ ΘΒ.

Καὶ ἡ ΘΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα τοῦ ἡμικυκλίου ἴση ἐστὶ τῇ ΘΒ.

– *να′* – Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ᾽ ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς

8 pr. ΕΜΗ Ψ : ΕΗΜ V || 15 *να′* V[5] : om. V.

Je dis que ΘΛ est égale à ΘB.

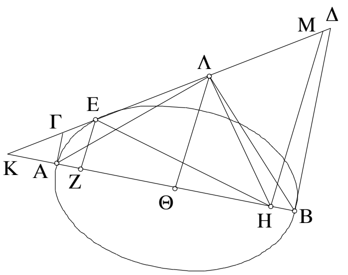


Fig.50.1

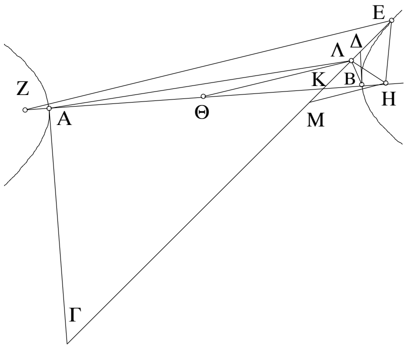


Fig. 50.2

Que soient menées des droites de jonction EH, AΛ, ΛH et ΛB, et que, par H, soit menée une parallèle HM à EZ.

Dès lors, puisque le rectangle AZ,ZB est égal au rectangle AH,HB, alors AZ est égale à HB ; or AΘ est aussi égale à ΘB ; ZΘ est donc aussi égale à ΘH, de sorte que EΛ est aussi égale à ΛM[353].

Puisque l'on a démontré que l'angle ΓEZ était égal à l'angle ΔEH[354] et que l'angle ΓEZ était égal à l'angle EMH[355], alors l'angle EMH est aussi égal à l'angle MEH. EH est donc aussi égale à HM[356] ; mais on a démontré aussi que EΛ était égale à ΛM ; HΛ est donc perpendiculaire à EM, de sorte que, en vertu de ce qui a été démontré auparavant[357], l'angle AΛB est droit et le cercle décrit autour du diamètre AB passera par le point Λ. D'autre part, ΘA est égale à ΘB.

ΘΛ étant une droite menée du centre du demi-cercle est donc aussi égale à ΘB.

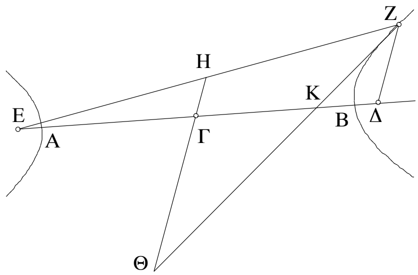
– 51 – *Si, dans une hyperbole ou des opposées, est appliquée à l'axe de part et d'autre une aire égale au quart de la figure et en excès d'une figure*

[353] *Éléments*, VI.2.
[354] Prop. 48.
[355] *Éléments*, I.29.
[356] *Éléments*, I.6.
[357] Prop. 49.

παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὁποτερανοῦν τῶν τομῶν, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ὑπερέχει τῷ ἄξονι.

Ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικειμένων ὧν ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἔστω ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΔΒ, ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ σημείων κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΕΖ, ΖΔ.

Λέγω ὅτι ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.



Ἤχθω διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἡ ΖΚΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΔ ἡ ΗΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΖΔ· ἐναλλὰξ γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ ΚΖΔ ἴση τῇ ὑπὸ ΗΖΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΗΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΒΔ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΓΔ· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση, ὥστε ἡ ΖΕ τῆς ΗΘ ἐστι διπλῆ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΒ, ἡ ΕΖ ἄρα διπλῆ ἐστι συναμφοτέρου τῆς ΗΓΒ· ἀλλὰ τῆς μὲν ΗΓ διπλῆ ἡ ΖΔ, τῆς δὲ ΓΒ διπλῆ ἡ ΑΒ· ἡ ΕΖ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΖΔ, ΑΒ, ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

– νβʹ – Ἐὰν ἐν ἐλλείψει παρὰ τὸ μείζονα τῶν ἀξόνων τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἐφ᾽ ἑκάτερα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς

8 ΖΚΘ Ψ : ΖΘΚ V ‖ Γ V^1 : Κ V ‖ 11 ΗΘ — alt. καὶ Ψ : iter. V ‖ 18 νβʹ V^5 : om. V ‖ ἐν Ψ : om. V ‖ 19 ἐλλεῖπον Ψ : λεῖπον V (initio paginae).

carrée, et que, des points obtenus au moyen de l'application, sont menées jusqu'à n'importe laquelle des sections des droites formant une ligne brisée, la grande excède la petite de l'axe.

Soient une hyperbole ou des opposées, d'axe ΑΒ et de centre Γ ; que chacun des rectangles ΑΔ,ΔΒ et ΑΕ,ΕΒ soit égal au quart de la figure, et que, des points Ε et Δ, soient menées jusqu'à la ligne des droites ΕΖ et ΖΔ formant une ligne brisée.

Je dis que ΕΖ excède ΖΔ de ΑΒ.

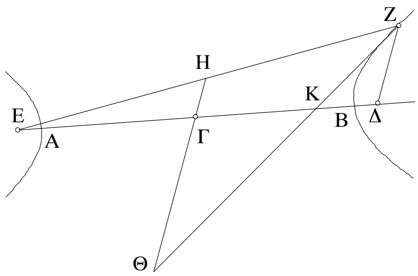


Fig. 51

Que soient menées par Ζ une tangente ΖΚΘ et, par Γ, une parallèle ΗΓΘ à ΖΔ ; l'angle ΚΘΗ est donc égal à l'angle ΚΖΔ, puisqu'ils sont alternes[358] ; or l'angle ΚΖΔ est égal à l'angle ΗΖΘ[359] ; l'angle ΗΖΘ est donc aussi égal à l'angle ΗΘΖ. ΗΖ est donc égale à ΗΘ[360] ; or ΖΗ est égale à ΗΕ, puisque ΑΕ est aussi égale à ΒΔ, que ΑΓ est égale à ΓΒ et que ΕΓ est égale à ΓΔ[361] ; ΗΘ est donc aussi égale à ΕΗ, de sorte que ΖΕ est le double de ΗΘ.

Puisque l'on a démontré que ΓΘ était égale à ΓΒ[362], alors ΕΖ est le double de la somme de ΗΓ et de ΓΒ ; mais ΖΔ est le double de ΗΓ[363] et ΑΒ est le double de ΓΒ ; ΕΖ est donc égale à la somme de ΖΔ et de ΑΒ, de sorte que ΕΖ excède ΖΔ de ΑΒ.

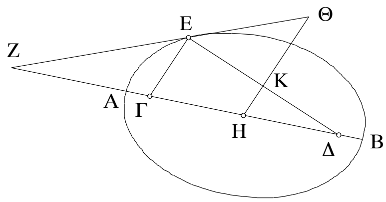
– 52 – *Si, dans une ellipse, est appliquée au grand axe de part et d'autre une aire égale au quart de la figure et en défaut d'une figure*

[358] *Éléments*, I.29.
[359] Prop. 48.
[360] *Éléments*, I.6.
[361] *Éléments*, VI.2.
[362] Prop. 50.
[363] *Éléments*, VI.4.

σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμήν, ἴσαι ἔσονται τῷ ἄξονι.

Ἔστω ἔλλειψις ἧς μείζων τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἑκάτερον ἴσον ἔστω τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕΔ.

Λέγω ὅτι αἱ ΓΕΔ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΒ.



Ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ κέντρον τὸ Η, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παρὰ τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΘΕΚ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΚ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΕΚ ἐστιν ἴση. Ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ ἴση καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΔ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΔ · καὶ διὰ τοῦτο διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΚΗ, καὶ συναμφότερος ἡ ΓΕΔ διπλῆ ἐστι τῆς ΗΘ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ διπλῆ τῆς ΗΘ.

Ἴση ἄρα ἡ ΑΒ ταῖς ΓΕΔ.

– *νγʹ* – Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ᾽ ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνωσιν τὰς παραλλήλους, τὸ

7 ΖΕΘ Ψ : ΕΖΘ V ‖ 8 ΗΚΘ Ψ : ΗΘΚ V ‖ 17 *νγʹ* V[5] : om. V ‖ ἐν Ψ : om. V ‖ περιφερείᾳ Ψ : περιφέρειαι V.

carrée, et que, des points obtenus au moyen de l'application, sont menées jusqu'à la ligne des droites formant une ligne brisée, leur somme sera égale à l'axe.

Soit une ellipse, de grand axe ΑΒ ; que chacun des rectangles ΑΓ,ΓΒ et ΑΔ,ΔΒ soit égal au quart de la figure, et que, des points Γ et Δ, soient menées jusqu'à la ligne des droites ΓΕ et ΕΔ formant une ligne brisée.

Je dis que la somme de ΓΕ et ΕΔ est égale à ΑΒ.

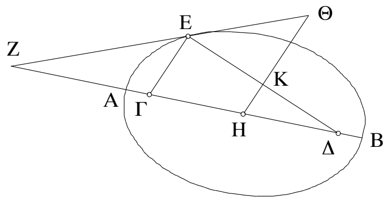


Fig. 52

Que soit menée une tangente ΖΕΘ ; soit un centre Η, et que, par Η, soit menée une parallèle ΗΚΘ à ΓΕ.

Dès lors, puisque l'angle ΓΕΖ est égal à l'angle ΘΕΚ[364] et que l'angle ΖΕΓ est égal à l'angle ΕΘΚ[365], alors l'angle ΕΘΚ est aussi égal à l'angle ΘΕΚ. ΘΚ est donc aussi égale à ΚΕ[366].

Puisque ΑΗ est égale à ΗΒ et que ΑΓ est égale à ΔΒ, alors ΓΗ est aussi égale à ΗΔ, de sorte que ΕΚ est aussi égale à ΚΔ[367] ; en vertu de quoi, ΕΔ est le double de ΘΚ, ΕΓ est le double de ΚΗ[368] et la somme de ΓΕ et de ΕΔ est le double de ΗΘ. Mais ΑΒ est aussi le double de ΗΘ[369].

ΑΒ est donc égale à la somme de ΓΕ et de ΕΔ.

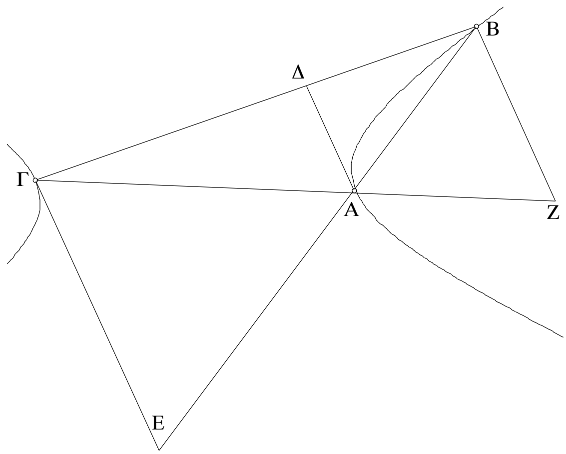
– 53 – *Si, dans une hyperbole, une ellipse, une circonférence de cercle ou des opposées, sont menées des extrémités du diamètre des parallèles à*

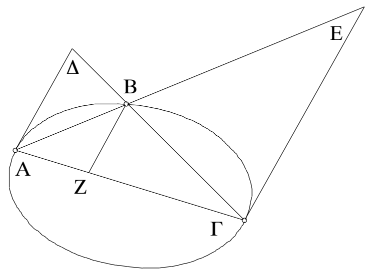
[364] Prop. 48.
[365] *Éléments*, I.29.
[366] *Éléments*, I.6.
[367] *Éléments*, VI.2
[368] *Éléments*, VI.4.
[369] Prop. 50.

περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδει.

Ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἡ ΑΒΓ ἧς διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ παρὰ τεταγμένην ἤχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΕ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΓΒΔ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ εἴδει τῷ πρὸς τῇ ΑΓ.





Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΖ. Ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ πρὸς τὸ εἶδος τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ

4 τεταγμένην V : τεταγμένως κατηγμένην edd. ‖ διήχθωσαν V^1 : ἤχθωσαν V ‖ 5 ΑΔ V^1 : ΑΒΔ V.

une droite abaissée de manière ordonnée, et que, des mêmes extrémités, sont menées jusqu'à un même point de la ligne[370] *des droites coupant les parallèles, le rectangle compris par les droites découpées est égal à la figure appliquée au même diamètre.*

Soit l'une des sections qu'on a dites ΑΒΓ, de diamètre ΑΓ ; que soient menées des parallèles ΑΔ et ΓΕ à une droite abaissée de manière ordonnée, et que soient menées des droites ΑΒΕ et ΓΒΔ.

Je dis que le rectangle ΑΔ,ΕΓ est égal à la figure appliquée à ΑΓ.

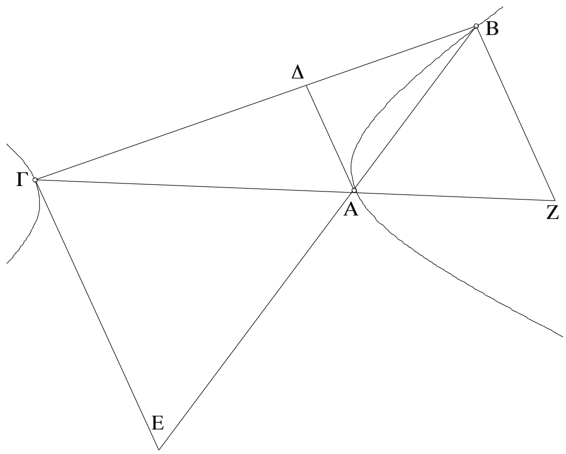


Fig. 53.1[371]

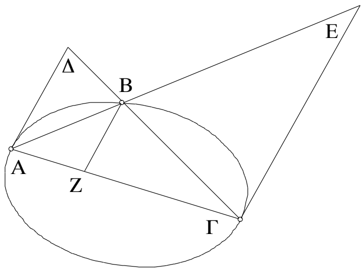


Fig. 53.2

Que soit menée de Β une parallèle ΒΖ à une droite abaissée de manière ordonnée. Le côté transverse est donc au côté droit et le carré sur ΑΓ est à

[370] Voir Note complémentaire [52].
[371] **V** a omis les lettres désignatrices.

τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΒ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΖΒ πρὸς ΖΑ καὶ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΓΖ.

Ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ, ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΕΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΓΑ· σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, οὕτω τὸ ὑπὸ ΑΔ,ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον.

Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔ,ΓΕ τῷ παρὰ τὴν ΑΓ εἴδει.

– νδʹ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς ἁφὰς τετράγωνον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τὸ ἐντὸς τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν δυνάμει, καὶ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετραγώνου.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἡ ΑΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΓΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΓΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Ζ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ

2 ΖΑ Canon. : ΒΑ V || 6 ΕΓ V : ΓΕ edd. || 11 νδʹ V[5] : om. V.

la figure comme le rectangle ΑΖ,ΖΓ est au carré sur ΖΒ[372] ; or le rapport du rectangle ΑΖ,ΖΓ au carré sur ΒΖ est composé des rapports de ΑΖ à ΖΒ et de ΓΖ à ΖΒ ; le rapport de la figure au carré sur ΑΓ est donc composé des rapports de ΖΒ à ΖΑ et de ΒΖ à ΓΖ.

Mais ΑΓ est à ΓΕ comme ΑΖ est à ΖΒ[373], et ΓΑ est à ΑΔ comme ΓΖ est à ΖΒ ; le rapport de la figure au carré sur ΑΓ est donc composé des rapports de ΓΕ à ΓΑ et de ΑΔ à ΓΑ ; or le rapport du rectangle ΑΔ, ΕΓ au carré sur ΑΓ est aussi composé des mêmes rapports ; le rectangle ΑΔ,ΓΕ est donc au carré sur ΑΓ comme la figure est au carré sur ΑΓ.

Le rectangle ΑΔ,ΓΕ est donc égal à la figure appliquée à ΑΓ.

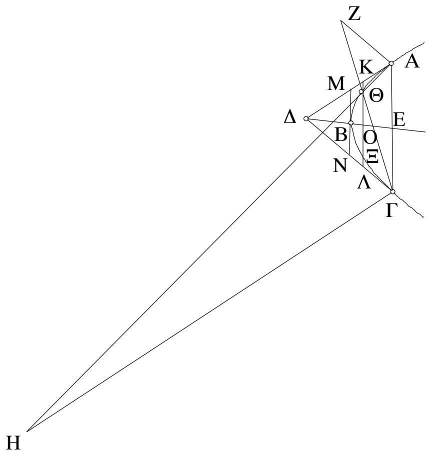
– 54 – *Si deux droites tangentes à une section de cône ou à une circonférence de cercle se rencontrent, que, par les points de contact, sont menées des parallèles aux tangentes, que, des points de contact, sont menées jusqu'à un même point de la ligne des droites coupant les parallèles, le rectangle compris par les droites découpées a, avec le carré sur la droite joignant les points de contact, le rapport composé des rapports que le carré*[374] *sur le segment intérieur de la droite joignant le point de rencontre des tangentes et le milieu de la droite joignant les points de contact a avec le carré sur le segment restant et que le rectangle compris par les tangentes a avec le quart du carré sur la droite joignant les points de contact.*

Soient une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒΓ, de tangentes ΑΔ et ΓΔ ; que soit menée une droite de jonction ΑΓ et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Ε ; que soit menée une droite de jonction ΔΒΕ ; que soit menée de Α une parallèle ΑΖ à ΓΔ et, de Γ, une parallèle ΓΗ à ΑΔ ; que soit pris un certain point Θ sur la ligne ; que soient menées des droites de jonction ΑΘ et ΓΘ et qu'elles soient prolongées jusqu'en des points Η et Ζ.

Je dis que le rectangle ΑΖ,ΓΗ a, avec le carré sur ΑΓ le rapport composé des rapports que le carré sur ΕΒ a avec celui sur ΒΔ et que le

[372] I.21.
[373] *Éléments*, VI.4.
[374] Voir Note complémentaire [53].

πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΕΓ.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΟΞΛ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἡ ΜΒΝ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΜΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΜΒ τῇ ΒΝ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΟΛ καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΟΞ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΞΛ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΜΒ, ΜΑ, καὶ παρὰ τὴν ΜΒ ἦκται ἡ ΚΘΛ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΒΝ, τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΘΚ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, τὸ ὑπὸ ΝΒΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΓ,ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΑ, τὸ ὑπὸ ΛΓ,ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ,ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΛΓ,ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ.

Τὸ δὲ ὑπὸ ΛΓ,ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΛ πρὸς ΛΘ, τουτέστι τῆς ΖΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστι τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ

TEST. : 9 alt. ὡς — 10 alt. ΚΑ] EUT., *Comm. in Con.* (Heiberg, 350, 18-19).

2 ΚΘΟΞΛ Ψ : ΘΚΛΞΟ V ‖ 3 ΜΒΝ Ψ : ΒΜΝ V ‖ 8-9 καὶ — ΛΘΚ V : del. Mont. vide adn.

rectangle ΑΔ,ΔΓ a avec le quart du carré sur ΑΓ, c'est-à-dire avec le rectangle ΑΕ,ΕΓ.

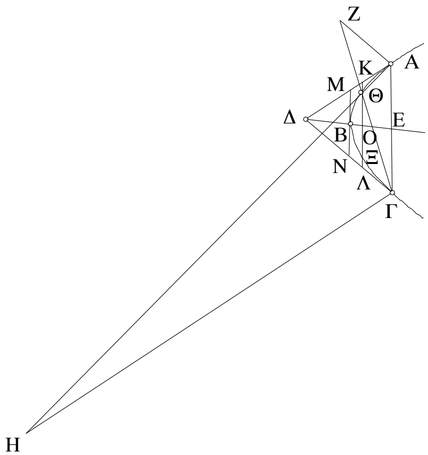


Fig. 54

Que soient menées de Θ à ΑΓ une parallèle ΚΘΟΞΛ et, de Β, une parallèle ΜΒΝ ; il est évident que ΜΝ est une tangente[375].

Dès lors, puisque ΑΕ est égale à ΕΓ, ΜΒ est aussi égale à ΒΝ[376], ΚΟ à ΟΛ, ΘΟ à ΟΞ[377] et ΚΘ à ΞΛ.

Dès lors, puisque ΜΒ et ΜΑ sont des tangentes, et qu'est menée une parallèle ΚΘΛ à ΜΒ, le carré sur ΑΚ est au rectangle ΞΚ,ΚΘ, c'est-à-dire au rectangle ΛΘ,ΘΚ, comme le carré sur ΑΜ est à celui sur ΜΒ[378], c'est-à-dire au rectangle ΜΒ,ΒΝ ; et, *par permutation*, le rectangle ΝΒ,ΒΜ est au rectangle ΛΘ,ΘΚ comme le carré sur ΑΜ est à celui sur ΑΚ[379] ; or le rectangle ΛΓ,ΚΑ est au carré sur ΚΑ comme le rectangle ΝΓ,ΜΑ est au carré sur ΜΑ[380] ; *à intervalle égal*[381], le rectangle ΛΓ,ΚΑ est donc au

[375] I.32.
[376] *Éléments*, VI.4.
[377] II.7.
[378] Prop. 16.
[379] Voir Note complémentaire [54].
[380] *Éléments*, VI.2 et V.18. L'obtention de ce résultat est l'objet d'un *lemme* dans le commentaire d'Eutocius (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 350, 18-352, 5) et de schémas marginaux dans **V** ; voir Note complémentaire [55].
[381] L'opération est illustrée par des schémas marginaux dans **V**, voir Note complémentaire [56].

ὑπὸ ΗΓ,ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ,ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΗΓ,ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ.

Τὸ δὲ ὑπὸ ΓΝ,ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ μέσου λαμβανομένου τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΝ,ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ,ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ <τοῦ> ὑπὸ ΓΝ,ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ.

Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΝΓ,ΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ, τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ,ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ <τοῦ> ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τοῦ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

– *νε*′ – Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν διαχθῶσι παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις, προσβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον λόγον ἕξει ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διὰ τῆς συμπτώσεως παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἕως τῆς τομῆς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α παρὰ τὴν ΔΗ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΗ ἡ ΔΜ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΖ τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΝΖ, ΖΔΘ.

7 pr. τοῦ add. Heiberg || 13 pr. τοῦ add. Heiberg || 15 *νε*′ V^5 : om. V.

rectangle ΛΘ,ΘΚ comme le rectangle ΝΓ,ΜΑ est au rectangle ΝΒ,ΒΜ.

Or le rectangle ΛΓ,ΚΑ a avec le rectangle ΛΘ,ΘΚ le rapport composé des rapports de ΓΛ à ΛΘ, c'est-à-dire de ΖΑ à ΑΓ[382], et de ΑΚ à ΚΘ, c'est-à-dire de ΗΓ à ΓΑ[383], lequel est identique à celui que le rectangle ΗΓ,ΖΑ a avec le carré sur ΓΑ ; le rectangle ΗΓ,ΖΑ est donc au carré sur ΓΑ comme le rectangle ΝΓ,ΜΑ est au rectangle ΝΒ,ΒΜ.

Or le rectangle ΓΝ,ΜΑ a avec le rectangle ΝΒ,ΒΜ, si l'on prend comme moyen le rectangle ΝΔ,ΔΜ, le rapport composé des rapports que le rectangle ΓΝ,ΑΜ a avec le rectangle ΝΔ,ΔΜ et que le rectangle ΝΔ,ΔΜ a avec le rectangle ΝΒ,ΒΜ ; le rectangle ΗΓ,ΖΑ a donc avec le carré sur ΓΑ le rapport composé des rapports du rectangle ΓΝ,ΑΜ au rectangle ΝΔ,ΔΜ et du rectangle ΝΔ,ΔΜ au rectangle ΝΒ,ΒΜ.

Mais le carré sur ΕΒ est à celui sur ΒΔ comme le rectangle ΝΓ,ΑΜ est au rectangle ΝΔ,ΔΜ[384], et le rectangle ΓΔ,ΔΑ est au rectangle ΓΕ,ΕΑ comme le rectangle ΝΔ,ΔΜ est au rectangle ΝΒ,ΒΜ[385].

Le rectangle ΗΓ,ΑΖ a donc avec le carré sur ΑΓ le rapport composé des rapports du carré sur ΒΕ à celui sur ΒΔ et du rectangle ΓΔ,ΔΑ au rectangle ΓΕ,ΕΑ.

– 55 – *Si deux droites tangentes à des opposées se rencontrent, que, par le point de rencontre, est menée une droite parallèle à la droite joignant les points de contact, que, des points de contact, sont menées des parallèles aux tangentes, que, des points de contact jusqu'à un même point de l'une des deux sections, sont menées*[386] *des droites coupant les parallèles, le rectangle compris par les droites découpées aura, avec le carré sur la droite joignant les points de contact, un rapport identique au rapport du rectangle compris par les tangentes au carré sur la droite menée par le point de rencontre jusqu'à la section parallèlement à la droite joignant les points de contact*.

Soient des opposées ΑΒΓ et ΔΕΖ, de tangentes ΑΗ et ΗΔ ; que soit menée une droite de jonction ΑΔ ; que soient menées, de Η, une parallèle ΓΗΕ à ΑΔ, de Α, une parallèle ΑΜ à ΔΗ et, de Δ, une parallèle ΔΜ à

[382] *Éléments*, VI.4.

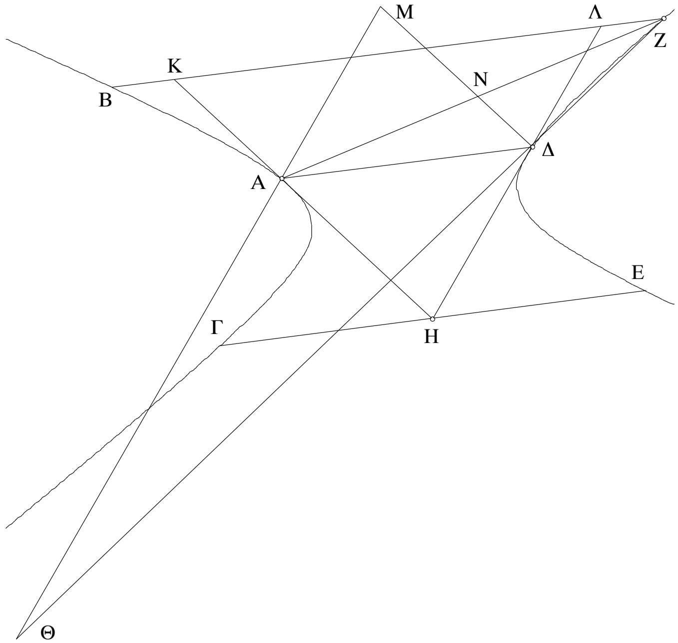
[383] *Éléments*, VI.4.

[384] L'obtention de ce résultat est l'objet d'un *lemme* dans le commentaire d'Eutocius (*ibid*., p. 352, 6-352, 16).

[385] L'obtention de ce résultat est l'objet d'un *lemme* dans le commentaire d'Eutocius (*ibid*., p. 352, 17-352, 26).

[386] L'emploi du verbe προσβάλλειν est un *hapax* dans les *Coniques* ; voir Note complémentaire [57].

Λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ,ΝΔ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΖΛΚΒ.

Ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΒΛΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΛ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΕΗ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΛΖ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ.

Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, τὸ ἀπὸ ΔΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ,ΑΚ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ,ΑΚ.

Ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚ,ΔΛ λόγος ὁ συγκείμενός

ΑΗ ; que soit pris un certain point Ζ sur la section ΔΖ, et que soient menées des droites de jonction ΑΝΖ et ΖΔΘ.

Je dis que le carré sur ΑΔ est au rectangle ΑΘ,ΝΔ comme le carré sur ΓΗ est au rectangle ΑΗ,ΗΔ[387].

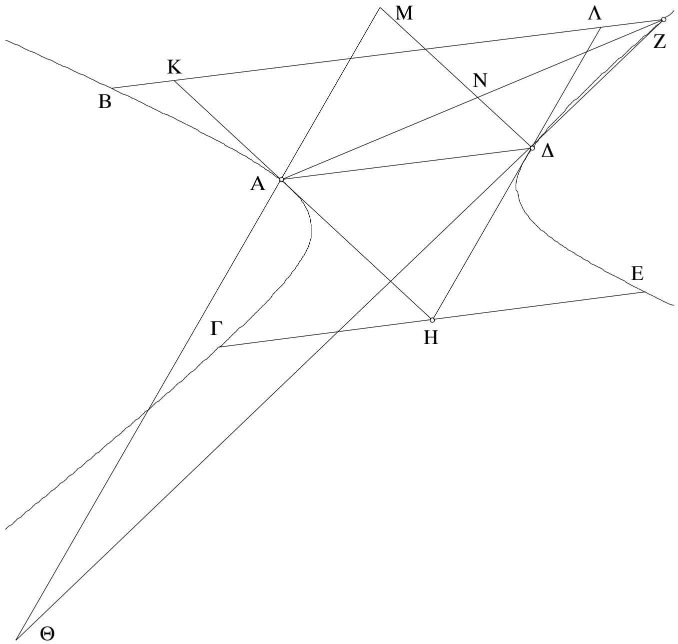


Fig. 55

Que soit menée par Ζ une parallèle ΖΛΚΒ à ΑΔ.

Dès lors, puisque l'on a démontré que le rectangle ΒΛ,ΛΖ était au carré sur ΔΛ comme le carré sur ΕΗ est à celui sur ΗΔ[388], et puisque ΓΗ est égale à ΕΗ[389] et que ΒΚ est égale à ΛΖ, alors le rectangle ΚΖ,ΖΛ est au carré sur ΛΔ comme le carré sur ΓΗ est à celui sur ΗΔ.

Or le carré sur ΔΛ est aussi au rectangle ΔΛ,ΑΚ comme le carré sur ΔΗ est au rectangle ΔΗ,ΗΑ[390] ; *à intervalle égal*, le rectangle ΚΖ,ΖΛ est

[387] Les rapports formulés dans le *diorisme* sont inversés par rapport à ceux de la *protase*.
[388] Prop. 20.
[389] II.38.
[390] *Éléments*, VI.2.

ἐστιν ἐκ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΔ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΖΚ πρὸς ΚΑ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΝ, ὡς δὲ ἡ ΖΛ πρὸς ΛΔ, ἡ ΑΔ πρὸς ΘΑ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΔΝ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΘ.

Σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ,ΝΔ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ,ΑΘ.

Ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΝΔ,ΑΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ.

– *νϛʹ* – Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν καὶ τὴν διχοτομίαν <τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης> ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως δυνάμει, καὶ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ ὧν κέντρον τὸ Ο, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΕ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΝ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τομῆς τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒΜ, ΓΑΝ.

Λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΝ,ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ <τοῦ> ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ

8 ΑΘ Canon. : ΛΘ V ‖ 10 *νϛʹ* V^5 : om. V ‖ 14 λόγον ἕξει c v Ψ : iter. V ‖ 17 τῆς — ἐπιζευγνυούσης addidi (jam Comm.) ‖ 23 ΑΕΖΗ Ψ : ΑΕΗΖ [Η e corr. V^1] V ‖ 29 ἐκ Ψ : om. V (in extr. lin.) ‖ τοῦ add. Heiberg.

donc au rectangle ΔΛ,AK comme le carré sur ΓH est au rectangle ΔH,HA.

Or le rapport du rectangle KZ,ZΛ au rectangle AK,ΔΛ est composé des rapports de ZK à KA et de ZΛ à ΛΔ ; mais AΔ est à ΔN comme ZK est à KA[391] et AΔ est à ΘA comme ZΛ est à ΛΔ ; le rapport du carré sur ΓH au rectangle ΔH,HA est donc composé des rapports de AΔ à ΔN et de ΔA à AΘ.

Or le rapport du carré sur AΔ au rectangle AΘ,NΔ est aussi composé des mêmes rapports ; le carré sur AΔ est donc au rectangle NΔ,AΘ comme le carré sur ΓH est au rectangle AH,HΔ.

Par inversion, le rectangle NΔ,AΘ est au carré sur AΔ comme le rectangle AH,HΔ est au carré sur ΓH[392].

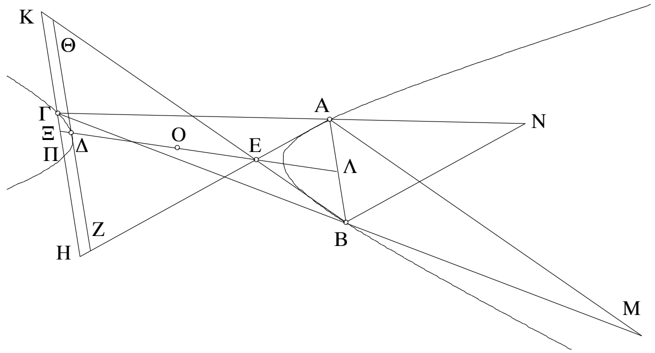
– 56 – *Si deux droites tangentes à l'une de deux opposées se rencontrent, que, par les points de contact, sont menées des parallèles aux tangentes, que, des points de contact jusqu'à un même point de l'autre section, sont menées des droites coupant les parallèles, le rectangle compris par les droites découpées aura, avec le carré sur la droite joignant les points de contact, un rapport composé des rapports que le carré sur la partie de la droite qui joint le point de rencontre et le milieu <de la droite joignant les points de contact>, partie découpée entre le milieu et l'autre section, a avec le carré sur la droite découpée entre la même section et le point de rencontre, et que le rectangle compris par les tangentes a avec le quart du carré sur la droite joignant les points de contact.*

Soient des opposées AB et ΓΔ, de centre O, de tangentes AEZH et BEΘK ; que soit menée une droite de jonction AB et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Λ ; que soit menée une droite de jonction ΛE jusqu'en un point Δ; que soient menées, de A, une parallèle AM à BE et, de B, une parallèle BN à AE ; que, sur la section ΓΔ, soit pris un certain point Γ, et que soient menées des droites de jonction ΓBM et ΓAN.

Je dis que le rectangle BN,AM a avec le carré sur AB un rapport composé des rapports du carré sur ΛΔ à celui sur ΔE et du rectangle

[391] *Éléments*, VI.4.
[392] On retrouve ici la formulation de la *protase*.

ΑΕΒ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Γ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΚΓΗ, ΘΔΖ· φανερὸν δὴ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΒ, ἴση ἐστὶν καὶ ἡ ΘΔ τῇ ΔΖ καὶ ἡ ΚΞ τῇ ΞΗ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΞΠ, ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΗΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΔΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΒΕΘ, ΘΔ, καὶ παρὰ τὴν ΔΘ ἡ ΚΗ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΚΓ· ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΘΔ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΠΚΓ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ· ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΖΑ,ΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ, τὸ ὑπὸ ΗΑ,ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ,ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ὑπὸ ΚΒ,ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ.

Ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ λόγος τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ μέσου λαμβανομένου σύγκειται ἐκ τοῦ <τοῦ> ὑπὸ ΑΖ,ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ καὶ τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ· καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΖ,ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ, τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ· ὁ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΑΗ,ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ <τοῦ>

1 ὑπὸ c v Ψ : iter. V (extr. et init. lin.) ‖ 2 ΚΓΗ Ψ : ΓΗΚ V ‖ ΘΔΖ Ψ : ΔΘΖ V ‖ 3 ΘΔ Ψ : ΔΔ V ‖ 4 ΞΗ Ψ : ΖΗ V ‖ Γ]Κ e corr. V^1 ‖ 5 ΔΓ Ψ : ΔΕ V ‖ ΒΕΘ Halley : ΒΕ V ‖ 7 πρὸς c v Ψ : iter. V (extr. et init. lin.) ‖ 8 ΚΓΗ Ψ : ΓΚΗ V ‖ 14 τοῦ add. Halley ‖ 18 τοῦ add. Halley.

ΑΕ,ΕΒ au quart du carré sur ΑΒ, c'est-à-dire au rectangle ΑΛ,ΛΒ.

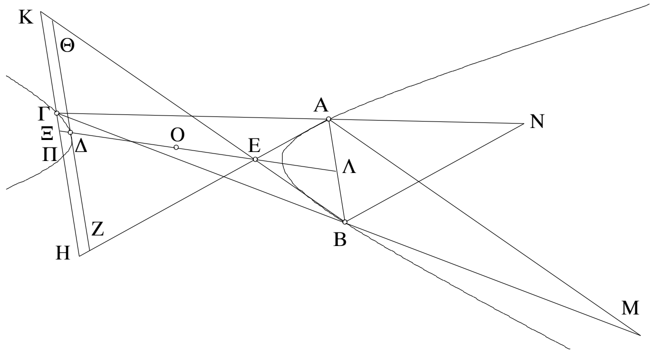


Fig. 56

Que soient menées de Γ et Δ des parallèles ΚΓΗ et ΘΔΖ à ΑΒ ; il est évident que ΑΛ est égale à ΛΒ, que ΘΔ est aussi égale à ΔΖ, et ΚΞ à ΞΗ[393] ; or ΞΓ est aussi égale à ΞΠ[394], de sorte que ΓΚ est aussi égale à ΗΠ.

Puisque ΑΒ et ΔΓ sont des opposées, que ΒΕΘ et ΘΔ sont des tangentes, que ΚΗ est parallèle à ΔΘ, alors le carré sur ΒΚ est au rectangle ΠΚ,ΚΓ comme le carré sur ΒΘ est à celui sur ΘΔ[395] ; or le carré sur ΘΔ est égal au rectangle ΘΔ,ΔΖ et le rectangle ΠΚ,ΚΓ est égal au rectangle ΚΓ,ΓΗ ; le carré sur ΒΚ est donc au rectangle ΚΓ,ΓΗ comme le carré sur ΒΘ est au rectangle ΘΔ,ΔΖ ; or le rectangle ΗΑ,ΚΒ est au carré sur ΚΒ comme le rectangle ΖΑ,ΘΒ est au carré sur ΘΒ[396] ; *à intervalle égal*, le rectangle ΚΒ,ΑΗ est donc au rectangle ΚΓ,ΓΗ comme le rectangle ΑΖ,ΘΒ est au rectangle ΘΔ,ΔΖ.

Or le rapport du rectangle ΑΖ,ΘΒ au rectangle ΘΔ,ΔΖ, si l'on prend comme moyen le rectangle ΘΕ,ΕΖ, est composé des rapports du rectangle ΑΖ,ΘΒ au rectangle ΘΕ,ΕΖ et du rectangle ΘΕ,ΕΖ au rectangle ΘΔ,ΔΖ. D'autre part, le carré sur ΛΔ est à celui sur ΔΕ comme le rectangle ΑΖ,ΘΒ est au rectangle ΘΕ,ΕΖ[397], et le rectangle ΑΕ,ΕΒ est au rectangle ΑΛ,ΛΒ comme le rectangle ΘΕ,ΕΖ est au rectangle ΘΔ,ΔΖ[398] ; le rapport du rectangle ΑΗ,ΒΚ au rectangle ΚΓ,ΓΗ est donc composé des rapports du

[393] *Éléments*, VI.4.
[394] I.47.
[395] Prop. 18.
[396] *Éléments*, VI.4.
[397] *Éléments*, VI.4.
[398] *Éléments*, VI.4. L'établissement de cette égalité fait l'objet du lemme 13 de Pappus, qui expose deux démonstrations (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 164, 18-165, 13).

ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.

Ἔχει δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ,ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΚ πρὸς ΚΓ καὶ τοῦ τῆς ΑΗ πρὸς ΗΓ· Ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΚΒ πρὸς ΚΓ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΒΝ πρὸς ΒΑ.

Ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΑ πρὸς ΑΒ καὶ τοῦ τῆς ΝΒ πρὸς ΒΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΜ,ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, σύγκειται ἐκ τοῦ <τοῦ> ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.

4 πρὸς ΒΑ Ψ : om. V || 7 τοῦ add. Halley.

carré sur ΛΔ à celui sur ΔE et du rectangle AE,EB au rectangle AΛ,ΛB.

Or le rectangle AH,KB a avec le rectangle KΓ,ΓH le rapport composé des rapports de BK à KΓ et de AH à HΓ. Mais MA est à AB comme KB est à KΓ[399] et BN est à BA comme AH est à HΓ.

Le rapport composé des rapports de MA à AB et de NB à BA, lequel est identique à celui du rectangle AM,BN au carré sur AB, est donc composé des rapports du carré sur ΛΔ à celui sur ΔE et du rectangle AE,EB au rectangle AΛ,ΛB.

[399] *Éléments*, VI.4.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

(Les notes des auteurs sont suivies de leurs initiales)

[1] Dans son commentaire, Eutocius expose une variante de démonstration qui traite successivement du cas de la parabole et de celui des sections centrées. Les deux démonstrations développées par Eutocius confirment indirectement, de ce fait, le texte transmis par **V**. L'égalité cherchée des deux triangles ΑΔΕ et ΕΒΓ, qui ont pour sommet commun le point de concours des deux tangentes, est démontrée directement : dans le cas de la parabole, Eutocius fait appel à la relation de la proposition I.35, selon exactement le même procédé que pour les triangles ΕΓΒ et ΕΖΔ de la proposition I.49 ; dans le cas des sections centrées, il passe par la démonstration du parallélisme de la droite qui relie les points de contact (ΑΒ) et de la droite qui relie les points de concours des tangentes et des diamètres (ΔΓ), déduit de la relation de I.37. Sa rédaction est plus synthétique que celle du texte des *Coniques*, puisqu'elle convient aussi bien à l'hyperbole qu'à l'un des cas de l'ellipse (= fig. 1.4 du texte des *Coniques*).

Dans les deux démonstrations du texte des *Coniques*, en grec comme en arabe, on établit l'égalité cherchée en passant par l'étape intermédiaire des égalités équivalentes, celle du triangle ΑΓΖ et du parallélogramme ΑΔΒΖ pour la parabole, établie dans la proposition I.42, et, pour les sections centrées, celle des deux triangles construits pour la première fois en I.43, à savoir les triangles ΗΔΒ et ΑΗΓ. Ces deux triangles ont pour sommet commun le centre de la section et pour bases respectives les deux tangentes.

J'ai déjà eu l'occasion de relever les anomalies que nous constatons dans le texte transmis (voir mon édition du Livre I, tome 1.2, Notes complémentaires [80] et [90]) : l'égalité des triangles ΑΔΕ et ΕΓΒ, qui fait ici l'objet d'une proposition à part entière relative à toute section de cône et au cercle, avait déjà été démontrée, pour la parabole, au cours de la démonstration de I.49, selon le procédé repris par Eutocius dans son commentaire précité ; on est donc en droit d'attendre, dans le cas de la parabole, un rappel de ce résultat et non une nouvelle démonstration. D'autre part, dans le cas des sections centrées, l'égalité des triangles ΗΔΒ et ΑΗΓ est démontrée ici en bonne et due forme, alors qu'elle est considérée comme connue dans les propositions I.50 et II.20. Enfin, dans la proposition III.8, dans un passage qui est une référence implicite à la proposition III.1, le parallélisme des droites de jonction ΑΒ et ΔΓ (voir plus haut, la variante d'Eutocius à la proposition III.1) est dit avoir été « démontré » (p. 182, 1), alors que ce n'est nullement le cas dans le texte actuel des *Coniques*. Nous sommes donc en présence de véritables ruptures dans la cohérence interne du traité.

On a vu d'autre part (voir mes notes précitées du tome 1.2), que le *lemme* I.9 de Pappus (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 149, 18-150, 2), qui ne comble aucune ellipse dans le raisonnement du texte actuel du Livre I, peut trouver son point d'application dans les constructions de la proposition I.43 ; appliqué à I.43, il démontre, en effet, le parallélisme des deux droites précitées, ΑΒ et ΓΔ, en prenant pour hypothèse la relation de I.37. On sait que, par application d'*Éléments*, I.37, on peut tirer immédiatement de ce parallélisme aussi bien l'égalité des triangles ΑΔΕ et ΕΒΓ, comme le fait Eutocius dans le commentaire de notre proposition III.1, que l'égalité des triangles ΗΔΒ et ΑΗΓ. On a vu aussi que l'égalité des triangles ΗΔΒ et ΑΗΓ, non démontrée dans le livre I, mais considérée comme connue en I.50 et II.20, se trouvait établie au cours de la démonstration d'une variante manuscrite de la proposition I.43, conservée par Eutocius (voir ma note complémentaire [80] dans le tome 1.2, et *Recherches sur les Coniques*…, p. 115-117).

J'ai émis, pour ma part, plusieurs hypothèses pour expliquer les anomalies observées dans le texte des *Coniques* et redonner en même temps un sens au témoignage de Pappus : soit l'égalité des triangles ΗΔΒ et ΑΗΓ avait fait l'objet d'une proposition à part entière dans une étape ancienne du texte du Livre I et avait disparu après Pappus ; le lemme de Pappus correspondrait donc à cet ancien état de texte. Soit Apollonius admettait tacitement cette propriété dans les Livres I et II, mais, dans la tradition du traité, on avait pris l'habitude d'associer à l'édition de la proposition I.43 des variantes de démonstration, qui intégraient l'établissement de cette égalité, comme la variante que nous a conservée Eutocius. Le *lemme* de Pappus serait en relation avec l'une de ces variantes.

Quoi qu'il en soit, l'actuelle proposition III.1 pallie, dans le cas des sections centrées, l'absence de démonstration dans le Livre I de l'égalité des triangles ΗΔΒ et ΑΗΓ. De ce point de vue, il y a une concordance entre les propositions I.43 et III.1, qui pourrait revenir à Apollonius. Mais, compte tenu des anomalies relevées précédemment, il n'est pas exclu que cet état de fait relève d'une intervention éditoriale, dont on pourrait aisément comprendre l'intention : il pouvait être gênant qu'une égalité requise dans plusieurs propositions du début du Livre III (entre autres, les prop. 7, 8 et 10) n'ait pas fait l'objet d'une démonstration antérieure. Le procédé représenté pour l'établissement de l'égalité ΗΔΒ et ΑΗΓ dans l'actuelle proposition 1 est une longue chaîne de relations ; on retrouve le même procédé que celui de la variante manuscrite à la proposition I. 43 conservée par Eutocius.

Il faut enfin revenir sur le parallélisme des procédures démonstratives observé dans le traitement du cas de la parabole et dans celui des sections de notre proposition III.1. On a vu au début de cette note que, dans le cas de la parabole, l'égalité cherchée des triangles ΑΔΕ et ΕΒΓ, déjà démontrée en I.49, fait à nouveau ici l'objet d'une démontration, et que le procédé choisi est parallèle à celui qui est utilisé pour l'hyperbole ; l'égalité des triangles ΑΔΕ et ΕΒΓ est, en effet, démontrée par l'intermédiaire d'autres égalités équivalentes, en l'occurrence, celle du triangle ΑΓΖ et du parallélogramme ΑΔΒΖ. On saisit là une volonté d'harmonisation, mais qui, dans le cas de la parabole, a pour conséquence le fait que le même résultat est démontré deux fois (I.49 et III.1).

Les contradictions constatées au sein même du traité, les décalages observés entre le texte transmis et le témoignage de Pappus, et l'existence des variantes conservées par Eutocius laissent donc entrevoir des variations dans l'histoire du texte pour la démonstration des égalités précitées. Le détail de ces variations nous échappe, mais nous sommes renvoyés à une histoire antérieure à l'édition d'Eutocius. M. D-F.

[2] Dans son commentaire de la proposition, Eutocius signale les deux cas de figure de l'ellipse en se référant précisément aux figures du texte édité : « les tangentes, qui rencontrent les diamètres seulement aux points de contact, rencontrent aussi leurs prolongements, soit comme dans le texte, soit de l'autre côté, là où se trouve le point

Ε » (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 316, 7-11). Au vu de cette remarque, il est clair qu'Eutocius n'avait édité que la figure 1.3. La figure 1.4 est un ajout postérieur qui témoigne d'un travail éditorial sur le Livre III, postérieur à l'édition d'Eutocius et, sans nul doute, en lien avec le commentaire d'Eutocius. Elle est absente de la tradition arabe. On peut être sûr en même temps qu'Eutocius n'est pas à l'origine de la rédaction choisie dans la *protase*, où la volonté de simplification l'a emporté sur le respect de la généralité. On ne peut comprendre, en effet, s'il était l'auteur de cette rédaction, qu'il ait choisi de représenter dans son édition d'Apollonius l'ellipse exclue par la *protase*. M. D-F.

[3] On observe ici une nouvelle insuffisance, du même ordre que celle de la *protase*. La démonstration relative au cas des sections centrées ne couvre aucun des deux cas de l'ellipse. Ces derniers demandent, en effet, après l'obtention de l'égalité des triangles ΗΔΒ et ΑΗΓ, l'addition ou le retranchement du quadrilatère ΑΗΒΕ. Ces deux insuffisances sont liées : on voit bien, en effet, que le rédacteur n'a en tête que l'hyperbole, dans le cas des sections centrées, et donc une figure, comme celle de la parabole, où les triangles sont opposés par le sommet. On doit sans doute au même rédacteur l'addition de la figure de l'ellipse 1.4, puisqu'elle illustre le cas où les triangles ΑΕΔ et ΓΕΒ sont également opposés par le sommet. M. D-F.

[4] Dans son commentaire, Eutocius accorde un traitement particulier au cas où, dans la parabole et l'hyperbole, le point Η est pris entre Α et Β, ce qui suppose que ce cas n'était pas représenté dans le texte des *Coniques* qu'il édite . Eutocius atteste ainsi indirectement la position du point Η observé dans le texte transmis par **V**. M. D-F.

[5] L'addition du quadrilatère commun ΙΚ convient au cas de la parabole, de l'hyperbole et d'un des cas de l'ellipse, celui qui, dans l'édition d'Eutocius de la proposition 1, était le seul à être représenté (fig. 1.3). Le retranchement du même quadrilatère formulé ici convient à l'autre cas de l'ellipse (fig. 1.4), représenté dans notre proposition 2 par la figure du cercle (fig. 2.2). Au vu de la proposition 1, on peut légitimement se demander si tel était bien le cas dans l'édition d'Eutocius. Bien que le commentaire d'Eutocius ne nous offre pas ici un point de répère pour appuyer nos doutes, il n'est pas exclu que l'opération de retranchement et la figure du cercle qui l'illustre soient le résultat d'une nouvelle intervention éditoriale après Eutocius, en l'occurrence, celle du rédacteur qui a ajouté la figure 1.4 dans la proposition 1. M. D-F.

[6] Il est peu probable que l'adjectif ὅλος remonte à Eutocius, encore moins à Apollonius, car il exclut sans raison le cas de l'ellipse et du cercle, alors que, dans le cas présent, une absence de détermination permet aisément de couvrir tous les cas. Cette addition va dans le même sens que les interventions précédentes (voir *supra*, notes [2], [3] et [5]), où l'on perçoit la volonté d'aider le lecteur qui raisonne sur la figure de l'hyperbole. M. D-F.

[7] La rencontre de deux tangentes aux sections opposées crée deux cas de figure que commente Eutocius : ou bien les deux droites sont respectivement tangentes à l'une et l'autre branche de l'hyperbole (*cf.* II.32), et la droite qui passe par leur point de

rencontre et le centre est le diamètre droit ; ou bien les deux droites sont tangentes à une seule section, et la droite qui passe par leur point de rencontre et le centre est le diamètre transverse. On peut d'ores et déjà signaler que, dans la plupart des propositions du Livre III concernées, le raisonnement est bâti sur la figure de II.32. Font exception les propositions III.6-10 et III.18.

Eutocius note également que, dans les énoncés des propositions 4 et suivantes, il n'est pas précisé de quelle manière les droites sont tangentes, et que, de ce fait, la tradition manuscrite est partagée. Eutocius confirme par cette remarque la rédaction des énoncés des propositions concernées, tels qu'on peut les lire dans la tradition grecque. Il faut, en effet, attendre l'*ecthèse* pour que soit levée l'ambiguïté. M. D-F.

[8] La syntaxe de la séquence καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε (littéralement : « que la droite ΑΒ soit menée ainsi que la droite ΓΔ, et que <celle-ci> soit prolongée jusqu'au point Ε ») mérite d'être soulignée. Le tour est jugé maladroit, voire incorrect par M. Federspiel (*REG*, 115, p. 122) ; il est, en tout cas, sans autre exemple dans le *corpus* classique. On attend καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Ε. Le tour est caractérisé (1) par un accord au singulier du premier verbe, qui précède ses sujets multiples ; (2) par l'ellipse du sujet du second verbe coordonné, alors qu'une partie seulement des sujets sous-entendus du premier verbe est concernée par l'idée exprimée. On retrouve la caractéristique (1) dans l'*ecthèse* de la proposition 40 et les caractéristiques (1) + (2) dans les *ecthèses* des propositions 4, 5, 20 et 32, ainsi que dans la *construction* de la proposition IV, 53, et, fait remarquable, pour le tracé des mêmes droites, à savoir la droite qui joint les points de contact et la droite qui joint le point de concours des tangentes et le centre de la section. Dans l'actuelle proposition 4, ces deux tracés ne jouent aucun rôle dans la *démonstration* et sont absents de la *protase* (voir *infra*, note [10]). M. D-F.

[9] Sur cet optatif conclusif déjà rencontré en I.7 (tome 1.2, p. 32, 10), voir M. Federspiel, *REG*, 115, p. 123-124. M. D-F.

[10] Le *lemme* III.1 de Pappus (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 159, 11-23), qui a été rapporté à la proposition 8 de manière inexacte par Heiberg et Ver Eecke (voir *infra*, note [20]) trouve un point d'application dans l'établissement des égalités de la proposition 4. Voici l'énoncé du *lemme* : « Soit une figure ΑΒΓΔΕΖΗ et que ΒΗ soit égale à ΗΓ. Je dis que ΕΖ est parallèle à ΒΓ. » Il faut faire correspondre les points Β et Γ de la figure de Pappus aux points de contact Α et Β de la proposition 4, le milieu Η de la droite ΒΓ chez Pappus au milieu Ε de la droite qui relie les points de contact, le point Δ de Pappus au centre Δ, les points Ε et Ζ chez Pappus aux points de concours des tangentes et des diamètres, Η et Ζ, et enfin le point Α de la figure de Pappus au point Γ. Le *lemme*, qui n'a pas de lien avec l'actuelle proposition 4, prend à nouveau tout son sens si on le rapporte à une démonstration qui utiliserait le parallélisme des droites ΑΒ et ΗΖ, au lieu de passer par la construction d'une troisième tangente. Du parallélisme des deux droites, en effet, on déduit immédiatement, par application d'*Éléments*, I.37, l'égalité des triangles ΑΗΖ et ΒΗΖ, et donc, par addition du triangle commun ΗΓΖ, l'égalité cherchée. Dans cette hypothèse, le *lemme* de Pappus pouvait servir à démontrer le parallélisme de ΑΒ et ΗΖ dans les sections opposées, si celui-ci était directement

déduit, dans le texte des *Coniques*, du partage en deux parties égales de AB au point E, établi par II. 39. Si maintenant on rapproche le *lemme* III.4 du *lemme* I.9 (voir *supra*, note [1]), tous deux sans objet dans le texte actuel du traité, on voit que c'est le même procédé, à savoir le recours au parallélisme des mêmes droites de jonction, qui permet de redonner un sens à leur témoignage. On devine ici une autre cohérence, qui renvoie à des démonstrations correspondantes pour l'établissement des égalités qui font l'objet des propositions 1 et 4 (voir *infra*, note [20]).

Dans ce contexte, on peut même se demander si les droites AB, ΓΔ et le point médian E de AB dans la figure de notre proposition 4, qui ne servent pas à la démonstration transmise (voir *supra*, note [8]), ne témoigneraient pas de l'existence d'une autre démonstration dans la tradition des *Coniques*, à laquelle correspondrait le *lemme* de Pappus, M. D-F.

[11] Ce n'est que dans les propositions 5 et 11 du Livre III, dont les énoncés sont quasiment identiques, que l'on trouve l'emploi du verbe ἀπολαμβάνειν pour un polygone ; d'autre part, d'un point de vue syntaxique, on attend, au moins pour la première occurrence du participe, que le verbe admette un premier régime au génitif introduit par ὑπὸ pour déterminer la droite qui *découpe* ; avec la structure syntaxique observée dans le texte, le verbe devient un synonyme de γίγνεσθαι ; voir M. Federspiel, *REG*, 115, p. 124-125. M. D-F.

[12] Dans son commentaire, Eutocius, qui trouve la proposition « peu claire » (ἐπειδὴ ἀσαφὲς τὸ ε′ θεώρημα), reformule la partie démonstrative en considérant successivement le cas de « la figure ayant le diamètre droit » et le cas de « la figure ayant le diamètre transverse » (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 320, 8, 14), attestant par là-même l'existence de deux figures dans son édition. D'autre part, il intègre à chacune des deux démonstrations l'établissement du résultat que le texte du traité formule sous la forme d'un corollaire, à savoir l'égalité du triangle KΛZ et du quadrilatère MHKΔ. Or, dans sa démonstration relative à la figure du diamètre droit, où le triangle HΘM est plus grand que le triangle ΓΛΘ, le retranchement final du triangle KΘΔ commun aux deux termes de l'égalité obtenue (tr. HΘM = tr. KΔΘ + tr. ZΛK) suppose qu'Eutocius n'avait pas édité la figure de **V**, où le point Θ est au-dessous de Δ. Le retranchement opéré pour le premier terme correspond, en effet, à une figure où le point H est pris de telle manière que le triangle KΘΔ est une partie du triangle HΘM, comme celle de l'édition Heiberg, lequel reproduit, sans le préciser, non pas **V**, mais l'édition de Halley. M. D-F.

[13] On peut être légitimement surpris de voir utilisé dans le corollaire le verbe γίγνεσθαι au lieu du verbe εἶναι dans l'expression de l'égalité des deux figures (voir M. Federspiel, *REG*, 115, p. 128-130), alors qu'aucune opération n'est formulée explicitement. On a peut-être ici l'écho d'un texte disparu où l'égalité n'était pas donnée sous la forme d'un corollaire, mais, intégrée à la démonstration, comme dans le commentaire d'Eutocius (voir *supra*), et obtenue comme résultat d'une opération explicite. M. D-F.

[14] L'ensemble constitué par les propositions 6 et 7-10, qui étudient la situation mathématique des propositions 2 et 3 dans le cas des sections opposées, et l'ensemble des propositions 11 + 12, ainsi que la proposition 14, commencent par la formule τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων (τῶν αὐτῶν ὄντων, prop. 12), qui indique que l'on conserve les hypothèses de la proposition précédente. Les deux seuls exemples déjà rencontrés de ce type de propositions sont dans le Livre II (II.2 et 21). L'examen des cas de figure et le traitement des cas particuliers se prêtent naturellement à cette rédaction allégée, qui permet de ne pas reprendre le détail des données réutilisées ; c'est la raison pour laquelle les propositions commençant par τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων (ou τῶν αὐτῶν ὄντων) sont relativement nombreuses dans le Livre III et dans la première partie du Livre IV. Un trait rédactionnel, qui semble leur être propre, mérite d'être relevé : ces propositions offrent la quasi totalité des occurrences de l'emploi du tour δεικτέον ὅτι dans les *Coniques*. L'expression se trouve ici dans la proposition 10. Elle relève d'un ancien vocabulaire, dont M. Federspiel a étudié la distribution (voir *REG*, 121, p. 520-525) dans le *corpus* mathématique classique. Le tour est en particulier très présent pour introduire le *diorisme* du théorème chez Archimède. Si l'on met à part l'occurrence de la proposition IV.15, qui relève du type d'emploi trouvé chez Archimède, l'usage du traité des *Coniques* montre une autre distribution, puisque l'emploi de l'expression semble s'être spécialisé dans les propositions dont il est question ici ; les occurrences de δεικτέον ὅτι sont dans les *protases*, juste après la formule de renvoi aux hypothèses précédentes (démonstration additionnelle de I.38 ; II.2, 21 ; III.48), dans les *diorismes* (III.29 ; IV.4, 5, 12), dans la *démonstration* pour scander des *diorismes* intermédiaires (III.25, 26). M. D-F.

[15] Les hypothèses conservées (τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων) ne sont pas *stricto sensu* celles de la proposition précédente, mais celles de la proposition 4, à savoir la rencontre de deux tangentes menées à des sections opposées, d'une part, et la rencontre des tangentes et des diamètres menés par les points de contact, d'autre part. Ces deux données trouvent une expression dans l'*ecthèse* de la proposition 5, mais pas dans la *protase* ; cette dernière ne pose comme hypothèse que la rencontre des tangentes, et ne mentionne ensuite qu'un seul des deux diamètres passant par les points de contact, puisque l'on n'opère que sur l'une de ces deux droites. Elle suppose d'autre part que l'une des parallèles menées du point pris sur la section est parallèle à la droite qui joint les points de contact ; or ces droites sont des éléments absents de la proposition 6. M. D-F.

[16] Le choix de la position du point Κ sur la branche à laquelle sont tangentes ΑΖ et ΒΗ permet de renvoyer directement à la proposition 2 pour obtenir le résultat cherché. Dans son commentaire de la proposition, Eutocius a senti le besoin de démontrer le cas de figure où le point Κ est sur la branche opposée. M. D-F.

[17] Sur l'emploi insolite de la particule οὖν à cet endroit, voir mon article précité, *REG*, p. 130-131. M. F.

[18] La rédaction des quatre propositions 7 à 10, qui sont autant de cas de figure, est particulièrement cursive. On relèvera la formule λέγω ὅτι ἔσται τὰ τῆς

προτάσεως qui tient lieu de *diorisme* dans la proposition 7 (sur des formules analogues dans le *corpus* mathématique classique, voir M. Federspiel, *REG*, 115, p. 131-133) ; on notera également l'énoncé cursif de la proposition 9, qui tient lieu tout à la fois de *protase*, d'*ecthèse* et de *diorisme*. Ajoutons à ces exemples deux particularités linguistiques trouvées dans la proposition 8, et relevées par M. Federspiel (*REG*, 121, p. 515-516 et *REG*, 115, 133-142), l'emploi de la préposition ἀντὶ (p. 180, 7), inconnue de la langue mathématique classique, et l'omission du participe ἐπιζευγνυμένη dans les deux tours ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β et τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ, qui n'a pas de justification. M. D-F.

[19] On trouve une démonstration de cette égalité dans le commentaire d'Eutocius à la proposition 6, dans le cadre de son traitement du cas où le point Κ n'est pas pris sur la section à laquelle sont tangentes ΑΖ et ΒΗ, mais sur la section opposée (voir *supra*, note [16]). Ce n'est pas la première fois qu'un résultat admis sans démonstration dans le texte grec des *Coniques* est prouvé chez Eutocius sous une autre forme qu'un *lemme* explicitement présenté comme tel, et dans le commentaire d'une proposition apparentée. L'égalité des triangles ΗΒΓ et ΓΔΕ de la proposition I.50 avait été admise sans avoir été établie auparavant ; or, comme on l'a vu, on en trouve une démonstration chez Eutocius, dans une variante à la proposition qui construit pour la première fois ces triangles, à savoir la proposition I.43 (voir *supra*, note [1]). M. D-F.

[20] On a ici une atteinte à la cohérence interne du texte, puisque, ni dans le cas de l'hyperbole et de l'ellipse, ni dans le cas des sections opposées, le parallélisme de ces deux droites n'a été « démontré » – la forme verbale passive ἐδείχθη est en facteur commun et porte donc aussi sur le deuxième résultat utilisé, à savoir le parallélisme des deux droites ; il n'y a pas lieu de sous-entendre ἐστι, comme le fait Heiberg (« est » dans sa traduction), mais l'infinitif εἶναι, comme pour le premier résultat (« esse » dans sa traduction). On a sans doute ici une nouvelle trace de l'existence d'une tradition démonstrative où le parallélisme des deux droites jouait tout son rôle (voir *supra*, note [1]).

D'autre part, dans son édition de la proposition, Heiberg rapporte à ce passage le *lemme* de Pappus III. 1 (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 159, 11-23), ce qui est inexact, comme je l'ai signalé précédemment (voir *supra*, note [10] ; voir aussi *Recherches sur les Coniques*…, p. 263-264). Le parallélisme des droites ΑΒ et ΗΖ n'est pas déduit dans notre passage du partage en deux parties égales de la droite qui joint les points de contact des deux tangentes à la section (*cf.* II. 39) ; cette donnée, qui pourrait correspondre à celle de Pappus (ΒΗ = ΗΓ), à la condition de supposer les points Β et Γ de sa figure sur une même section, est absente de notre texte. En outre, comme la proposition 8 raisonne sur le cas où les deux tangentes le sont à une seule section, on peut considérer que Pappus avait déjà démontré le parallélisme des deux droites dans le lemme I.9 (voir *supra*, note 1). M. D-F.

[21] La présence de l'adverbe ἀνάλογον pour accompagner le tour ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ nous renvoie à la langue des *Éléments*, et en particulier au Livre VI (voir M. Federspiel, *REG*, 121, p. 516-517). La présence exceptionnelle de ce tour qui fait figure ici d'archaïsme (la seule autre occurrence dans les *Coniques* se

trouve en I.15) ne manque pas d'intérêt. Le fait qu'on le rencontre dans un passage qui garde la trace de traditions démonstratives qui ne sont plus représentées dans le texte transmis n'est sans doute pas un hasard. M. D-F.

[22] La proposition 10 demande que les deux points Κ et Λ ne soient pas confondus avec les points de concours des diamètres et des sections. Le manque de précision est patent. D'un point de vue strictement rédactionnel, avec une telle formulation, la proposition se place dans la continuité des propositions précédentes. On attend donc que les deux points Κ et Λ soient entre les points Γ et Δ ou à l'extérieur. Or, dans la figure transmise par **V**, si le point Λ est au-dessous du point Γ, le point Κ se trouve sur la branche opposée. On retrouve donc un cas de figure qui aurait pu être examiné dans le cadre de la proposition 7. M. D-F.

[23] Sur l'expression archaïque ἐφ' ὧν τὰ Α, Β, Γ, Δ, qui, avec l'emploi des expressions ἡ καλουμένη et διὰ δὲ τοῦτο, apparente la rédaction de cette proposition à celle des *problèmes* des Livres I et II, voir M. Federspiel, *REG*, 121, p. 526 et *Les Études classiques*, 76, p. 343-346. M. D-F.

[24] Il est intéressant de comparer le texte du lemme (au sens littéraire du terme) par lequel commence le commentaire de la proposition chez Eutocius (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 324, 7-9) et le texte correspondant transmis par **V** (p. 196, 17-198, 2). Si Eutocius reproduit mot à mot le texte de l'édition sur laquelle il travaille, on aurait ici l'attestation d'une autre désignation des angles ΒΘΖ et ΗΘΖ. Le tour utilisé par Eutocius, αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι (« les angles appliqués au point Θ ») ne fait pas partie du vocabulaire du traité des *Coniques* ; il n'est représenté que dans les *problèmes* des Livres I-II. La présence éventuelle d'un tel tour dans le modèle d'Eutocius, antérieur à sa propre édition des *Coniques*, n'est pas anodine, quand on sait que la proposition III.13 conserve d'autres usages qui la rendent proche de la langue des *problèmes*, qui, on l'a vu, présente des caractères spécifiques. Eutocius a peut-être conservé ici une leçon ancienne. M. D-F.

[25] C'est la seule occurrence du Livre III d'une référence à une proposition antérieure sous son numéro propre (voir tome 1.2, Note complémentaire [83]). Elle s'ajoute à celles du groupe des propositions I.43-47, auquel la proposition III.13 est apparentée. M. D-F.

[26] On trouve dans la marge inférieure du f. 101r de **V** des schémas marginaux qui s'appliquent à la chaîne de proportions dont le résultat final est l'égalité $\mathrm{\Delta B}^2 : \mathrm{\Delta B} \times \mathrm{BE} = \mathrm{H\Theta}^2 : \Gamma\mathrm{B} \times \mathrm{B\Theta}$. Ils sont reproduits, corrigés et interprétés dans l'édition Heiberg (*Coniques* I, p. IX). Ces schémas ont pâti des reliures successives, et les copies byzantines ne permettent pas de les restituer en totalité (voir chapitre I, p. XIII-XIX). Parmi ceux qui sont conservés, on peut identifier de manière sûre les schémas qui illustrent la composition des rapports dans la chaîne de proportions. M. D-F.

[27] Ici et dans les propositions suivantes, on a une expression abrégée, du type : « la droite entre tel et tel point (ou telle droite) ». Mais, à partir de la protase de la proposition III, 27, on trouve presque toujours la forme pleine : « la droite *découpée* (ἀπολαμβανομένη) entre tel et tel point ». Pour éviter une possible ambiguïté, c'est cette traduction que j'adopte partout. M. F.

[28] Dans son commentaire de la proposition, Eutocius expose le cas particulier relatif à l'ellipse et au cercle, où les diamètres qui passent par les points de contact sont parallèles aux tangentes. Il signale que certains de ses manuscrits faisaient de ce cas une proposition à part entière sous le numéro 17, et qu'il a délibérément « placé » sa démonstration dans son commentaire (ἐν σχολίοις οὖν ἔδει τοῦτο κεῖσθαι, éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 326, 21), en nous renvoyant, pour comparaison, à son exposé du même cas particulier dans son commentaire à I.41. L'intérêt de ce témoignage est double : il confirme la numérotation de **V** et nous assure qu'aucun changement n'est intervenu dans l'ordonnance des propositions 1-16 depuis l'édition d'Eutocius ; il confirme également les principes éditoriaux d'Eutocius exposés dans l'introduction de son commentaire (voir tome 1.2, p. XL-LII). Eutocius ne nous dit pas explicitement s'il suit une tradition particulière en faisant ce choix, ou s'il innove en la matière. M. D-F.

[29] On trouve dans la marge inférieure du f. 102v des schémas marginaux qui illustrent l'utilisation de l'opération δι' ἴσου pour l'obtention du résultat final. Il s'agit en fait d'une variante de démonstration plus rapide que le procédé démonstratif du texte. Les quatre carrés et rectangles et les deux triangles figurent les trois étapes suivantes :

(1)$ZE \times E\Delta$: tr $AEH = B\Gamma^2$: tr. $A\Theta\Gamma$;
<*Éléments* VI.19 : tr. AEH : tr. $A\Theta\Gamma = EA^2 : A\Gamma^2$>
(2) <*par permutation*> tr. AEH : EA^2 = tr. $A\Theta\Gamma : A\Gamma^2$;
(3) *à intervalle égal* $ZE \times E\Delta : EA^2 = \Gamma B^2 : A\Gamma^2$. M. D-F.

[30] Dans son commentaire, Eutocius expose le cas particulier où les tangentes aux sections de l'ellipse et du cercle sont parallèles aux diamètres menés par les points de contact ; il signale que ce cas « figurait comme proposition indépendante », comme dans le cas de la proposition 16. Même s'il ne reprend pas la formule « dans certains manuscrits », de son commentaire précédent, l'imparfait utilisé (ἔκειτο, «figurait ») montre qu'elle est sous-entendue. Ce témoignage présente le double intérêt que nous avons signalé plus haut (voir note [28]), et donne une information nouvelle. Eutocius dit expressément avoir «retranché» cette démonstration, qui figurait dans certains de ses manuscrits, pour la placer dans son commentaire comme un cas particulier de la proposition 17. On retrouve dans les propos d'Eutocius la même ambiguïté signalée à propos de son commentaire à la proposition II.14 (voir chapitre I, p. XII-XIII). Le verbe « retrancher » pourrait faire penser de prime abord qu'il intervient directement pour modifier la tradition, mais cette affirmation est en contradiction avec le fait qu'une partie seulement de ses manuscrits intégrait au texte l'examen du cas particulier. Il est possible, et même vraisemblable, qu'Eutocius modifie l'édition qui lui sert de base de travail, à la faveur de la consultation d'autres traditions. Si le *retranchement* opéré

renvoie en fait à ce manuscrit de base, c'est un nouvel indice de son caractère érudit. M. D-F.

[31] La rédaction de l'*ecthèse* est rapide, voir M. Federspiel, *REG*, 121, p. 532. M. D-F.

[32] Dans son commentaire des propositions 18 et 19, Eutocius reproduit trois variantes manuscrites, dont les procédés démonstratifs sont parallèles, et qui sont liées entre elles (la seconde variante de la proposition 19 utilise un résultat démontré dans la variante de la proposition 18) ; elles sont bâties pour le cas où les tangentes le sont à l'une et l'autre section. Elles ont toutes recours au tracé auxiliaire de la parallèle à la tangente, menée par le point où le diamètre passant par le point de contact coupe l'autre branche de l'hyperbole. Pour la variante de la proposition 18 et pour la première des deux variantes de la proposition 19, Eutocius fait explicitement référence à une origine manuscrite. Mais la variante de la démonstration de la proposition 19 n'a pu se substituer au texte d'Apollonius que par accident, car elle ne représente qu'un exercice scolaire. M. D-F.

[33] L'opération *à intervalle égal* était illustrée dans **V** par des schémas marginaux complémentaires, dont il reste trois quadrilatères alignés dans la marge supérieure du folio 105r, le rectangle ΗΛ × ΛΙ, le quadrilatère ΡΞΛΚ et le rectangle ΜΛ × ΛΞ. Les trois figures correspondant au carré sur ΑΖ, au triangle ΔΤΖ et au carré sur ΖΔ peuvent être restituées grâce au témoignage de **v** (voir l'édition de Heiberg, *Coniques*, I, p. X). M. D-F.

[34] L'omission du second terme du rapport a été corrigée par Pierre de Montdoré dans le *Parisinus gr.* 2356, suivi par Halley. Le second terme est ajouté après εὐθειῶν (p. 220, 8). Heiberg a repris la correction de Halley mais en l'introduisant, avec juste raison, après συμπτώσεως (p. 220, 7 ; éd. Heiberg, I, p. 360, 19) pour faire apparaître le saut du même au même. J'ai modifié le texte de Heiberg en ajoutant τῶν εὐθειῶν au début de la séquence restituée afin de donner un complément à συμπτώσεως (p. 220, 7), conformément au passage correspondant dans la *protase* de la proposition 19. Cette addition permet d'éliminer l'ambiguïté du texte édité par Heiberg, où le même terme, quelques lignes plus haut (p. 220, 5 ; éd. Heiberg, I, p. 360, 16), désigne le point de rencontre des deux tangentes. M. D-F.

[35] L'opération *à intervalle égal* est illustrée dans **V** par des schémas complémentaires, dessinés à la droite de la figure de la proposition (f. 107r). On retrouve le carré sur ΑΖ (fig. 1), le triangle ΒΖΥ (fig. 2) et le rectangle ΒΖ × ΖΔ (fig. 3) ainsi que le rectangle ΝΟ × ΟΗ (fig. 4) et le quadrilatère ΚΟΡΤ (fig. 5). Mais la figure 3, au lieu d'être dans l'alignement des figures 1 et 2, est dessinée, en raison du manque de place dans la marge, sous la figure 5. La figure 6, le rectangle ΚΟ × ΟΩ, figurait encore en dessous dans la marge inférieure, comme en témoigne **v**. M. D-F.

[36] La particule δή après un impératif, ici διήχθωσαν, est réservée à la *construction* (voir M. Federspiel, *REG*, 121, p. 533). On attend δέ. Il s'agit sans doute

d'une erreur de copie, mais, comme le fait s'est déjà produit en I.6 et 10, le texte n'a pas été normalisé. M. D-F.

[37] L'expression κατ' ἐναντίον est une variante rarissime du participe ἀντικείμενοι. On la trouve encore chez Archimède, *Equil.*, I.9, où elle qualifie les côtés opposés d'un parallélogramme. M. F.

[38] Dans son commentaire de la proposition, Eutocius commence par signaler que, dans certains de ses manuscrits (ἔν τισιν ἀντιγράφοις), on trouve les cas particuliers de la proposition « rédigés comme des propositions ». Comme il nous dit ensuite qu'il les a « retranchés » pour les présenter dans son commentaire, il faut en déduire, comme plus haut (voir notes [28] et [30]), que le texte de base utilisé par Eutocius pour bâtir sa propre édition de la proposition est un texte contaminé par la tradition scolaire. Eutocius expose au total trois démonstrations. La première (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 336, 9-338, 2) est relative au cas où les parallèles menées des points Η et Θ passent par le centre ; la seconde (*ibid.*, p. 338,3-340,2) est relative au cas où une seule des deux parallèles passe par le centre ; la troisième est une variante de démonstration pour ce deuxième cas particulier (*ibid.*, p. 340, 3-10). M. D-F.

[39] Les quatre occurrences de δεικτέον trouvées (p. 230, 14, 17 ; 232, 13, 16) dans la proposition 24 (voir aussi les propositions 25 et 26) figurent dans des *diorismes* intermédiaires qui scandent la démonstration ; sur cet emploi, qui est un archaïsme selon M. Federspiel, voir *REG*, 121, p. 522. La forme verbale ζητοῦμεν (p. 232, 3) relève sans doute du même type de tradition démonstrative. M. D-F.

[40] Le tour ἡ κατὰ τὸ Ξ σύμπτωσις (« la rencontre au point Ξ ») est rare dans le *corpus* mathématique classique, voir M. Federspiel, *REG*, 121, p. 534-535). M. D-F.

[41] Dans son *lemme* 6 (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 161, 21-162, 2), Pappus démontre que « les doubles des sommes des rectangles ΒΞ,ΞΔ et ΒΛ,ΛΔ et des carrés sur ΞΕ et ΕΛ », pour reprendre les termes du texte des *Coniques*, sont égaux à $4\mathrm{BE}^2$, en utilisant le même procédé que la démonstration du traité (p. 240, 23-27), à savoir le recours à *Éléments*, II.5. De toute évidence, le *lemme* de Pappus ne comble pas une ellipse dans le texte transmis, en grec comme en arabe. La possibilité que Pappus lisait un autre texte, où l'égalité était directement posée, n'est donc pas exclue. M. D-F.

[42] La démonstration de l'égalité des deux segments ΔΝ et ΔΜ est obtenue par le recours à la réciproque d'*Éléments*, II.6, explicité par la reprise partielle de l'énoncé euclidien (« la droite ΔΜ, augmentée de la droite ΔΖ »). Cette égalité fait l'objet du *lemme* 8 de Pappus (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 161, 21-163, 2). À partir des mêmes données que le texte des *Coniques*, $(\mathrm{MZ} \times \mathrm{Z}\Delta) + \Delta\mathrm{N}^2 = \mathrm{ZN}^2$, Pappus obtient l'égalité des deux segments en ayant recours à *Éléments*, II.2. Pappus a pu vouloir exposer ici une variante de démonstration. On ne peut cependant exclure la possibilité que Pappus lisait un texte où l'égalité des deux segments était directement posée, et donc, sans la mention renvoyant à l'énoncé euclidien ; auquel cas, le *lemme* remplirait sa fonction habituelle. M. D-F.

[43] Dans son commentaire, Eutocius signale que, si les deux tangentes le sont à une seule et même section, la proposition peut être démontrée de la même manière que la précédente, et que c'est pour éviter une inutile répétition qu'il a « retenu » la démonstration qui nous est transmise (αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἀπελέχθη, éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 342, 14-15). A en juger par les termes employés, il semblerait que les manuscrits d'Eutocius aient été partagés de la même manière que dans les propositions 4 et suivantes (voir *supra*, note 7). M. D-F.

[44] L'égalité des segments ΔΞ et ΞΓ est déduite de la relation $(\mathrm{\Delta E} \times \mathrm{E\Gamma}) + \mathrm{E\Xi}^2 = \mathrm{\Xi\Gamma}^2$ par le recours à la réciproque d'*Éléments*, II.5, comme le montre la reprise de l'énoncé euclidien. Dans son *lemme* 9, à partir des mêmes données que le texte des *Coniques*, Pappus démontre l'égalité des segments par le recours à *Éléments*, II.6. Le même *lemme* s'applique à la proposition 33 pour l'égalité des segments ΛΠ et ΠΗ. On peut faire ici les mêmes remarques que plus haut (voir note [42]). M. D-F.

[45] L'obtention de l'égalité des segments ΖΜ et ΜΘ à partir des mêmes données que le texte des *Coniques*, à savoir $(\mathrm{\Theta\Delta} \times \mathrm{\Delta Z}) + \mathrm{M\Theta}^2 = \mathrm{\Delta M}^2$, fait l'objet du *lemme* 10 de Pappus. Le texte des *Coniques* fait appel à la réciproque d' *Éléments*, II.6 ; Pappus ajoute à la droite ΔΖΜΘ, du côté du point Δ, un segment égal à ΜΘ. Les mêmes conclusions s'imposent que pour les *lemmes* 8 et 9 (voir, plus haut, notes [42] et [44]). M. D-F.

[46] Eutocius proposait une variante de démonstration (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 342, 16-20), avec, comme point de départ, le tracé des tangentes ΓΛ et ΛΖ, mais le texte du commentaire est incomplet en raison d'une lacune dans la tradition manuscrite. M. D-F.

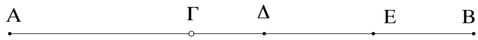
[47] Dans cette ecthèse, ainsi que dans celle de III, 38, tous les substantifs désignant des objets mathématiques sont grammaticalement définis, alors qu'on attend l'indéfini, du type : « *une* hyperbole AB », même dans le cas d'une proposition dont la protase commence par « les mêmes hypothèses étant faites ». Mais c'est manifestement intentionnel ici. M. F.

[48] On attend 4 figures, dont celle de l'ellipse (ou du cercle), puisqu'on sait qu'Eutocius représentait l'ellipse dans les propositions relatives à une section de cône (voir son commentaire à la proposition III.1). **V** présente 5 figures : une parabole, une hyperbole et 3 figures de sections opposées, dont l'une n'est pas conforme à l'énoncé, puisque la sécante ΓΖ coupe chacune des deux sections (*cf.* prop. 39). On retrouve la même situation dans la proposition suivante, qui ne représente ni l'ellipse ni l'hyperbole. On peut raisonnablement penser que des modifications sont intervenues après Eutocius dans la tradition transmise par **V**. M. D-F.

[49] Comme dans les propositions I.47 et 50, **V** reproduit un cercle au lieu de la figure de l'ellipse attendue ; il en sera de même dans le groupe des propositions relatives aux propriétés focales des coniques (45-52) et dans la proposition 53. Dans ces

mêmes propositions, comme ici, les tracés mentionnés dans l'*ecthèse* et la *construction* correspondent au seul cas de l'ellipse et du cercle, contrairement à l'usage observé dans le reste du traité. M. D-F.

[50] Pappus consacre son *lemme* 11 ((éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 163, 21-164, 4) à la démonstration de cette relation à partir des mêmes données (= I.37 $\mathsf{KZ} \times \mathsf{Z\Lambda} = \mathsf{AZ}^2$). Son unique figure vaut pour l'hyperbole et l'ellipse, de diamètre AE :



Le *lemme* déduit de la relation de I.37 les deux égalités $\mathsf{BA} \times \mathsf{BE} = \mathsf{B\Gamma} \times \mathsf{B\Delta}$, qui correspond au cas de l'ellipse (le point B est le pied de la tangente), et la seconde, $\mathsf{\Delta A} \times \mathsf{\Delta E} = \mathsf{\Delta B} \times \mathsf{\Delta\Gamma}$, à celui de l'hyperbole (le point $\mathsf{\Delta}$ est le pied de la tangente). La première égalité est obtenue par un calcul de proportions (*Éléments* V.12, ἀναστρέψαντι), et, la seconde, par l'intermédiaire d'*Éléments* II.5 et II.3. Si le *lemme* de Pappus a pour mission de combler une ellipse, il faut supposer qu'il lisait un texte des *Coniques* où la proportion $\mathsf{BK} : \mathsf{KZ} = \mathsf{\Lambda K} : \mathsf{KA}$ était directement déduite de la relation de I.37 ; sinon, il faut l'interpréter comme une schématisation de procédures bien connues, puisqu'il s'agit de divisions harmoniques, et l'occasion de proposer de légères variantes aux procédés retenus dans les *Coniques* (*cf.* tome I.2, Note complémentaire [74]). M. D-F.

[51] On relève dans la proposition 44 des traits linguistiques déjà signalés par M. Federspiel comme témoins probables d'un usage ancien (voir mes Notes complémentaires [2] et [16] au Livre II) : la présence dans la protase du participe ἀγομένη à la place du participe attendu ἐπιζευγυμένη ; la présence de la particule γάρ après le verbe de sens existentiel ἔστω dans l'*ecthèse*. On observe également une rédaction rapide au point de friser la négligence dans le *diorisme*, voire l'incorrection dans l'*ecthèse* (on attend ἔστω ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ ἢ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β). Tout n'est peut-être pas à mettre sur le même plan, mais on voit ici apparaître un style d'écriture relativement éloigné de la rédaction surveillée du Livre I. M. D-F.

[52] Ici et dans les protases de III, 54, 55 et 56, on a l'expression τὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς au lieu du tour attendu τὸ ἐπὶ τῆς γραμμῆς σημεῖον. Si mes relevés sont exacts, il s'agit des seules occurrences de ce tour, du moins avec les substantifs γραμμή, εὐθεῖα et τομή, dans les mathématiques classiques. M. F.

[53] Comme dans la *protase* de la proposition 56, l'expression des carrés construits sur les segments de la droite qui passe par le point médian de la droite qui joint les points de contact et par le point de concours des tangentes, ici les segments EB et $\mathsf{B\Delta}$, a recours au datif δυνάμει, placé en facteur commun (pour d'autres occurrences de ce tour dans le cas de carrés mis en rapport, voir le dictionnaire de Mugler, p. 149). Ce sont les deux seules occurrences de l'emploi de δυνάμει dans les *Coniques*. C'est une incompatibilité grammaticale qui explique le recours à ce tour. En effet, l'emploi de l'expression habituelle dans le traité τὸ ἀπὸ...τετράγωνον, et donc ici le recours à une séquence *τὸ ἀπὸ τοῦ ἐντὸς τμήματος τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τετράγωνον (« <le rapport que> le carré construit sur le segment intérieur a

avec le carré construit sur le segment restant ») est impossible d'un point de vue syntaxique, telle que la *protase* est construite. Cela conduirait, en effet, à faire du complément déterminatif au génitif qui précède, exprimant la droite entière (τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης, « de la droite qui joint le point de concours des tangentes et le milieu de la droite qui joint les points de contact », p. 312, 17-19), un complément de τετράγωνον et non pas de τμήματος. M. D-F.

[54] L'opération de *permutation* est inutile à cet endroit et, de surcroît, fautive puisqu'elle fait obstacle à l'opération à *intervalle égal*. Elle a été supprimée par Pierre de Montdoré, dans le *Parisinus gr*. 2356, et donc par Halley, suivi par Heiberg. Je ne l'ai pas athétisée, car elle figure dans la traduction arabe ; elle a donc peu de chance d'être un ajout postérieur à l'édition d'Eutocius. M. D-F.

[55] Par application d'*Éléments*, VI.4, Eutocius établit dans le triangle ΑΔΓ la relation ΓΔ : ΔΝ = ΑΔ : ΔΜ, d'où il tire par un calcul de proportions l'égalité ΚΑ : ΛΓ = ΜΑ : ΝΓ, qui permet d'obtenir par *Éléments*, V.18 la proportion du texte, $\Lambda\Gamma \times \mathrm{K}\mathrm{A} : \mathrm{K}\mathrm{A}^2 = \mathrm{N}\Gamma \times \mathrm{M}\mathrm{A} : \mathrm{M}\mathrm{A}^2$. La transformation de la même égalité, ΝΓ : ΜΑ = ΛΓ : ΚΑ par *Éléments*, V.18 pour obtenir la proportion du texte est illustrée par des schémas marginaux dans **V** (marge externe du folio 131r) ; le rectangle disparu (voir l'édition Heiberg, *Coniques*, I, p. XI), $\Lambda\Gamma \times \mathrm{K}\mathrm{A}$, peut être restitué par le témoignage du *Vaticanus gr*. 203. M. D-F.

[56] L'opération *à intervalle égal* est illustrée dans la marge inférieure du folio 131r (voir l'édition Heiberg, *ibid*., p. XII). **V** n'a conservé que les deux rectangles et le carré du premier rang. Les deux rectangles et le carré du second rang sont restitués par le témoignage de **v**. M. D-F.

[57] Sur ce verbe rare que l'on trouve trois fois dans les *Data* d'Euclide, mais neuf fois chez Archimède, voir M. Federspiel, *REG*, 121, p. 538. M. D-F.

TEXTE ET TRADUCTION

Quatrième livre des *Coniques* d'Apollonius de Perge

ἈΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ ΚΩΝΙΚΩΝ

ΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

Ἀπολλώνιος Ἀττάλῳ χαίρειν.

Πρότερον μὲν ἐξέθηκα γράψας πρὸς Εὔδημον τὸν Περγαμηνὸν τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν ἐν ὀκτὼ βιβλίοις τὰ πρῶτα τρία. Μετηλλαχότος δ᾽ ἐκείνου τὰ λοιπὰ διεγνωκότες πρός σε γράψαι διὰ τὸ φιλοτιμεῖσθαί σε μεταλαμβάνειν τὰ ὑφ᾽ ἡμῶν πραγματευόμενα πεπόμφαμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος σοι τὸ τέταρτον.

Περιέχει δὲ τοῦτο κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα δυνατόν ἐστι τὰς τῶν κώνων τομὰς ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλειν, ἐάνπερ μὴ ὅλαι ἐπὶ ὅλας ἐφαρμόζωσιν, ἔτι κώνου τομὴ καὶ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα συμβάλλουσι, καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις.

Τούτων δὲ τὸ μὲν προειρημένον Κόνων ὁ Σάμιος ἐξέθηκε πρὸς Θρασυδαῖον οὐκ ὀρθῶς ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἀναστραφείς· διὸ καὶ μετρίως αὐτοῦ ἀνθήψατο Νικοτέλης ὁ Κυρηναῖος.

Περὶ δὲ τοῦ δευτέρου μνείαν μόνον πεποίηται ὁ Νικοτέλης σὺν τῇ πρὸς τὸν Κόνωνα ἀντιγραφῇ ὡς δυναμένου δειχθῆναι, δεικνυμένῳ δὲ οὔτε ὑπ᾽ αὐτοῦ τούτου οὔθ᾽ ὑπ᾽ ἄλλου τινὸς ἐντετεύχαμεν.

Τὸ μέντοι τρίτον καὶ τὰ ἄλλα τὰ ὁμογενῆ τούτοις ἁπλῶς ὑπὸ οὐδενὸς νενοημένα εὕρηκα.

Πάντα δὲ τὰ λεχθέντα ὅσοις οὐκ ἐντέτευχα πολλῶν καὶ ποικίλων προσεδεῖτο ξενιζόντων θεωρημάτων, ὧν τὰ μὲν πλεῖστα τυγχάνω ἐν τοῖς πρώτοις τρισὶ βιβλίοις ἐκτεθεικώς, τὰ δὲ λοιπὰ ἐν τούτῳ.

Tit. Ἀπολλωνίου Περγαίου Κωνικῶν γʹ [δ^{ον} V^{2}] ἐκδόσεως Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου εὐτυχῶς V ‖ 12 Κόνων V^{5} Ψ : Κώνων V ‖ 15 σὺν V : ἐν Halley ‖ 16 Κόνωνα V^{5} Ψ : Κώνωνα V ‖ 22 ποικίλων V^{pc} c Ψ : ποικίλλων V^{ac} ‖ ξενιζόντων [ξενιξόντων c] c Ψ : ξενίζων τῶν V.

APOLLONIUS DE PERGE
TRAITÉ DES CONIQUES

Livre IV

Apollonius salue Attale[1].

C'est tout d'abord à l'intention d'Eudème de Pergame que j'ai rédigé l'exposition des Livres I-III des *Coniques*, dont j'avais ordonné la matière en huit Livres. Puisqu'il est mort, je me suis résolu à rédiger le reste à ton intention, en raison de ton vif désir de prendre connaissance des travaux que je mène, et je t'envoie pour l'instant le Livre IV[2].

Il comprend la question de savoir en combien de points au maximum les sections de cône peuvent rencontrer elles-mêmes et la circonférence de cercle (au cas où il n'y a pas congruence totale des sections) ; en outre, en combien de points au maximum une section de cône et une circonférence de cercle rencontrent des opposées, et, en dehors de ces questions, un certain nombre d'autres choses du même genre que les précédentes[3].

Le premier de ces points[4] a été exposé par Conon de Samos à l'intention de Thrasydée, mais les démonstrations qu'il a données laissent à désirer, ce qui lui a attiré les critiques méritées de Nicotélès de Cyrène[5].

Quant au deuxième point, Nicotélès s'est contenté d'en faire mention dans sa critique de Conon en prétendant qu'on pouvait en donner la démonstration, mais je n'en ai rencontré la démonstration ni chez lui ni ailleurs.

Le troisième point, j'entends par là ces « autres choses du même genre que les précédentes », je n'en ai pas trouvé le moindre traitement chez quiconque.

Tous les points énumérés que je n'ai pas rencontrés dans les livres réclamaient des théorèmes nombreux, variés et nouveaux, dont j'ai exposé la plupart dans les Livres I-III, et le reste dans celui-ci.

[1] Voir Note complémentaire [1].
[2] Voir Note complémentaire [2].
[3] Voir Note complémentaire [3].
[4] Voir Note complémentaire [4].
[5] Voir Note complémentaire [5].

Ταῦτα δὲ θεωρηθέντα χρείαν ἱκανὴν παρέχεται πρός τε τὰς τῶν προβλημάτων συνθέσεις καὶ τοὺς διορισμούς. Νικοτέλης μὲν γὰρ ἕνεκα τῆς πρὸς τὸν Κόνωνα διαφορᾶς οὐδεμίαν ἐκ τῶν ὑπὸ τοῦ Κόνωνος εὑρημένων εἰς τοὺς διορισμούς φησιν ἔρχεσθαι χρείαν οὐκ ἀληθῆ λέγων· καὶ γὰρ εἰ ὅλως ἄνευ τούτων δύναται κατὰ τοὺς διορισμοὺς ἀποδίδοσθαι, ἀλλά τοί γε δι᾽ αὐτῶν ἔστι κατανοεῖν προχειρότερον ἔνια, οἷον ὅτι πλεοναχῶς ἢ τοσαυταχῶς ἂν γένοιτο, καὶ πάλιν ὅτι οὐκ ἂν γένοιτο. Ἡ δὲ τοιαύτη πρόγνωσις ἱκανὴν ἀφορμὴν συμβάλλεται πρὸς τὰς ζητήσεις· καὶ πρὸς τὰς ἀναλύσεις δὲ τῶν διορισμῶν εὔχρηστα τὰ θεωρήματά ἐστι ταῦτα.

Χωρὶς δὲ τῆς τοιαύτης εὐχρηστίας καὶ δι᾽ αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις ἄξια ἔσται ἀποδοχῆς· καὶ γὰρ ἄλλα πολλὰ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι διὰ τοῦτο καὶ οὐ δι᾽ ἄλλο τι ἀποδεχόμεθα.

– α΄ – Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ τῇ τομῇ προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτεται, ἡ δὲ τέμνει κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον ὅλη ἡ τέμνουσα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς γραμμῆς, τοῦτον τμηθῇ ἡ ἐντὸς ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὥστε τὰς ὁμολόγους εὐθείας πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς γραμμῆς.

3 ἐκ Halley : ὑπὸ V ‖ ὑπὸ Halley : ἐκ V ‖ 10 διορισμῶν Halley : ὁρισμῶν V ‖ 14 α΄ V^5 Ψ : om. V ‖ 16 ἐφάπτεται Ψ : ἐφάπτηται V ‖ δύο] β΄ V ‖ 18 τοῦτον V : εἰς τοῦτον Halley ‖ 22 ἐφάψεται Ψ : ἐφάπτεται V.

Le traitement de ces questions donne des instruments utiles à la construction des problèmes et aux diorismes. Nicotélès, en raison de son différend avec Conon, dit que rien des découvertes de Conon n'a la moindre utilité pour les diorismes, mais il a tort. En effet, si, en règle générale, sans ces théorèmes, il est possible de découvrir les diorismes, grâce à eux, en revanche, il est plus facile de comprendre certains phénomènes, par exemple que le problème est résoluble de plusieurs manières ou d'un nombre donné de manières, ou encore qu'il n'est pas résoluble. Des connaissances préalables de ce genre contribuent de manière appréciable aux recherches, sans compter que ces théorèmes sont particulièrement utiles pour l'analyse des diorismes.

Outre l'utilité dont je viens de parler, ils méritent d'être en faveur pour leurs démonstrations mêmes ; en effet, c'est grâce à cela et à rien d'autre que nous tenons en estime une foule de théories mathématiques.

– 1 – *Si un certain point est pris à l'extérieur d'une section de cône*[6] *ou d'une circonférence de cercle, que, de ce point tombent sur la section, deux droites, dont l'une est une tangente, l'autre la coupe en deux points, que le rapport que la sécante entière a avec la droite découpée à l'extérieur entre le point et la ligne*[7] *est identique au rapport selon lequel la droite découpée à l'intérieur est coupée, de manière à ce que les droites homologues soient appliquées à un même point*[8]*, la droite menée du point de contact au point de division*[9] *rencontrera la ligne, et la droite menée du point de rencontre au point extérieur sera tangente à la ligne.*

[6] Voir Note complémentaire [6].

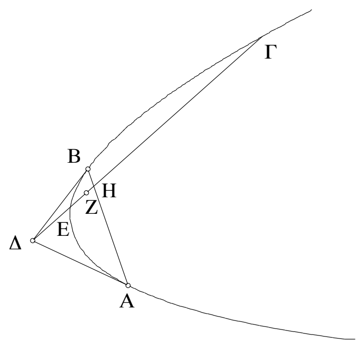
[7] Sur l'emploi de γραμμή, voir Note complémentaire [7].

[8] Dans la proportion ΓΖ : ΖΕ = ΓΔ : ΔΕ, les droites homologues ΓΖ et ΓΔ sont appliquées au même point Γ, et les droites homologues ΖΕ et ΔΕ sont appliquées au même point Ε.

[9] Voir Note complémentaire [8].

Ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, ἡ δὲ ΔΕΓ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ Ε, Γ, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.

Λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη συμπίπτει τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΓ τέμνει τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, οὐκ ἔσται διάμετρος αὐτῆς. Δυνατὸν ἄρα ἐστὶ διὰ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν, ὥστε καὶ ἐφαπτομένην· ἤχθω [γὰρ] ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΕΓ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ κατὰ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΔΑ, καὶ ἐπὶ τὰς ἁφάς ἐστιν ἡ ΒΑ, καὶ διῆκται ἡ ΓΔ τέμνουσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ τὰ Γ, Ε, τὴν δὲ ΑΒ κατὰ τὸ Η, ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. Οὐκ ἄρα ἡ ΒΑ καθ᾽ ἕτερον σημεῖον τέμνει τὴν ΓΕ· κατὰ τὸ Ζ ἄρα.

1 ἢ Ψ : ἡ V ‖ 9 ἐφαπτομένην c Ψ : -μένη V ut vid. ‖ γὰρ delevi vide adn. ‖ 13 τὰ Ψ : τὸ V ‖ Γ, Ε] ΓΕ V ut semper ‖ 14 ΗΕ Canon. : ΗΒ V.

Soit une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒΓ ; que soit pris un certain point Δ à l'extérieur ; que, de Δ, soit menée une droite ΔΒ tangente en un point Β ; que la droite ΔΕΓ coupe la section en des points Ε et Γ, et que ΓΖ ait[10] avec ΖΕ le rapport que ΓΔ a avec ΔΕ.

Je dis que la droite menée de Β jusqu'à Ζ rencontre la section, et que la droite menée du point de rencontre jusqu'à Δ est tangente à la section.

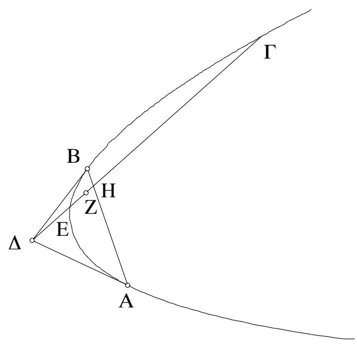


Fig. 1

Dès lors, puisque ΔΓ coupe la section en deux points, elle n'en sera pas le diamètre. Il est donc possible de mener un diamètre par Δ, et donc aussi une tangente[11] ; que soit menée[12] de Δ une tangente ΔΑ à la section ; que soit menée une droite de jonction ΒΑ et qu'elle coupe ΕΓ, non pas en un point Ζ, si possible, mais en un point Η.

Dès lors, puisque ΒΔ et ΔΑ sont des tangentes, que ΒΑ joint les points de contact[13], qu'est menée une droite ΓΔ coupant la section en des points Γ et Ε et ΑΒ en un point Η, ΓΗ sera à ΗΕ comme ΓΔ est à ΔΕ[14], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΓΖ est à ΖΕ comme ΓΔ est à ΔΕ. ΒΑ ne coupe donc pas ΓΕ en un autre point ; elle la coupe donc en Ζ[15].

[10] Sur l'emploi de l'impératif ἐχέτω dans le Livre IV, voir Note complémentaire [9].

[11] Voir Note complémentaire [10].

[12] Voir Note complémentaire [11].

[13] On attend ἐπεζευγμένη <ἐστὶν> au lieu du seul verbe « être ».

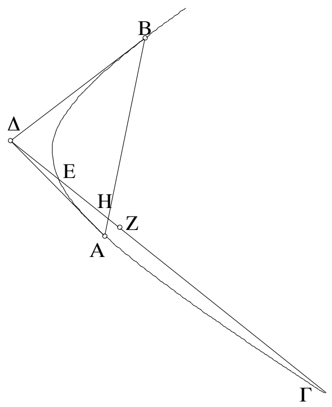
[14] III.37.

[15] On attend une *conclusion* qui exprime le résultat cherché formulé dans le *diorisme* ; on note la même absence dans les propositions qui suivent.

– β′ – Ταῦτα μὲν κοινῶς ἐπὶ πασῶν τῶν τομῶν δείκνυται, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνης.

Ἐὰν ἡ μὲν ΔΒ ἐφάπτηται, ἡ δὲ ΔΓ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Γ, τὰ δὲ Ε, Γ περιέχῃ τὴν κατὰ τὸ Β ἁφήν, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, ὁμοίως ἡ ἀπόδειξις γενήσεται· δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἄλλην ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΑ καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ἀποδείξεως ὁμοίως ποιεῖν.

– γ′ – Τῶν αὐτῶν ὄντων τὰ Ε, Γ σημεῖα μὴ περιεχέτωσαν τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν μεταξὺ αὐτῶν, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ἔστω τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας.



Δυνατὸν ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τὴν ΔΑ καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως ἀποδεικνύειν.

1 β′ Ψ : om. V ‖ 4 τὴν Ψ : om. V ‖ 9 γ′ Ψ : hoc loco non habet novam prop. V ‖ 10 αὐτῶν] αὑτῶν V ‖ καὶ Ψ : om. V ‖ ἔστω Ψ : ἔσται V.

– 2 – La démonstration de tout cela est commune à toutes les sections, mais voici dans le cas de la seule hyperbole :

Si ΔΒ est tangente, que ΔΓ est sécante en deux points Ε et Γ, que les points Ε et Γ entourent le contact en Β[16], que le point Δ est à l'intérieur de l'angle des asymptotes, la démonstration[17] aura une allure similaire, car il est possible de mener de Δ une autre tangente ΔΑ[18] et de démontrer le reste pareillement.

– <3>[19] – Les mêmes hypothèses étant faites[20], que les points de rencontre Ε et Γ n'entourent pas le contact en Β et que le point Δ soit à l'intérieur de l'angle des asymptotes.

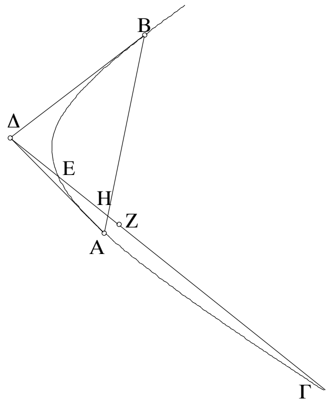


Fig. 3

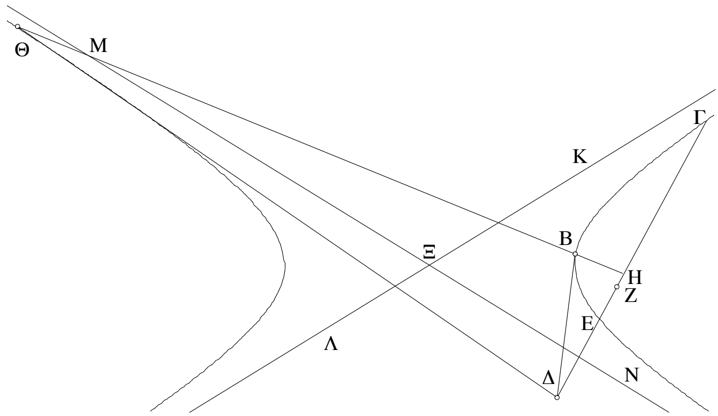
Il est donc possible de mener de Δ une autre tangente ΔΑ[21] et de démontrer le reste pareillement.

[16] L'emploi de ἁφή en ce sens ne figure que dans le Livre IV (prop. 2, 3 et 4).
[17] Voir Note complémentaire [12].
[18] II.49.
[19] Il n'y a pas de changement de proposition dans **V**.
[20] Voir Note complémentaire [13].
[21] II.49.

– δʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν αἱ μὲν Ε, Γ συμπτώσεις τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν περιέχωσιν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ᾖ ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Β, Θ καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΛ, ΜΞΝ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ὑπὸ ΛΞΝ γωνίᾳ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐφαπτέσθω μὲν ἡ ΔΒ, τεμνέτω δὲ ἡ ΔΓ, καὶ αἱ Ε, Γ συμπτώσεις περιεχέτωσαν τὴν Β ἁφήν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.

Δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ Θ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.

1 δʹ Ψ : γʹ V (sed litt. om.) ‖ 4 συμπεσεῖται c v Ψ : συμπεσῆται V.

– 4 [3V] – *Les mêmes hypothèses étant faites, si les points de rencontre* Ε et Γ *entourent le contact en Β et que le point Δ est dans l'angle adjacent à l'angle compris par les asymptotes*[22]*, la droite menée du point de contact au point de division rencontrera l'opposée, et la droite menée du point de rencontre sera tangente à l'opposée*.

Soient des opposées Β et Θ et des asymptotes ΚΛ et ΜΞΝ ; que le point Δ soit[23] dans l'angle ΛΞΝ ; que, de ce point, soit menée une tangente ΔΒ et une sécante ΔΓ ; que les points de rencontre Ε et Γ entourent le contact Β[24] et que ΓΖ ait avec ΖΕ le rapport de ΓΔ à ΔΕ.

Il faut démontrer que[25] la droite de jonction menée de Β jusqu'à Ζ rencontrera la section Θ, et que la droite menée du point de rencontre au point Δ sera tangente à la section.

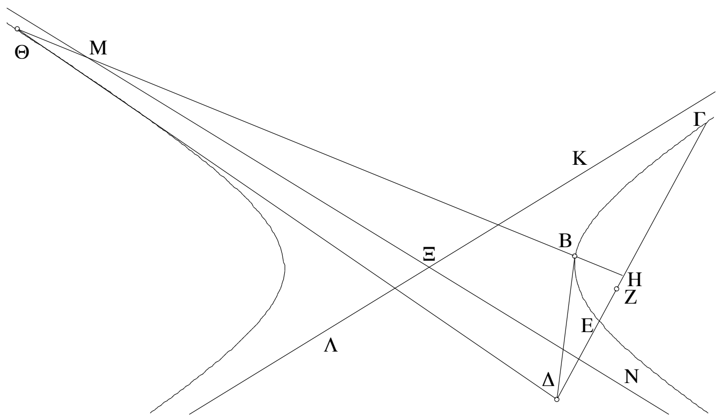


Fig. 4

Que soit menée de Δ une tangente ΔΘ à la section ; que soit menée une droite de jonction ΘΒ, et qu'elle tombe, si possible, non par Ζ, mais par Η. ΓΗ est donc à ΗΕ comme ΓΔ est à ΔΕ[26], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΓΖ est à ΖΕ comme ΓΔ est à ΔΕ.

[22] Voir Note complémentaire [14].

[23] Ici le verbe sous-entendu ἔστω n'a plus le sens existentiel du verbe ἔστωσαν qui ouvre l'*ecthèse*. On retrouve ce tour peu correct dans les prop. 16, 17, 18, 21, 23.

[24] On voit comment on passe de « contact » à « point de contact ».

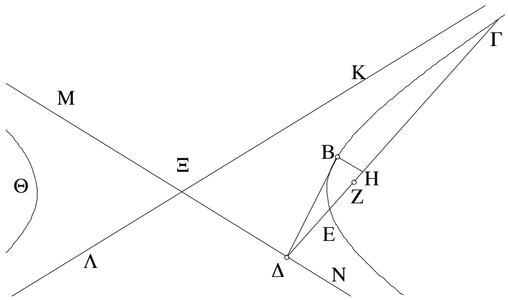
[25] Sur le tour δεικτέον ὅτι, voir Note complémentaire [14] au Livre III. Les autres occurrences du Livre IV sont dans les prop. 5, 12,15.

[26] III.37.

– ε′ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ αὐτῇ ἀσυμπτώτῳ.

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΜΝ.

Δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΜΝ παράλληλος ἀγομένη ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται.



Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ ΒΗ· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἀδύνατον.

– ϛ′ – Ἐὰν ὑπερβολῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τομὴν διαχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτεται, ἡ δὲ παράλληλός ἐστι μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ἀπὸ τῆς παραλλήλου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου ἴση ἐπ' εὐθείας ἐντὸς τῆς τομῆς τεθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἔστω πρότερον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΒΔ ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΔΕΖ παράλληλος ἔστω τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ.

Λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

1 ε′ Ψ : δ′ V (sed litt. om.) ‖ 1-2 τῶν ἀ[συμπτώτων c v Ψ : iter. V in extr. et pr. pag. ‖ 9 ΗΕ Ψ : ΓΕ V ‖ 10 ϛ′ Ψ : ε′ V (sed litt. om.) ‖ 11 δύο] β′ V ‖ 12 ἐστι ego : ᾖ V.

– 5 [4V] – *Les mêmes hypothèses étant faites, si le point Δ est sur l'une des asymptotes, la droite menée de B à Z sera parallèle à la même asymptote.*

Que les hypothèses soient les mêmes, et que le point Δ soit sur l'asymptote MN.

Il faut démontrer que la parallèle à MN menée de B tombera sur Z.

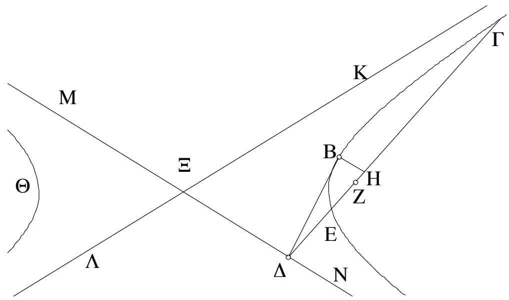


Fig. 5

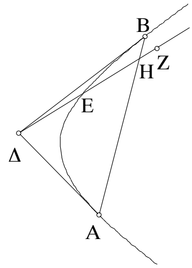
Qu'elle ne tombe pas sur Z, mais, si c'est possible, soit BH ; ΓH sera alors à HE comme ΓΔ est à ΔE[27], ce qui est impossible.

– 6 [5V] – *Si un certain point est pris à l'extérieur d'une hyperbole, que, de ce point, sont menées deux droites jusqu'à la section, dont l'une est une tangente et l'autre une parallèle à l'une des asymptotes, qu'est placée à l'intérieur de la section, dans le prolongement de la parallèle, une droite égale à la droite découpée sur la parallèle entre la section et le point, la droite menée du point de contact au point obtenu rencontrera la section, et la droite menée du point de rencontre au point extérieur sera tangente à la section.*

Soit une hyperbole AEB ; que soit pris un certain point Δ à l'extérieur ; que Δ soit d'abord à l'intérieur de l'angle compris par les asymptotes ; que, de ce point, soit menée une tangente BΔ ; que ΔEZ soit parallèle à l'une des asymptotes, et que soit placée EZ égale à ΔE.

Je dis que la droite de jonction menée de B à Z rencontrera la section, et que la droite menée du point de rencontre au point Δ sera tangente à la section.

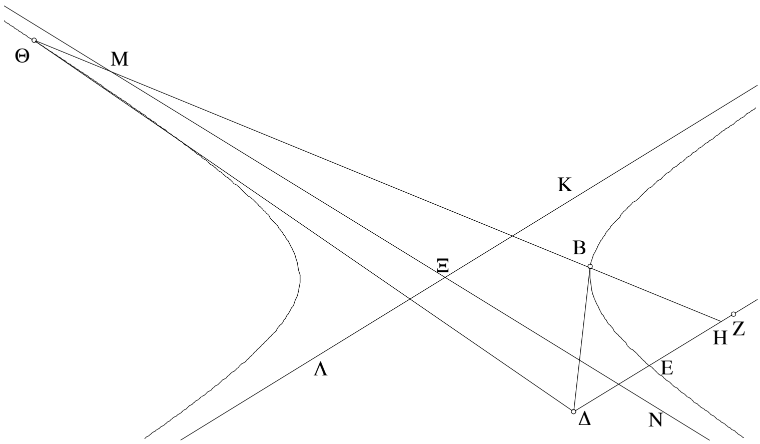
[27] III.35.



Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΔΕ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ καθ' ἕτερόν τι τὸ Η· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.

– ζʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης.

Λέγω ὅτι καὶ οὕτω τὰ αὐτὰ συμβήσεται.



5 ζʹ Ψ : ϛʹ V (sed litt. om.).

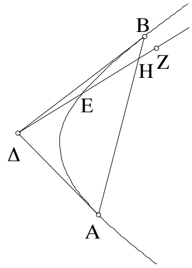


Fig. 6

Que soit menée une tangente ΔA à la section ; que soit menée une droite de jonction BA et qu'elle coupe ΔE, si possible, non pas en Z, mais en un autre point H ; ΔE sera alors égale à EH[28], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΔE est égale à EZ.

– 7 [6V] – Les mêmes hypothèses étant faites, que le point Δ soit dans l'angle adjacent à l'angle compris par les asymptotes.

Je dis que, là encore, on aura les mêmes propriétés[29].

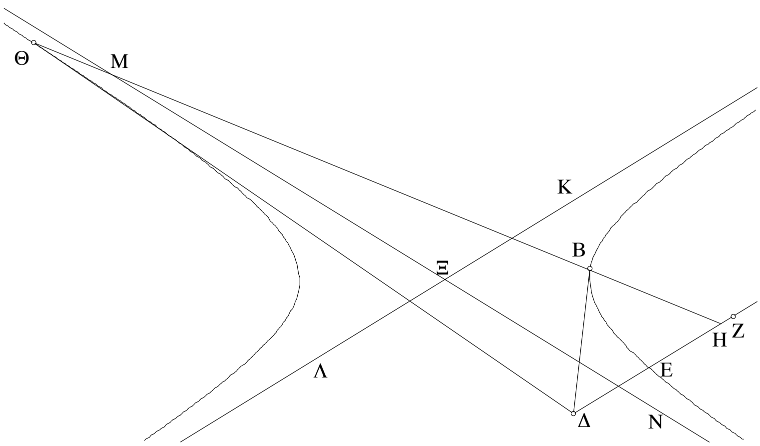


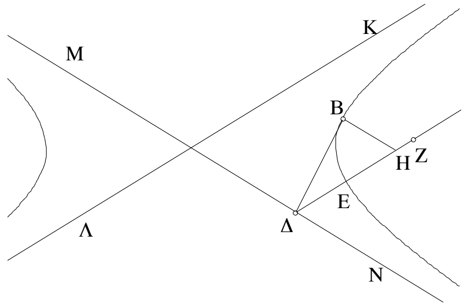
Fig. 7

[28] III.30.

[29] Le choix d'une rédaction abrégée du *diorisme* est abusif ici, puisque ΘΔ n'est pas tangente à la même branche de l'hyperbole.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.

– η′ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω τὰ αὐτά.



Λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπ᾽ ἄκραν τὴν ἀποληφθεῖσαν ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον.

Ἔστω γὰρ τὰ εἰρημένα, καὶ κείσθω τῃ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΜΝ ἤχθω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΗ. Ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.

– θ′ – Ἐὰν ἀπὸ τοῦ ἐκτὸς σημείου δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσι τέμνουσαι κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ ὅλαι πρὸς τὰς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένας, οὕτως αἱ ἐντὸς

4 η′ Ψ : ζ′ V (sed litt. om.) || 7 ἐστι Ψ : ἔσται V || θ′ Ψ : η′ V (sed litt. om.) || 11 ἐκτὸς ego : αὐτοῦ V || δύο] β′ V || 12 δύο] β′ V.

Que soit menée une tangente ΔΘ[30] ; que soit menée une droite de jonction ΘB et qu'elle passe, si possible, non pas par Z, mais par H. ΔE est donc égale à EH[31], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΔE est égale à EZ.

– 8 [7V] – Les mêmes hypothèses étant faites, que le point Δ soit sur l'une des asymptotes, et que le reste soit le même.

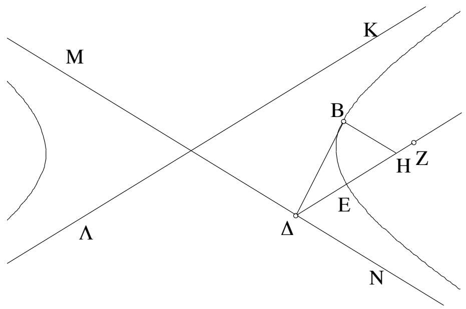


Fig. 8

Je dis que la droite menée du point de contact jusqu'à l'extrémité de la droite découpée[32] sera parallèle à l'asymptote sur laquelle se trouve le point Δ.

Soient les constructions en question ; que soit placée une droite EZ égale à ΔE ; que, de B, soit menée, si possible, une parallèle BH à MN. ΔE sera donc égale à EH[33], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΔE est égale à EZ.

– 9 [8V] – *Si, d'un point extérieur, sont menées deux droites coupant chacune une section de cône ou une circonférence de cercle en deux points, et que les droites découpées à l'intérieur sont divisées dans un rapport identique à celui des droites entières aux droites découpées à l'extérieur,*

[30] Cet appel à la figure est la marque d'une rédaction négligée.

[31] III.31.

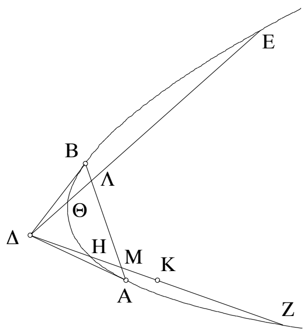
[32] La forme de participe aoriste ἀποληφθεῖσα ne se trouve pas chez Euclide et constitue un *hapax* dans les *Coniques*, alors qu'elle appartient au vocabulaire d'Archimède.

[33] III.34

ἀπολαμβανόμεναι διαιρεθῶσιν, ὥστε τὰς ὁμολόγους πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγόμεναι ἐφάψονται τῆς γραμμῆς.

Ἔστω γὰρ τῶν προειρημένων γραμμῶν τις ἡ ΑΒ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν γραμμήν, ἡ μὲν κατὰ τὰ Θ, Ε, ἡ δὲ κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΔΕ πρὸς ΘΔ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΕΛ πρὸς ΛΘ, ὃν δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ.

Λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται ἐφ' ἑκάτερα τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς.



Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΕΔ, ΖΔ ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα τέμνουσι τὴν τομήν, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ὥστε καὶ ἐφαπτομένας ἐφ' ἑκάτερα· ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΒ, ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Λ, Κ, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἢ δι' οὐδετέρου.

5 γραμμῆς V^1 : τομῆς V ‖ 11 Κ Ψ : ΚΕ V ‖ 14 τέμνουσι Halley : τέμνει V.

de sorte que les droites homologues soient appliquées au même point, la droite menée par les points de division rencontrera la section en deux points, et les droites menées des points de rencontre jusqu'au point extérieur seront tangentes à la ligne.

Soit une certaine ligne ΑΒ parmi les lignes susdites[34] ; que, d'un point Δ soient menées des droites ΔΕ et ΔΖ coupant la ligne, l'une en des points Θ et Ε, l'autre en des points Ζ et Η ; que ΕΛ ait avec ΛΘ le rapport que ΔΕ a avec ΘΔ, et que ΖΚ ait avec ΚΗ le rapport que ΔΖ a avec ΔΗ.

Je dis que la droite qui joint les points Λ et Κ rencontrera la section de chaque côté, et que les droites qui joignent les points de rencontre et le point Δ seront tangentes à la section.

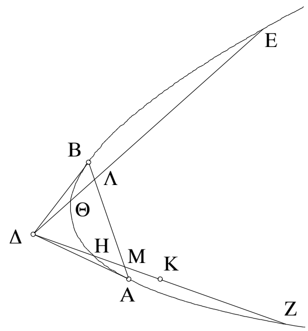


Fig. 9

Puisque les droites ΕΔ et ΖΔ coupent chacune la section en deux points, il est possible de mener de Δ un diamètre de la section, et par conséquent des tangentes de chaque côté[35] ; que soient menées des tangentes ΔΒ et ΔΑ, que soit menée une droite de jonction ΒΑ et que, si possible, elle ne passe pas par Λ et Κ, mais ou bien par un l'un d'eux, ou bien par aucun.

[34] Ce tour était déjà présent dans l'*ecthèse* de III.42 ; on le retrouve dans les propositions 26 et 27. Il est absent des Livres I et II.

[35] Voir Note complémentaire [10].

Ἐρχέσθω πρότερον διὰ μόνου τοῦ Λ καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Μ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΜ πρὸς ΜΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΚ πρὸς ΚΗ.

Ἐὰν δὲ ἡ ΒΑ μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Λ, Κ πορεύηται, ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΔΕ, ΔΖ συμβήσεται τὸ ἄτοπον.

– ι′ – Ταῦτα μὲν κοινῶς, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνης· ἐὰν τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ, αἱ δὲ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, τὰ αὐτὰ συμβήσεται τοῖς προειρημένοις, ὡς προείρηται ἐν τῷ β′ θεωρήματι.

– ια′ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν αἱ τῆς μιᾶς συμπτώσεις μὴ περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἡ καταγραφὴ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ τῷ θ′.

– ιβ′ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν περιέχωσιν αἱ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις τὰς τῆς ἑτέρας, καὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης ᾖ, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

4 Λ Ψ : Α V ‖ 5 ΔΖ Ψ : ΕΖ V ‖ 6 ι′ Ψ : θ′ V (sed litt. om.) ‖ 11 ια′ Ψ : ι′ V (sed litt. om.) ‖ 12 δὲ Halley : μὲν V ‖ ᾖ Halley : ἔσται V ‖ 15 ιβ′ Ψ : ια′ V (sed litt. om.) ‖ 18 διαιρέσεων Ψ : αἱρέσεων V.

Qu'elle passe d'abord par le seul point Λ et qu'elle coupe ZH en un point M. ZM est donc à MH comme ZΔ est à ΔH[36], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ZK est à KH comme ZΔ est à ΔH.

Mais si BA ne passe[37] par aucun des points Λ et K, l'absurdité se produira dans le cas de chacune des droites ΔE et ΔZ.

– 10 [9V] – Ces propriétés sont communes à toutes les sections, mais voici pour la seule hyperbole.

Toutes choses égales d'ailleurs, si les points de rencontre de l'une des droites entourent ceux de l'autre, et que le point Δ est à l'intérieur de l'angle compris par les asymptotes, on aura les mêmes propriétés que précédemment, dans la proposition 2[38].

– 11 [10V] – Les mêmes hypothèses étant faites, si les points de rencontre de l'une des droites n'entourent pas ceux de l'autre, et que le point Δ est à l'intérieur de l'angle des asymptotes, et la figure et la démonstration seront les mêmes qu'à la proposition 9.

– 12 [11V] – *Les mêmes hypothèses étant faites, si les points de rencontre de l'une des droites entourent ceux de l'autre, et que le point pris est dans l'angle adjacent à l'angle compris par les asymptotes, la droite menée par les points de division, si elle est prolongée, rencontrera la section opposée, et les droites menées des points de rencontre jusqu'au point Δ seront tangentes aux opposées.*

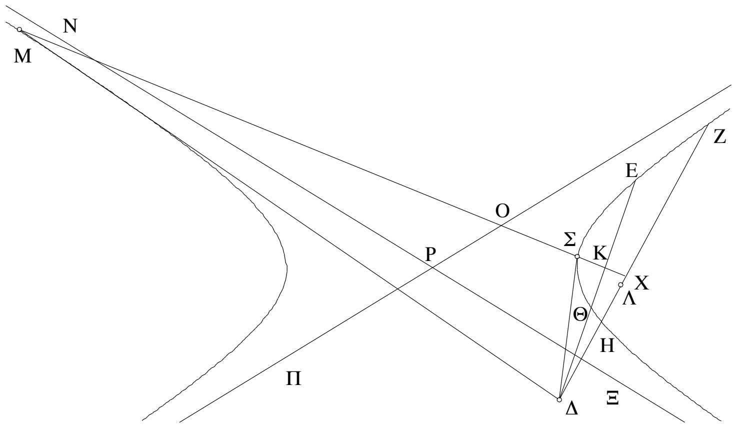
[36] III.37

[37] Le verbe πορεύεσθαι est un *hapax* dans le traité des *Coniques*, qui fait usage du verbe ἔρχεσθαι. Il fait partie, en revanche, du vocabulaire d'Archimède.

[38] Sur les références numériques des propositions 10-11, voir Note complémentaire [15].

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΕΗ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ κέντρον τὸ Ρ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ὑπὸ ΞΡΠ γωνίᾳ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν ὑπερβολὴν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ περιεχέσθω τὰ Ε, Θ ὑπὸ τῶν Ζ, Η, καὶ ἔστω ὡς μὲν ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ.

Δεικτέον ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Λ συμπεσεῖταί τε τῇ ΕΖ τομῇ καὶ τῇ ἀντικειμένῃ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.



Ἔστω δὴ ἀντικειμένη ἡ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΜ, ΔΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΣ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Λ, ἀλλ᾽ ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἢ δι᾽ οὐδετέρου.

Ἐρχέσθω πρότερον διὰ τοῦ Κ καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Χ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΧΖ πρὸς ΧΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ.

Ἐὰν δὲ μηδὲ δι᾽ ἑτέρου τῶν Κ, Λ ἔρχηται ἡ ΜΣ, ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΕΔ, ΔΖ τὸ ἀδύνατον συμβαίνει.

– ιγʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ᾖ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

3 τέμνουσαι c v Ψ : iter. V ‖ δύο] βʹ V ‖ 9 δὴ edd. : δὲ V ‖ 15 ΖΔ Canon. : ΕΔ V ‖ ΖΛ Ψ : ΕΛ V ‖ ΛΗ Ψ : ΔΗ V ‖ 17 συμβαίνει V : συμβήσεται Ψ ‖ 18 ιγʹ Ψ : ιβʹ V (sed litt. om.).

Soit une hyperbole ΕΗ, d'asymptotes ΝΞ et ΟΠ et de centre Ρ ; que le point Δ soit dans l'angle ΞΡΠ ; que soient menées des droites ΔΕ et ΔΖ coupant chacune l'hyperbole en deux points ; que les points Ε et Θ soient entourés par les points Ζ et Η, que ΖΛ soit à ΛΗ comme ΕΔ est à ΔΘ, ΕΚ est à ΚΘ et ΖΔ est à ΔΗ.

Il faut démontrer que la droite passant par Κ et Λ rencontrera ΕΖ et l'opposée et que les droites menées des points de rencontre au point Δ seront tangentes aux sections.

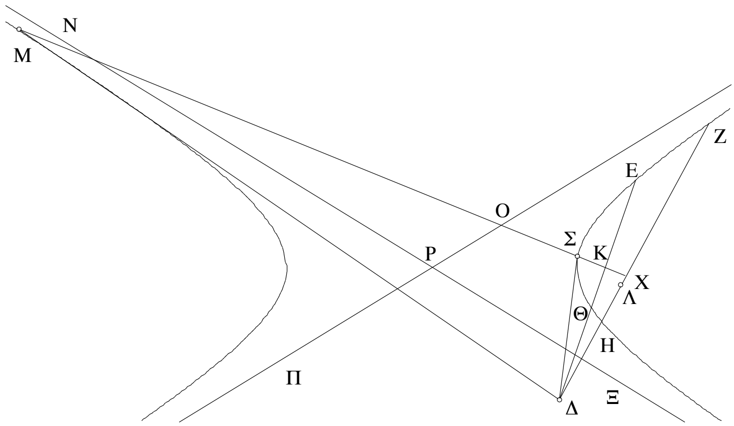


Fig. 12

Soit une opposée Μ ; que, de Δ, soient menées des tangentes ΔΜ et ΔΣ aux sections ; que soit menée une droite de jonction ΜΣ, et que, si possible, elle ne passe pas par les point Κ et Λ, mais ou bien par l'un d'eux ou par aucun d'eux.

Qu'elle passe d'abord par Κ et qu'elle coupe ΖΗ en un point Χ. ΧΖ est donc à ΧΗ comme ΖΔ est à ΔΗ[39], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΖΔ est à ΔΗ comme ΖΛ est à ΛΗ.

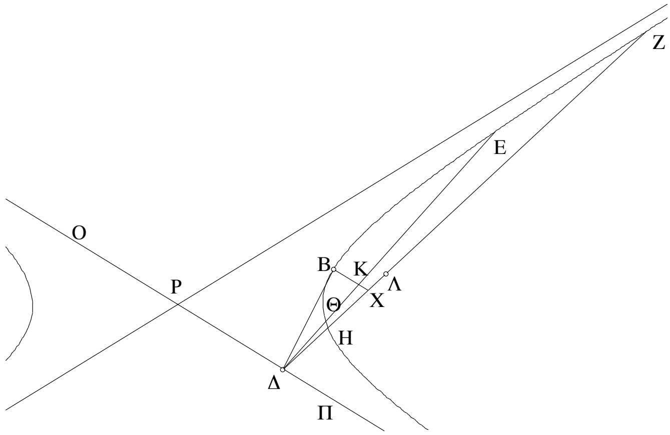
Mais si ΜΣ ne passe par aucun des points Κ et Λ, l'absurdité se produit dans le cas de chacune des droites ΕΔ et ΔΖ.

– 13 [12V] – *Les mêmes hypothèses étant faites, si le point Δ est sur l'une des asymptotes, et si toutes choses sont égales d'ailleurs, la droite passant par les points de division sera parallèle à l'asymptote sur laquelle est le point, son prolongement rencontrera la section, et la droite menée du point de rencontre au point sera tangente à la section.*

[39] III.37

Ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ καὶ ἀσύμπτωτοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τὸ Δ, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι καὶ διῃρήσθωσαν ὡς εἴρηται, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΒ.

Λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν Κ, Λ.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται ἢ δι᾽ οὐδετέρου.

Ἐρχέσθω διὰ μόνου τοῦ Κ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΖΧ πρὸς ΧΗ, ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀγομένη διὰ μόνου τοῦ Κ ἐλεύσεται· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα.

– ιδʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἡ δὲ ΔΗ κατὰ μόνον τὸ Η παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμτώτων, καὶ γένηται ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, τῇ δὲ ΔΗ ἴση ἐπ᾽ εὐθείας τεθῇ ἡ ΗΛ, ἡ διὰ τῶν Κ, Λ σημείων ἀγομένη παράλληλός τε ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

2 διῃρήσθωσαν Ψ : διῃρήσθω V ‖ 7 πρὸς ΧΗ Ψ : om. V ‖ 8 Κ Mont. : Β V ‖ 10 ιδʹ Ψ : ιγʹ V (sed litt. om.).

Soit une hyperbole avec ses asymptotes ; que soit pris sur l'une des asymptotes un point Δ ; que soit menées les droites et qu'elles soient divisées comme on l'a dit, et que soit menée de Δ une tangente ΔB à la section.

Je dis que la droite menée de B parallèlement à ΠO passera par K et Λ.

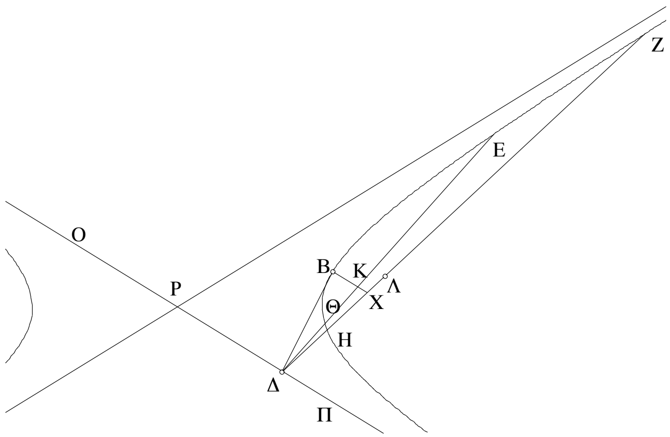


Fig. 13

Si ce n'est pas le cas, elle passera ou bien par l'un d'eux ou bien par aucun d'eux.

Qu'elle passe par le seul point K. ZX est donc à XH comme ZΔ est à ΔH[40], ce qui est absurde.

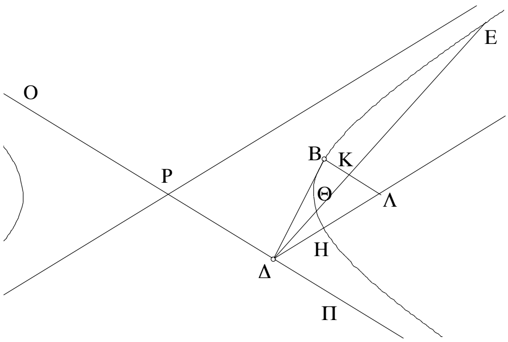
La droite menée de B parallèlement à ΠO ne passera donc pas par le seul point K ; elle passera donc par tous les deux[41].

– 14 [13V] – *Les mêmes hypothèses étant faites, si le point Δ est sur l'une des asymptotes, que ΔE coupe la section en deux points, que ΔH la coupe en un point H seulement, et est parallèle à l'autre asymptote, que EK est à KΘ comme ΔE est à ΔΘ, qu'est placée une droite HΛ égale à ΔH dans son prolongement, la droite menée par les points K et Λ sera parallèle à l'asymptote et rencontrera la section, et la droite menée du point de rencontre à Δ sera tangente à la section.*

[40] III.35.

[41] Le texte est sévèrement abrégé. Il manque le traitement du cas mentionné plus haut, à savoir celui où la droite ne passe ni par K ni par Λ.

Ὁμοίως γὰρ τῷ προειρημένῳ ἀγαγὼν τὴν ΔΒ ἐφαπτομένην λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀσύμπτωτον ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν Κ, Λ σημείων.



Εἰ <μὲν> οὖν διὰ τοῦ Κ μόνου ἥξει, οὐκ ἔσται ἡ ΔΗ τῇ ΗΛ ἴση, ὅπερ ἄτοπον. Εἰ δὲ διὰ τοῦ Λ μόνου, οὐκ ἔσται ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ. Εἰ δὲ μήτε διὰ τοῦ Κ μήτε διὰ τοῦ Λ, κατ᾽ ἀμφότερα συμβήσεται τὸ ἄτοπον.

Δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα ἐλεύσεται.

– ιε´ – Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἡ μὲν ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ τέμνῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ ὡς ἔχει ἡ μεταξὺ τῆς ἑτέρας τομῆς ἧς οὐκ ἐφάπτεται ἡ εὐθεῖα καὶ τοῦ σημείου πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς, οὕτως ἔχῃ μείζων τις εὐθεῖα τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῆς κειμένην ἐπ᾽ εὐθείας τε καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ πέρατι τῇ ὁμολόγῳ, ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μείζονος εὐθείας ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν τὸ Δ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΖ διήχθω ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΑΔΒ τέμνουσα τὰς τομάς, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἐχέτω ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.

4 μὲν addidi || 9 ιε´ Ψ : ιδ´ V (sed litt. om.) || 13 ἔχῃ Halley : ἔχει V || 21 ΑΔΒ Ψ : ΑΒΔ V.

Menant[42] pareillement à ce qui a été dit la droite ΔΒ comme tangente, je dis que la droite menée de Β parallèlement à l'asymptote ΠΟ passera par Κ et Λ.

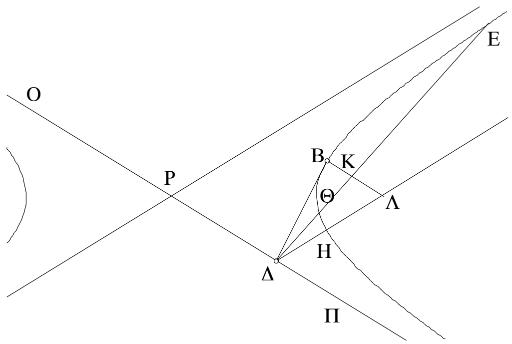


Fig. 14

Si elle passe d'abord par le seul point Κ, ΔΗ ne sera pas égale à ΗΛ[43], ce qui est absurde. Si elle passe par le seul point Λ, ΕΚ ne sera pas à ΚΘ comme ΕΔ est à ΔΘ[44]. Si elle ne passe ni par Κ ni par Λ, l'absurdité se produira dans les deux cas. Elle passera donc par les deux points.

– 15 [14V][45] – *Si, dans des opposées, est pris un certain point entre les deux sections, que, de ce point, sont menées une tangente à l'une des opposées et une droite qui coupe chacune des opposées, qu'une certaine droite plus grande que celle qui est découpée entre les sections est à l'excès sur elle placé dans son prolongement et du côté de la même extrémité que la droite homologue, comme la droite découpée entre la section qui n'a pas de tangente et le point est à la droite découpée entre le point et l'autre section, la droite menée de l'extrémité de la grande droite au point de contact rencontrera la section, et la droite menée du point de rencontre au point pris sera tangente à la section.*

Soient des opposées Α et Β ; que soit pris un point Δ entre les sections à l'intérieur de l'angle compris par les asymptotes ; que, de ce point, soient menées une tangente ΔΖ et une droite ΑΔΒ coupant les sections, et que ΑΓ ait avec ΓΒ le rapport que ΑΔ a avec ΔΒ.

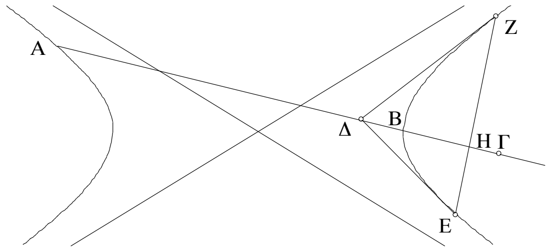
[42] Il n'existe pas d'autre exemple de cette rédaction cursive de l'*ecthèse* et du *diorisme* dans le texte grec des *Coniques*.

[43] III.34.

[44] III.35.

[45] Voir Note complémentaire [16].

Δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ σημεῖον ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας, δυνατόν ἐστι καὶ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Δ· ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΕ ἐρχέσθω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.

– ιϛʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω.

Λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης τομῆς.

9 ιϛʹ Ψ : ιεʹ V (sed litt. om.).

Il faut démontrer que le prolongement de la droite joignant les points Ζ et Γ[46] rencontrera la section et que la droite menée du point de rencontre jusqu'au point Δ sera tangente à la section.

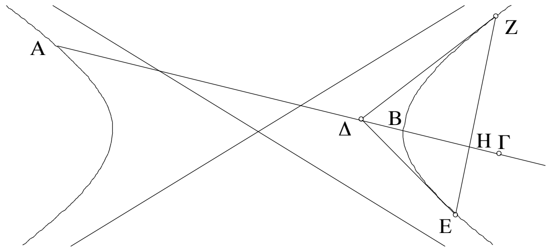


Fig. 15

Puisque le point Δ est à l'intérieur de l'angle qui comprend la section, il est possible de mener encore une autre tangente depuis Δ[47] ; que soit menée une tangente ΔΕ, et que la droite de jonction ΖΕ passe, si possible, non pas par Γ, mais par Η ; ΑΗ sera alors à ΗΒ comme ΑΔ est à ΔΒ[48], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, ΑΓ est à ΓΒ comme ΑΔ est à ΔΒ.

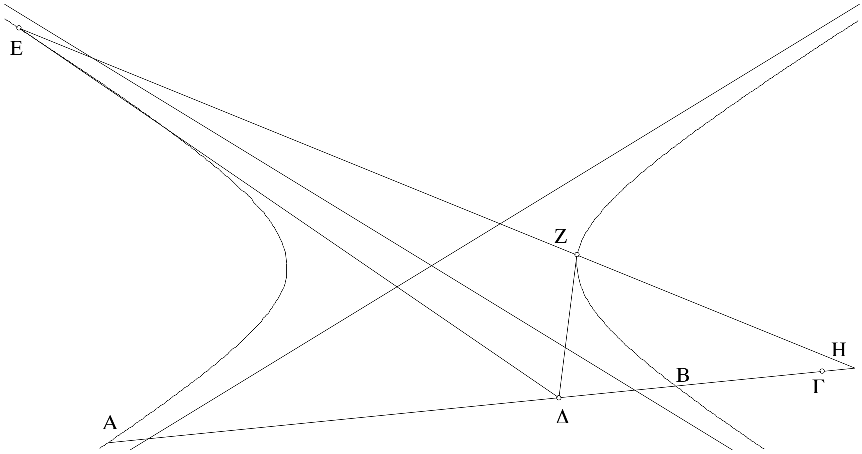
– 16 [15V] – Les mêmes hypothèses étant faites, que le point Δ soit dans l'angle adjacent à l'angle compris par les asymptotes, et que toutes choses soient égales d'ailleurs.

Je dis que le prolongement de la droite joignant les points Ζ et Γ rencontrera la section opposée, et que le prolongement de la droite menée du point de rencontre au point Δ sera tangente à la section opposée.

[46] La séquence ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβαλλομένη est très concise. On la retrouve dans la proposition 19. Le tour a déjà été rencontré en I.48, 50 et 51. Le *diorisme* de la prop. 16 fournit une occurrence de la séquence attendue.

[47] II.49.

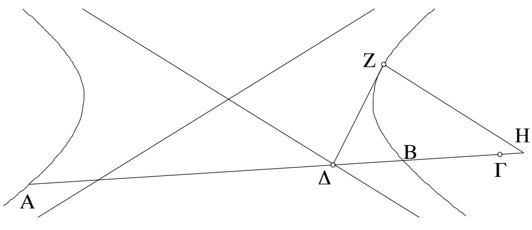
[48] III.37.



Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς Α τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἐκβαλλομένη, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ᾽ ἐπὶ τὸ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.

– ιζʹ – Τῶν αὐτῶν ὄντων ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος τῶν ἀσυμπτώτων.

Λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ σημεῖον.



4 ἐπὶ τὸ Γ V : an διὰ τοῦ Γ ? ‖ ἐπὶ τὸ Η V : an διὰ τοῦ Η ? ‖ 7 ιζʹ Ψ : ιςʹ V (sed litt. om.).

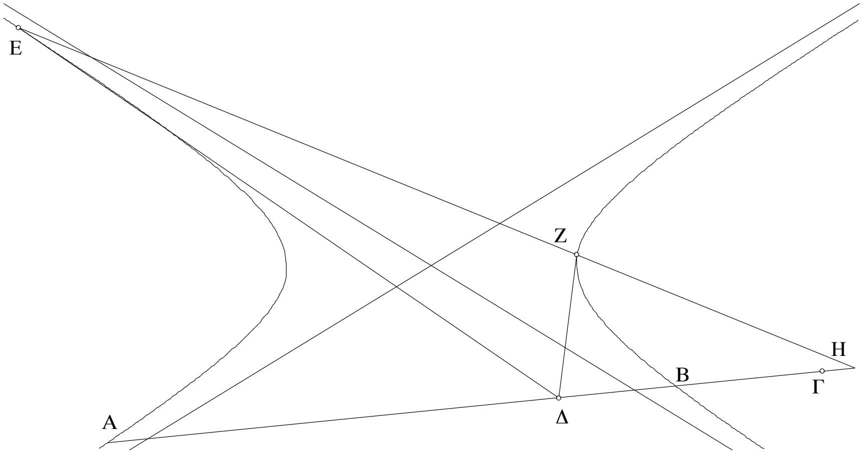


Fig. 16

Que les constructions soient les mêmes ; que le point Δ soit dans l'angle adjacent à l'angle compris par les asymptotes ; que soit menée de Δ une tangente ΔE à la section A, que soit menée une droite de jonction EZ, qu'elle soit prolongée et que, si possible, elle ne passe pas par Γ, mais par H ; AΔ sera alors à ΔB comme AH est à HB[49], ce qui est absurde, puisque, par hypothèse, AΓ est à ΓB comme AΔ est à ΔB.

– 17 [16V] – Les mêmes hypothèses étant faites, que le point Δ soit sur l'une des asymptotes.

Je dis que la droite menée de Z à Γ sera parallèle à l'asymptote sur laquelle est le point.

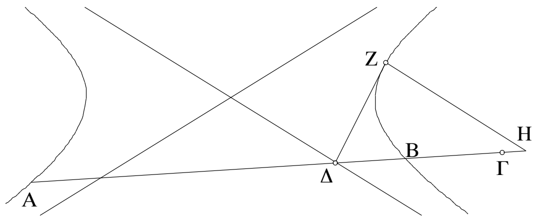


Fig. 17

[49] III.39.

Ἔστωσαν τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ παράλληλος, καὶ εἰ δυνατόν, μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ᾽ ἐπὶ τὸ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον.

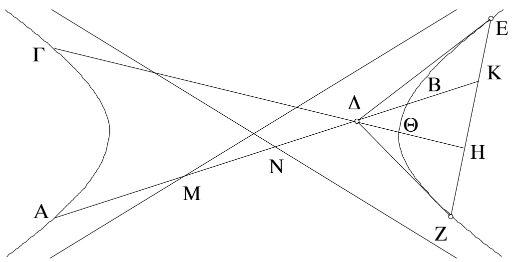
Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τὸ Γ πίπτει.

– ιη΄ – Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι διαχθῶσι τέμνουσαι ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ μεταξὺ τῆς μιᾶς τομῆς <καὶ τοῦ σημείου> πρὸς τὰς μεταξὺ τῆς ἑτέρας τομῆς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, οὕτως ἔχωσιν αἱ μείζους τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν, ἡ διὰ τῶν περάτων ἀγομένη εὐθεῖα τῶν μειζόνων εὐθειῶν ταῖς τομαῖς συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν γραμμῶν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν.

Πρότερον ὑποκείσθω ἐν τῇ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένῃ γωνίᾳ, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΑΔΒ, ΓΔΘ. Μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΔ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΔΘ, διότι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΝ τῇ ΑΜ. Καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἐχέτω ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἐχέτω ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ.

Λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται τῆς τομῆς.



6 ιη΄ Ψ : ιζ΄ V (sed litt. om.) || 8 καὶ τοῦ σημεῖου add. Federspiel[6] || 13 αἱ Halley : om. V || 22 αἱ Ψ : om. V || Δ Ψ : ΔΕ V.

Que les constructions soient les mêmes que précédemment ; que le point Δ soit sur l'une des asymptotes ; que soit menée par Z une parallèle et que, si possible, elle ne tombe pas sur Γ, mais sur H ; AH sera alors à HB comme AΔ est à ΔB[50], ce qui est absurde. La droite menée de Z parallèlement à l'asymptote passe donc par Γ.

– 18 [17V][51] – *Si, dans des oppposées, est pris un certain point entre les deux sections, que, de ce point, sont menées deux droites coupant chacune des sections, et que des droites plus grandes que les droites découpées entre les opposées sont à leurs excès comme les droites découpées entre l'une des sections <et le point> sont aux droites découpées entre l'autre section et le même point, la droite menée par les extrémités des grandes droites rencontrera les sections, et les droites menées des points de rencontre au point pris seront des tangentes aux lignes.*

Soient des opposées A et B, et que le point Δ soit entre les sections.

Que, par hypothèse, il soit d'abord dans l'angle compris par les asymptotes, et que, par Δ, soient menées des droites AΔB et ΓΔΘ. AΔ est donc plus grande que ΔB et ΓΔ plus grande que ΔΘ, puisque BN est égale à AM[52]. Que AK ait avec KB le rapport que AΔ a avec ΔB, et que ΓH ait avec HΘ le rapport que ΓΔ a avec ΔΘ.

Je dis que la droite passant par K et H rencontrera la section, et que les droites menées de Δ aux points de rencontre seront tangentes à la section.

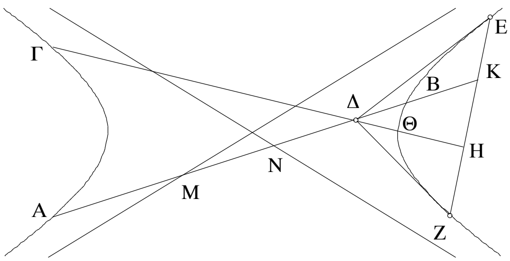


Fig. 18

[50] III. 36.

[51] Voir Note complémentaire [17].

[52] II.16.

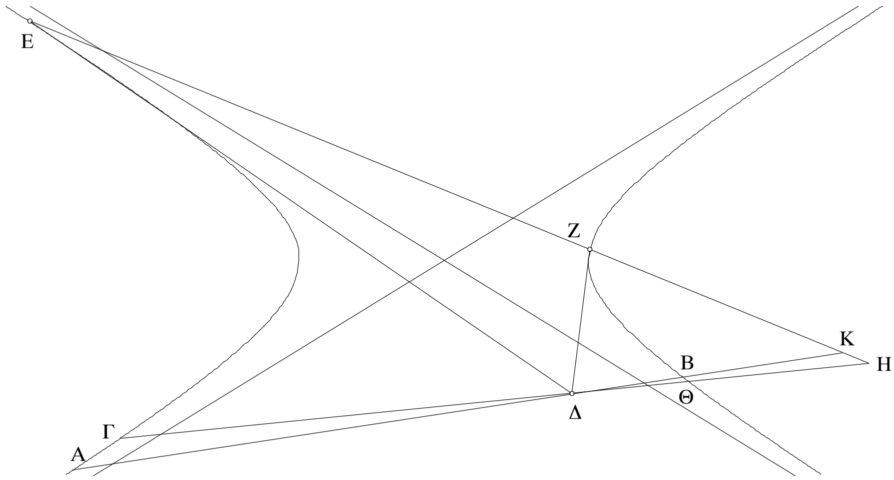
Ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ ἐντός ἐστι τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Δ δύο ἐφαπτομένας ἀγαγεῖν· ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ· ἐλεύσεται δὴ διὰ τῶν Κ, Η σημείων.

Εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται μόνου ἢ δι' οὐδετέρου.

Εἰ μὲν γὰρ δι' ἑνὸς αὐτῶν μόνου, ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσεται καθ' ἕτερον σημεῖον, ὅπερ ἀδύνατον· εἰ δὲ δι' οὐδετέρου, ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ ἀδύνατον συμβήσεται.

– ιθ′ – Εἰλήφθω δὴ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς τομάς, καὶ διῃρήσθωσαν ὡς εἴρηται.

Λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν αἱ ΔΕ, ΔΖ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Ε, Ζ διὰ τῶν Κ, Η ἐλεύσεται.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει, ἢ δι' οὐδετέρου, καὶ πάλιν ὁμοίως συναχθήσεται τὸ ἄτοπον.

7 γὰρ V : an οὖν ? ‖ 10 ιθ′ Ψ : ιη′ V (sed litt. om.) ‖ Δ Ψ : τέταρτον V.

Puisque le point Δ est à l'intérieur de l'angle compris par les asymptotes, il est possible de mener de Δ deux tangentes[53] ; que soient menées des droites ΔE et ΔZ, et que soit menée une droite de jonction EZ ; elle passera alors par les points K et H.

Si ce n'est pas le cas, elle passera ou bien par l'un d'eux seulement ou bien par aucun d'eux.

Si elle passe seulement par l'un d'eux, l'autre droite sera coupée dans le même rapport en un autre point[54], ce qui est impossible ; si elle ne passe par aucun d'eux, l'absurdité se produira dans les deux cas.

– 19 [18V] – Que le point Δ soit pris sur l'angle adjacent à l'angle compris par les asymptotes, que soient menées les droites coupant les sections et qu'elles soient divisées dans les rapports qu'on a dits.

Je dis que le prolongement de la droite passant par K et H rencontrera chacune des opposées, et que les droites menées des points de rencontre à Δ seront tangentes aux sections.

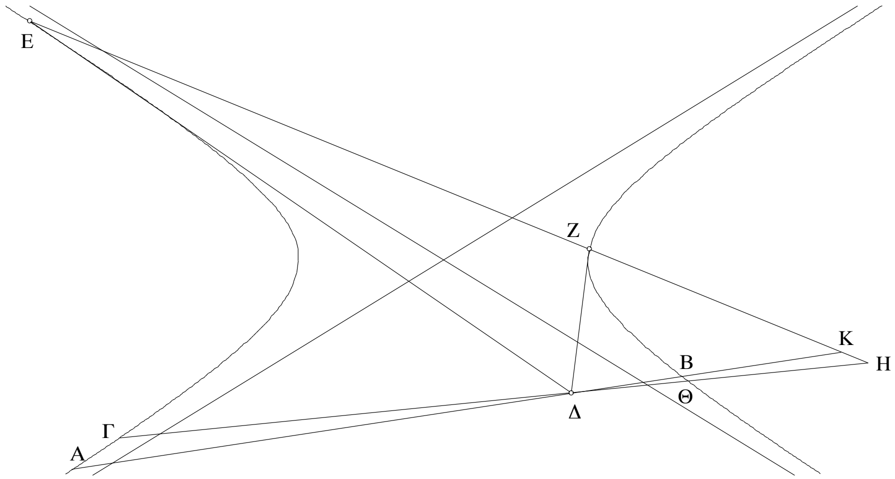


Fig. 19

Que soient menées de Δ des tangentes ΔE et ΔZ à chacune des sections ; la droite passant par E et Z passera donc par K et H.

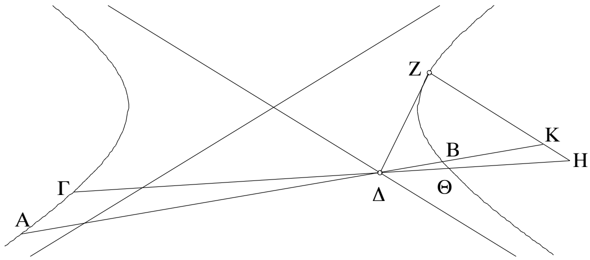
Sinon, elle passera par l'un d'eux ou par aucun d'eux, et l'on conclura de nouveau à la même absurdité[55].

[53] II.49.
[54] III.39.
[55] III.39.

– κʹ – Ἐὰν δὲ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά, ἡ διὰ τῶν περάτων τῶν ὑπεροχῶν ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν σύμπτωσιν τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῶν περάτων ἠγμένης εὐθείας ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω.

Λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.



Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ Δ ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η.

Εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει ἢ δι᾽ οὐδετέρου, καὶ τὰ αὐτὰ ἄτοπα συμβήσεται τοῖς πρότερον.

– καʹ – Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΒΚ τῇ τομῇ καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον συμβαλλέτω τὸ Β παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ δὲ ΓΔΘ ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν συμβαλλέτω, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἔστω ἡ ΒΚ.

1 κʹ Ψ : ιθʹ V (sed litt. om.) ‖ 14 καʹ Ψ : κʹ V (sed litt. om.) ‖ 16 συμβαλλέτω Ψ : συμβαλέτω V.

– 20 [19V] – *Si le point pris est sur l'une des asymptotes, et que toutes choses sont égales d'ailleurs, la droite menée par les extrémités des excès sera parallèle à l'asymptote sur laquelle se trouve le point, et la droite menée du point au point de rencontre de la section avec la droite menée par les extrémités sera tangente à la section.*

Soient des opposées Α et Β, et que le point Δ soit sur l'une des asymptotes, et que toutes choses soient égales d'ailleurs.

Je dis que la droite passant par Κ et Η rencontrera la section et que la droite menée du point de rencontre au point Δ sera tangente à la section.

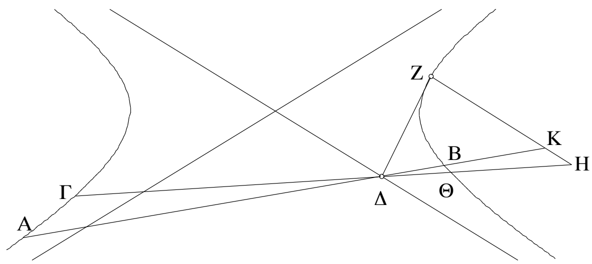


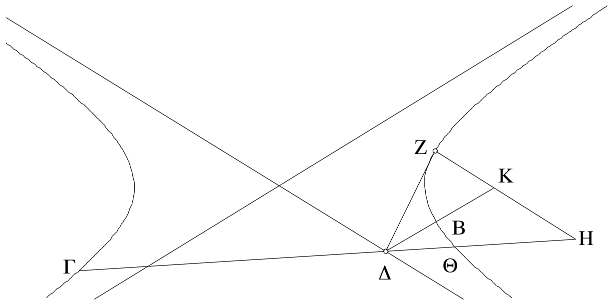
Fig. 20

Que soit menée de Δ une tangente ΔΖ, et que, de Ζ, soit menée une parallèle à l'asymptote où se trouve Δ ; elle passera alors par Κ et Η ; sinon, elle passera ou bien par l'un d'eux ou par aucun d'eux, et l'on conclura aux mêmes absurdités qu'auparavant[56].

– 21 [20V][57] – De même soient des opposées Α et Β ; que le point Δ soit sur l'une des asymptotes ; qu'une droite ΔΒΚ, parallèle à l'autre asymptote, rencontre la section en un seul point Β ; qu'une droite ΓΔΘ rencontre chacune des sections ; que ΓΗ soit à ΗΘ comme ΓΔ est à ΔΘ, et que ΒΚ soit égale à ΔΒ.

[56] III.36.
[57] Voir Note complémentaire [18].

Λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η σημείων συμπεσεῖται τῇ τομῇ καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.



Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ Δ ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η.

Εἰ γὰρ μή, τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα συμβήσεται.

– κβʹ – Ἔστωσαν δὴ ὁμοίως αἱ ἀντικείμεναι καὶ αἱ ἀσύμτωτοι, καὶ τὸ Δ σημεῖον ὁμοίως εἰλήφθω, καὶ ἡ μὲν ΓΔΘ <ἤχθω> τέμνουσα τὰς τομάς, ἡ δὲ ΔΒ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἡ ΒΚ.

Λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

1 Κ, Η c v : fere evan. V ‖ 5 ἐφαπτομένη Ψ : ἐφαπτόμεναι V ‖ 8 κβʹ Ψ : καʹ V (sed litt. om.) ‖ 9 ἤχθω addidi ‖ 12 Κ, Η edd. (jam Comm.) : ΗΚ V ‖ 13 αἱ Ψ : om. V.

Je dis que la droite passant par Κ et Η rencontrera la section et qu'elle sera parallèle à l'asymptote où se trouve le point Δ, et que la droite menée du point de rencontre à Δ sera tangente à la section.

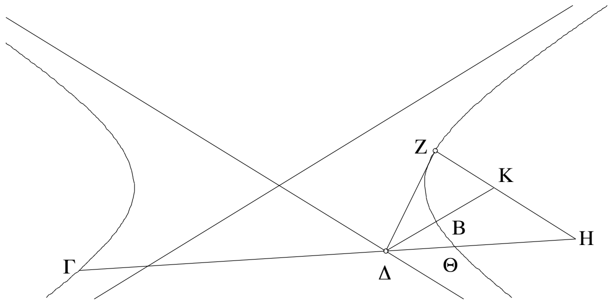


Fig. 21

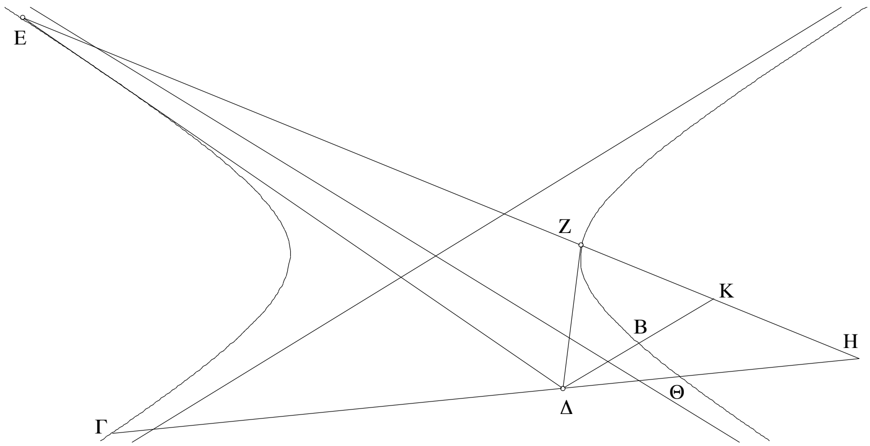
Que soit menée une tangente ΔΖ ; que, de Ζ, soit menée une parallèle à l'asymptote où se trouve le point Δ ; elle passera alors par Κ et Η. Sinon, on retombera sur les absurdités relevées auparavant[58].

– 22 [21V] – Soient les mêmes opposées et asymptotes, et que le point Δ soit pris pareillement[59] ; que soient menées la droite ΓΔΘ coupant les sections et la droite ΔΒ parallèle à l'une des asymptotes ; que ΓΗ soit à ΗΘ comme ΓΔ est à ΔΘ, et que ΒΚ soit égale à ΔΒ.

Je dis que la droite passant par Κ et Η rencontrera chacune des opposées, et que les droites menées des points de rencontre à Δ seront tangentes aux opposées.

[58] III.34 et III.36.

[59] L'adverbe ὁμοίως renvoie à une position du point Δ qui n'est pas celle de la proposition précédente. Il n'y a pas lieu de corriger le texte, qui témoigne ici d'une ancienne ordonnance ; voir Note complémentaire [19].



Ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καί, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου ἢ δι' οὐδετέρου [ἥξει].

Εἰ μὲν διὰ τοῦ Η μόνου, οὐκ ἔσται ἡ ΔΒ τῇ ΒΚ ἴση, ἀλλ' ἑτέρᾳ, ὅπερ ἄτοπον. Εἰ δὲ διὰ μόνου τοῦ Κ, οὐκ ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, ἀλλ' ἄλλη τις πρὸς ἄλλην. Εἰ δὲ δι' οὐδετέρου τῶν Κ, Η, ἀμφότερα τὰ ἀδύνατα συμβήσεται.

– κγʹ – Ἔστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ ἡ μὲν ΒΔ ἤχθω τὴν Β τομὴν καθ' ἓν μόνον τέμνουσα, τῇ δὲ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων παράλληλος, ἡ δὲ ΔΑ <τεμνέτω> τὴν Α τομὴν ὁμοίως, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΔΑ τῇ ΑΚ.

Λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμβάλλει ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν.

2 ἤτοι Ψ : ἤτοι ἢ V ǁ 3 ἥξει del. Heiberg ǁ 6 ΗΘ Canon. : ΗΚ V ǁ οὐδετέρου Mont. : οὐδετέρας V ǁ 8 κγʹ Ψ : κβʹ V (sed litt. om.) ǁ Α Canon. : Δ V ǁ 11 τεμνέτω addidi ǁ 14 συμπτώσεων c Ψ : συμπτώτων V.

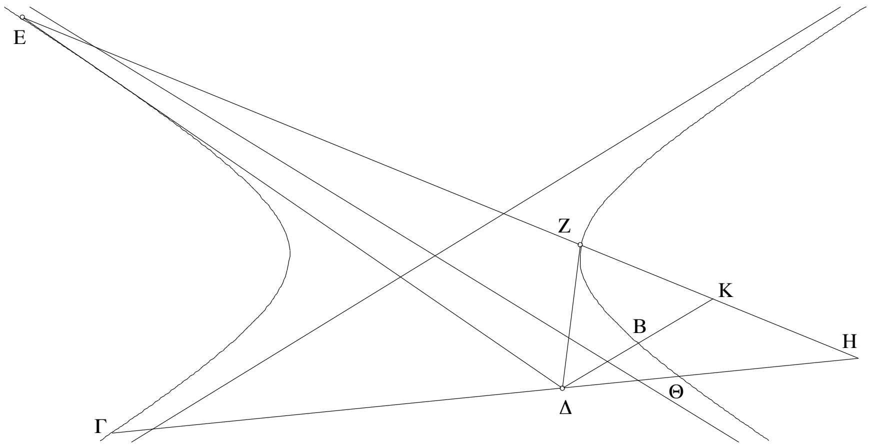


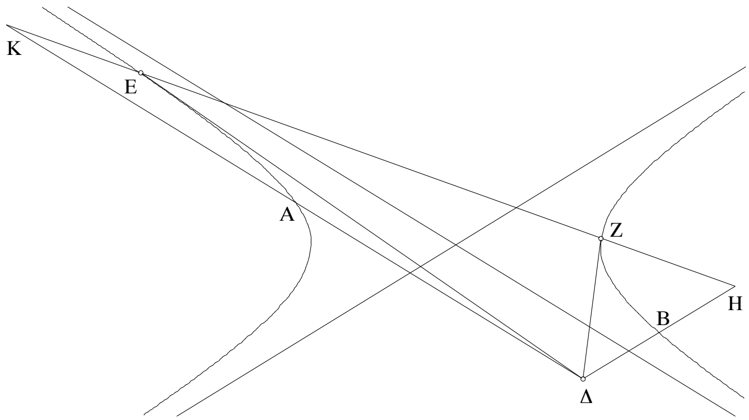
Fig. 22

Que soient menées des tangentes ΔE et ΔZ et une droite de jonction EZ, et, si possible, qu'elle ne passe pas par K et H, mais par l'un d'eux ou par aucun d'eux. Si elle passe par le seul point H, ΔB ne sera pas égale à BK, mais à une autre droite[60], ce qui est absurde ; si elle passe par le seul point K, ΓH ne sera pas à HΘ, mais une autre droite sera à une autre droite, comme ΓΔ est à ΔΘ[61] ; si elle ne passe par aucun des deux points K et H, l'impossibilité se produira dans les deux cas[62].

– 23 [22V] – De même soient des opposées A et B ; que le point Δ soit dans l'angle adjacent à celui compris par les asymptotes ; que soit menée une droite BΔ coupant la section B en un seul point et parallèle à l'autre asymptote ; que ΔA coupe pareillement la section A ; que ΔB soit égale à BH et ΔA à AK.

Je dis que la droite passant par K et H rencontrera les sections, et que les droites menées des points de rencontre à Δ seront tangentes aux sections.

[60] III.31.
[61] III.39.
[62] III.31 et III.36.

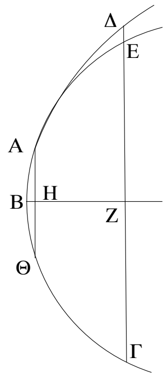


Ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η.

Ἤτοι δὴ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐλεύσεται ἢ δι᾽ οὐδετέρου, καὶ ἤτοι ἡ ΔΑ οὐκ ἔσται ἴση τῇ ΑΚ, ἀλλὰ ἄλλῃ τινί, ὅπερ ἄτοπον, ἢ ἡ ΔΒ τῇ ΒΗ οὐκ ἴση ἢ οὐδετέρα οὐδετέρᾳ, καὶ πάλιν ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται.

Ἥξει ἄρα ἡ ΕΖ διὰ τῶν Κ, Η.

– κδ′ – Κώνου τομὴ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ οὐ συμβάλλει οὕτως, ὥστε μέρος μέν τι εἶναι ταὐτόν, μέρος δὲ μὴ εἶναι κοινόν.



5 οὐδετέρᾳ Halley (jam Comm.) : om. V ‖ 8 κδ′ Ψ : κγ′ V (sed litt. om.).

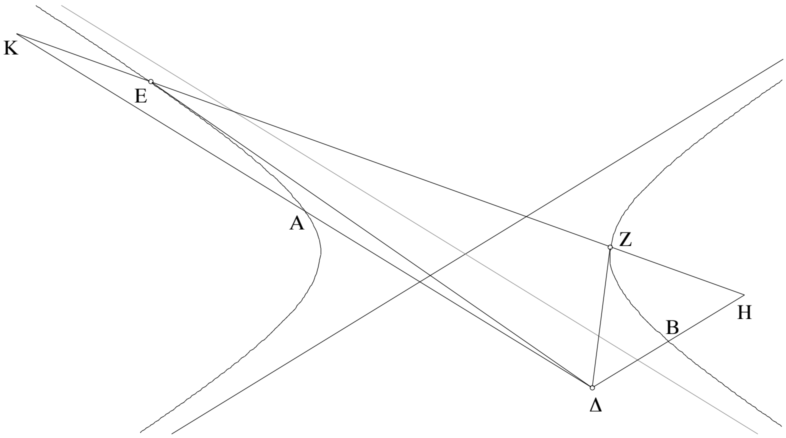


Fig. 23

Que soient menées des tangentes ΔE et ΔZ et une droite de jonction EZ, et que, si c'est possible, elle ne passe pas par K et H.

Ou bien elle passera alors par l'un d'eux, ou bien par aucun d'eux, et ou bien ΔA ne sera pas égale à AK, mais à une autre droite[63], ce qui est absurde, ou bien ΔB n'est pas égale à BH, ou bien aucune des deux n'est égale à aucune des deux, et il se produira de nouveau la même absurdité dans les deux cas.

EZ passera donc par K et H.

– 24 [23V] – *Une section de cône ne rencontre pas une section de cône ou une circonférence de cercle telle qu'une certaine partie soit la même et qu'une autre partie ne soit pas commune*.

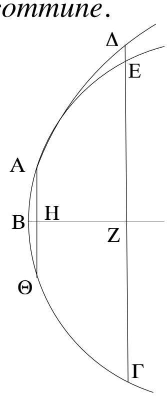


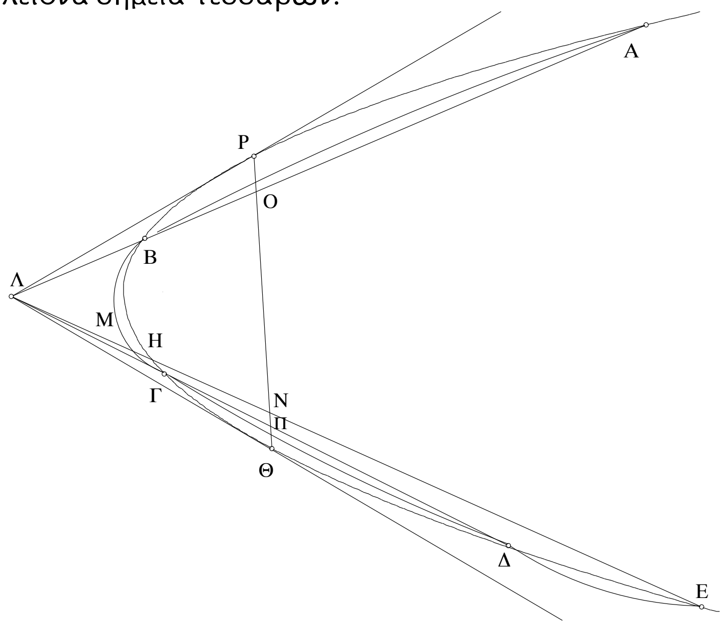
Fig. 24

[63] III.31.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κώνου τομὴ ἡ ΔΑΒΓ <κώνου τομῇ ἢ> κύκλου περιφερείᾳ τῇ ΕΑΒΓ συμβαλλέτω, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὸν μέρος τὸ αὐτὸ τὸ ΑΒΓ, μὴ κοινὸν δὲ τὸ ΑΔ καὶ τὸ ΑΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπ᾽ αὐτῶν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ, καὶ διὰ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τῇ ΑΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΘ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η διάμετρος ἤχθω ἡ ΒΗΖ.

Ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΘ ἐφάψεται ἑκατέρας τῶν τομῶν καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ΔΕΓ, καὶ ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΔΖ τῇ ΖΓ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΕΖ τῇ ΖΓ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

– κε΄ – Κώνου τομὴ κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα τεσσάρων.



Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω κατὰ πέντε τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, καὶ ἔστωσαν αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε συμπτώσεις ἐφεξῆς μηδεμίαν παραλείπουσαι μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τῶν τομῶν ἐπὶ τῆς

1 γὰρ V[1] : om. V ‖ κώνου τομῇ ἢ addidi ‖ 2 post περιφερείᾳ add. ἢ κώνου τομῇ Halley ‖ 11 κε΄ Ψ : κδ΄ V (sed litt. om.) ‖ 13 τὰ Ψ : αἱ V ‖ 15 αὑτῶν Heiberg : αὐτῶν V.

Qu'une section de cône ΔΑΒΓ rencontre <une section de cône ou> une circonférence de cercle ΕΑΒΓ, et, si c'est possible, qu'une même partie ΑΒΓ soit commune et que les parties ΑΔ et ΑΕ ne soient pas communes ; que soient pris sur elles un point Θ ; que soit menée une droite de jonction ΘΑ ; que, par un point quelconque Ε, soit menée une parallèle ΔΕΓ à ΑΘ ; que ΑΘ soit coupée en deux parties égales en un point Η, et que, par Η, soit mené le diamètre ΒΗΖ.

La parallèle à ΑΘ passant par Β sera tangente à chacune des sections[64] et parallèle à ΔΕΓ[65] ; dans l'une des sections, ΔΖ sera égale à ΖΓ, dans l'autre, ΕΖ sera égale à ΖΓ[66], de sorte que ΔΖ sera égale à ΖΕ, ce qui est impossible[67].

– 25 [24V] – *Une section de cône ne coupe pas une section de cône ou une circonférence de cercle en plus de quatre points.*

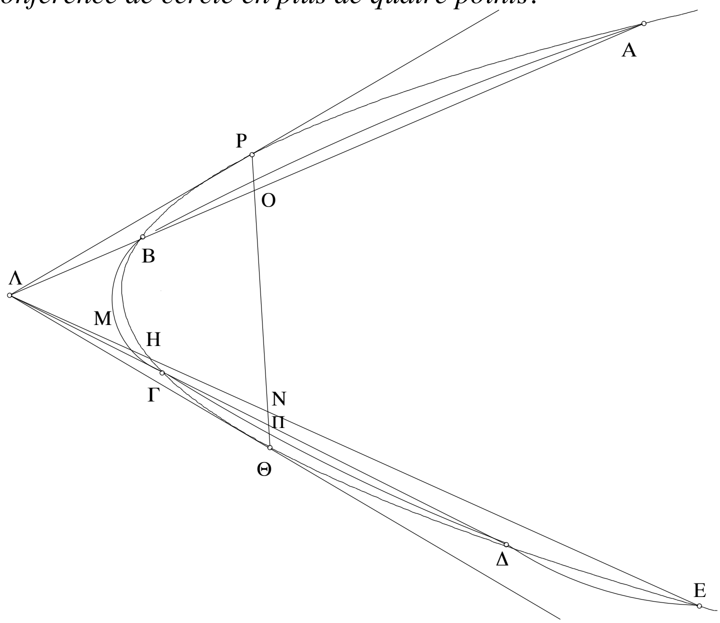


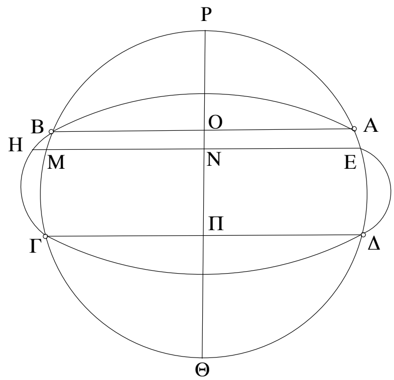
Fig. 25.1

Qu'elle la coupe en cinq points Α, Β, Γ, Δ et Ε, si c'est possible ; que les points de rencontre Α, Β, Γ, Δ et Ε soient successifs et tels qu'il n'y ait

[64] I. 32. ΑΘ n'est pas explicitement reconnue comme ordonnée au diamètre ΒΗΖ.
[65] *Éléments*, I.30.
[66] I.46-47.
[67] Voir Note complémentaire [20].

παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς· συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ, ἐχέτω ἡ ΑΟ πρὸς ΟΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἐχέτω ἡ ΔΠ πρὸς ΠΓ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ο ἐπιζευγνυμένη ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν· συμπιπτέτω δὴ κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται. Ἡ ἄρα ΕΛ τέμνει ἑκατέραν τομήν, ἐπείπερ μεταξὺ τῶν Β, Γ σύμπτωσις οὐκ ἔστιν· τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Η· ἔσται ἄρα διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομήν, ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν, ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΜ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΜ. Τοῦτο δὲ ἀδύνατον, ὥστε καὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς.



Ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι ὦσιν, ἔσονται [μὲν] αἱ τομαὶ ἐλλείψεις ἢ κύκλου περιφέρεια.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΟ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς· συμπιπτέτω δὴ κατὰ τὰ Θ, Ρ · ἔσται δὴ διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΘΡ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΓΔ.

3 ΔΛ Ψ : ΔΓ V ‖ 13 μὲν delevi ‖ 14 περιφέρεια v Ψ : περιφερείᾳ V.

pas d'autre point de rencontre entre eux ; que soient menées des droites de jonction AB et ΓΔ et qu'elles soient prolongées ; ces droites se rencontreront alors en dehors des sections dans le cas de la parabole et de l'hyperbole[68] ; qu'elles se rencontrent en un point Λ ; que AO ait avec OB le rapport que AΛ a avec ΛB, et que ΔΠ ait avec ΠΓ le rapport que ΔΛ a avec ΛΓ.

Le prolongement de part et d'autre de la droite joignant les points Π et O rencontrera donc la section, et les droites joignant les points de rencontre et le point Λ seront tangentes aux sections[69] ; que cette droite rencontre la section en des points Θ et P, et que soient menées des droites de jonction ΘΛ et ΛP ; ces droites seront alors des tangentes. EΛ coupe donc chaque section, puisqu'il n'y a pas de point de rencontre entre B et Γ ; qu'elle les coupe en des points M et H ; en raison de l'une des sections[70], EN sera donc à NH comme EΛ est à ΛH, et, en raison de l'autre section, EN sera à NM comme EΛ est à ΛM[71], ce qui est impossible, de sorte qu'est aussi impossible l'assertion du début[72].

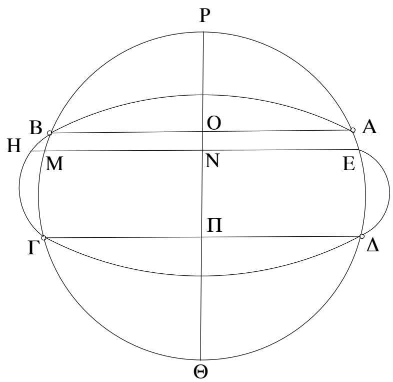


Fig. 25.2

Si AB et ΔΓ sont parallèles, les sections seront des ellipses ou une circonférence de cercle[73].

Que AB et ΓΔ soient coupées en deux parties égales en des points O et Π ; que soit menée une droite de jonction ΠO et qu'elle soit prolongée de

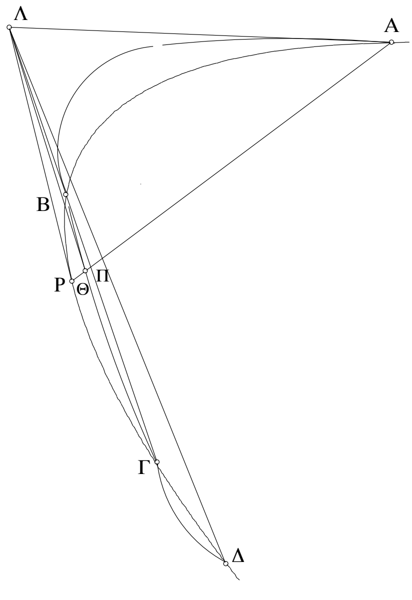
[68] II.24-25.
[69] Prop. 9.
[70] Sur ce tour qui revient souvent dans la suite, voir Note complémentaire [21].
[71] III.37.
[72] Cette remarque est sans doute une interpolation.
[73] C'est-à-dire des ellipses ou une ellipse et une circonférence de cercle.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὰς ΑΒ, ΓΔ, ἡ ΕΝΜΗ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΕΜΗ τὴν ΘΡ καὶ ἑκατέραν τῶν γραμμῶν, διότι ἑτέρα σύμπτωσις οὐκ ἔστι παρὰ τὰς Α, Β, Γ, Δ· ἔσται δὴ διὰ ταῦτα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΝΜ ἴση τῇ ΕΝ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΝΕ τῇ ΝΗ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΝΗ ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

– κϛʹ – Ἐὰν τῶν εἰρημένων γραμμῶν τινες καθʼ ἓν ἐφάπτωνται σημεῖον ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἑαυταῖς καθʼ ἕτερα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων τινές δύο τῶν εἰρημένων γραμμῶν κατὰ τὸ Α σημεῖον.

Λέγω ὅτι οὐ σημβάλλουσι κατʼ ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἔστωσαν αἱ συμπτώσεις ἐφεξῆς ἀλληλαῖς μηδεμίαν μεταξὺ παραλείπουσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΑΛ· ἐφάψεται δὴ τῶν δύο τομῶν καὶ συμπεσεῖται τῇ ΓΒ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ καὶ γινέσθω ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, ἡ ΓΠ πρὸς

6 κϛʹ Ψ : κεʹ V (sed litt. om.) || 11 ἢ Ψ : om. V || 13 μηδεμίαν c Ψ : μὴ δὲ μίαν V || 15 δύο] βʹ V.

part et d'autre ; elle rencontrera alors les sections ; qu'elle les rencontre en des points Θ et Ρ. ΘΡ sera alors un diamètre des sections[74], et ΑΒ et ΓΔ seront des droites abaissées sur lui de manière ordonnée.

Que soit menée de Ε une parallèle ΕΝΜΗ aux droites ΑΒ et ΓΔ ; ΕΜΗ coupera donc ΘΡ et chacune des lignes, parce qu'il n'y a pas d'autre point de rencontre que les points Α, Β, Γ et Δ. En vertu de quoi, dans l'une des sections, ΝΜ sera égale à ΕΝ, et, dans l'autre section, ΝΕ sera égale à ΝΗ, de sorte que ΝΜ est égale à ΝΗ, ce qui est impossible.

– 26 [25V] – *Si certaines*[75] *des lignes susdites sont tangentes entre elles en un point, elles ne se rencontreront pas en plus de deux autres points.*

Que deux des lignes susdites soient tangentes entre elles en un point Α.

Je dis qu'elles ne se rencontreront pas en plus de deux autres points.

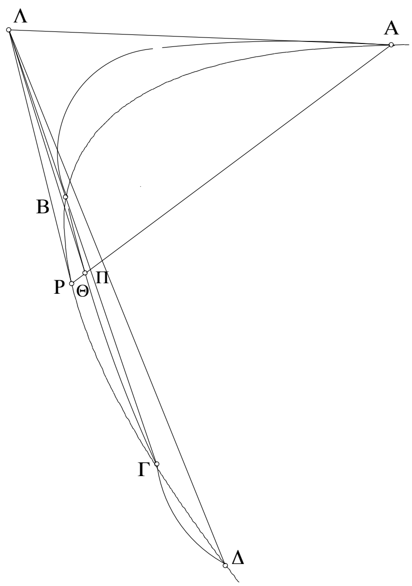


Fig. 26

Qu'elles se rencontrent en des points Β, Γ et Δ, si c'est possible ; que les points de rencontre soient successifs et tels qu'il n'y ait pas d'autre

[74] II.28.

[75] Ici et dans la proposition suivante, le pronom indéfini « certaines » ne désigne pas une classe de sections, mais deux sections tangentes l'une à l'autre. On voit par là qu'il n'est pas toujours heureux, même si c'est généralement préférable, de traduire le pronom τις par « certain ».

ΠΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΠ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐφάψονται τῶν τομῶν· ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν. Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένη τέμνει ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ συμβήσεται τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα.

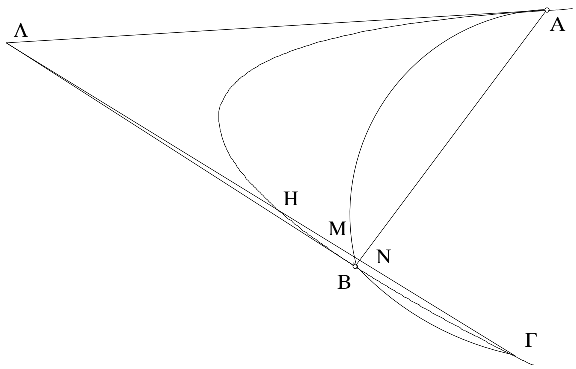
Οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἡ ΓΒ παράλληλος ᾖ τῇ ΑΛ, ὁμοίως τῷ προειρημένῳ ποιησόμεθα τὴν ἀπόδειξιν διάμετρον δείξαντες τὴν ΑΘ.

– κζʹ – Ἐὰν τῶν προειρημένων γραμμῶν τινες κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον.

Δύο γὰρ τῶν εἰρημένων γραμμῶν ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β.

Λέγω ὅτι ἀλλήλαις κατὰ ἄλλο σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.



11 κζʹ Ψ : κςʹ V (sed litt. om.) ‖ 12 ἀλλήλαις Ψ : ἀλλήλως V.

point de rencontre entre eux ; que soit menée une droite de jonction ΒΓ et qu'elle soit prolongée ; que, de Α, soit menée une tangente ΑΛ ; elle sera alors tangente aux deux sections et rencontrera ΓΒ ; qu'elle la rencontre en un point Λ ; que ΓΠ soit à ΠΒ comme ΓΛ est à ΛΒ ; que soit menée une droite de jonction ΑΠ et qu'elle soit prolongée ; elle rencontrera alors les sections, et les droites menées des points de rencontre à Λ seront tangentes aux sections[76] ; que ΑΠ soit prolongée et qu'elle rencontre les sections en des points Θ et Ρ ; que soient menées les droites de jonction ΘΛ et ΛΡ ; elles seront alors tangentes aux sections. La droite qui joint les points Δ et Λ coupe donc chacune des sections, et on retombera sur les absurdités susdites[77].

Elles ne se coupent donc pas en plus de deux points.

Si, dans le cas de l'ellipse ou de la circonférence de cercle, ΓΒ est parallèle à ΑΛ, on conduira une démonstration semblable à la précédente en démontrant que ΑΘ est le diamètre.

– 27 [26V] – *Si certaines des lignes susdites sont tangentes en deux points, elles ne se rencontreront pas l'une l'autre en un autre point.*

Que deux des lignes susdites soient tangentes l'une l'autre en deux points Α et Β.

Je dis qu'elles ne se rencontreront pas entre elles en un autre point.

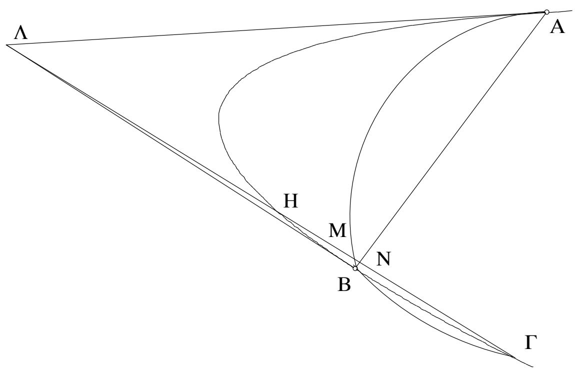
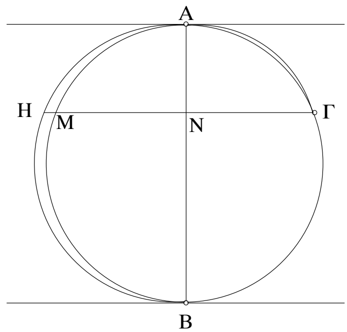


Fig. 27.1

[76] Prop. 1.
[77] Voir Prop. 25.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν καὶ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω πρότερον τὸ Γ ἐκτὸς τῶν Α, β ἁφῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι· ἐφάψονται ἄρα ἀμφοτέρων τῶν γραμμῶν· ἐφαπτέσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, ὡς ἐπὶ τῆς πρωτῆς καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΛ· τεμεῖ δὴ ἑκατέραν τῶν τομῶν· τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝΒ· ἔσται ἄρα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΗ, ἡ ΓΝ πρὸς ΝΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΜ, ἡ ΓΝ πρὸς ΝΜ, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐὰν δὲ ἡ ΓΗ παράλληλος ᾖ ταῖς κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἐφαπτομέναις, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τῇ δευτέρᾳ καταγραφῇ, ἐπιζεύξαντες τὴν ΑΒ ἐροῦμεν ὅτι διάμετρος ἔσται τῶν τομῶν, ὥστε δίχα τμηθήσεται ἑκατέρα τῶν ΓΗ, ΓΜ κατὰ τὸ Ν, ὅπερ ἄτοπον.



Οὐκ ἄρα καθ’ ἕτερον σημεῖον συμβάλλουσιν αἱ γραμμαὶ ἀλλήλαις, ἀλλὰ κατὰ μόνα τὰ Α, Β.

Ἔστω δὴ τὸ Γ μεταξὺ τῶν ἁφῶν, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς.

3 ἐφάψονται Ψ : ἐφάψεται V || 5 τεμεῖ Ψ : τεμεῖν V || 9 τὰ Ψ : om. V || 12 Γ[Μ e corr. V^1 || 15 ὡς Ψ : om. V.

Qu'elles se rencontrent aussi en un point Γ, si c'est possible ; que Γ soit d'abord[78] à l'extérieur des points de contact A et B, et que soient menées de A et B des tangentes ; elles seront donc tangentes à chacune des lignes ; qu'elles soient tangentes aux lignes ; qu'elles se rencontrent en un point Λ, comme sur la première figure[79], et que soit menée une droite de jonction ΓΛ ; elle coupera alors chacune des sections ; qu'elle les coupe en des points H et M, et que soit menée une droite de jonction ANB. Dans l'une des sections, ΓN sera donc à NH comme ΓΛ est à ΛH[80], et, dans l'autre, ΓN sera à NM comme ΓΛ est à ΛM, ce qui est absurde.

[28][81] Si la droite ΓH est parallèle aux tangentes aux points A et B, comme dans le cas de l'ellipse sur la deuxième figure, nous mènerons la droite de jonction AB et dirons que AB sera un diamètre des sections[82], de sorte que chacune des droites ΓH et ΓM sera coupée en deux parties égales en un point N, ce qui est absurde.

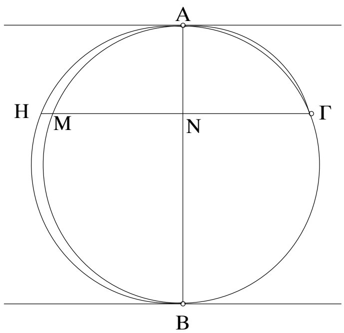


Fig. 27.2

Les lignes ne se rencontrent donc pas l'une l'autre en un autre point, mais aux seuls points A et B.

[29] Que, maintenant, le point Γ soit entre les points de contact, comme sur la troisième figure.

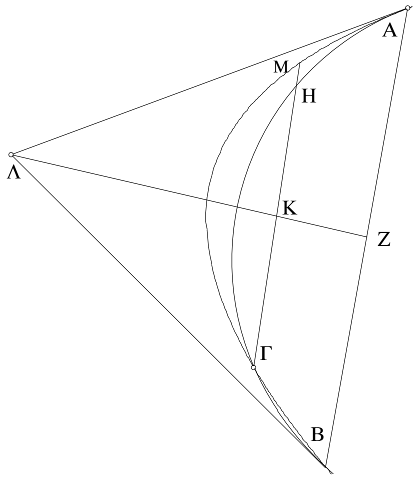
[78] Le cas où le point Γ est entre les points de contact est étudié à la fin de la proposition. Il y est introduit par la particule δή qui répond à l'adverbe πρότερον (l. 2).

[79] Dans **V**, les trois figures sont rassemblées à la fin de la proposition. L'ordre des appels n'a pas été respecté.

[80] III.37

[81] Cette division et la suivante ont été introduites par Heiberg sans nécessité. Je restitue ici l'unité de la proposition, en respectant le témoignage de **V** ; voir Note complémentaire [22]. La proposition 30 retrouve la numérotation de l'édition Heiberg.

[82] II.27.



Φανερόν ὅτι οὐκ ἐφάψονται αἱ γραμμαὶ ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ· κατὰ δύο γὰρ μόνον ὑπόκεινται ἐφαπτόμεναι. Τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΛ, ΛΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Ζ διάμετρος ἔσται. Διὰ μὲν οὖν τοῦ Γ οὐκ ἐλεύσεται. Εἰ γὰρ ἥξει, ἡ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἀγομένη ἐφάψεται ἀμφοτέρων τῶν τομῶν· τοῦτο δὲ ἀδύνατον.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΓΚΗΜ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΓΚ τῇ ΚΗ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΚΜ τῇ ΚΓ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΚΗ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν παράλληλοι ὦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω τὸ ἀδύνατον δειχθήσεται.

– λʹ – Παραβολὴ παραβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

1 λʹ Heiberg vide adn. : κζʹ V (sed litt. om.).

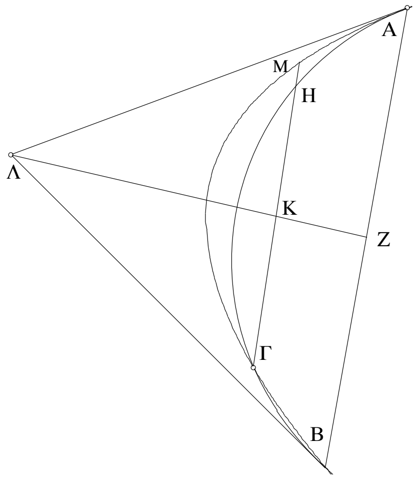


Fig. 27.3

Il est évident que les lignes ne seront pas tangentes entre elles au point Γ, puisque, par hypothèse, elles sont tangentes en deux points seulement. Qu'elles se coupent donc[83] au point Γ ; que soient menées de A et B des tangentes AΛ et ΛB ; que soit menée une droite de jonction AB et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Z ; la droite menée de Λ à Z sera donc[84] un diamètre[85]. Elle ne passera donc pas par Γ ; car, si elle passait par Γ, la parallèle à AB passant par Γ serait tangente à chacune des sections[86], ce qui est impossible.

Que, de Γ, soit menée une parallèle ΓKHM à AB ; dans une section, ΓK sera alors égale à KH, dans l'autre, KM sera égale à KΓ, de sorte que KM est aussi égale à KH, ce qui est impossible.

Pareillement encore, si les tangentes sont parallèles, la démonstration aboutira à une impossibilité pour les mêmes raisons que ci-dessus.

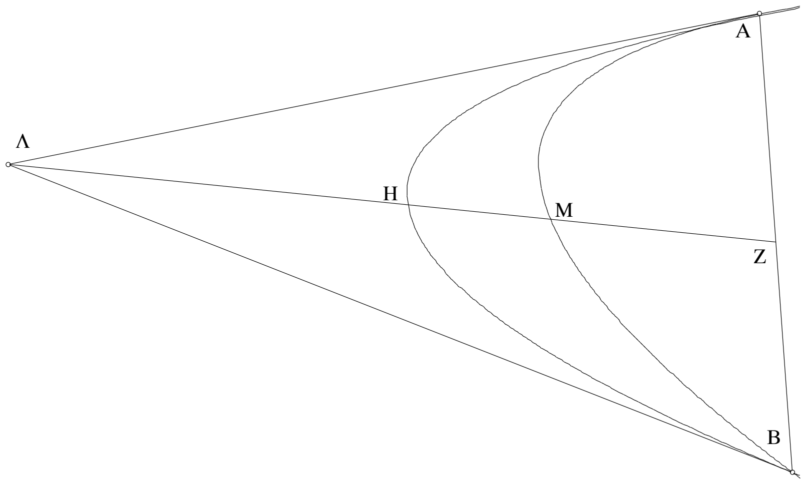
– 30 [27V] – *Une parabole ne sera pas tangente à une autre parabole en plus d'un point*.

[83] Sur cet emploi de οὖν, voir Note complémentaire [23].

[84] Cet emploi de μὲν οὖν ne correspond pas à l'usage de la particule dans les *Coniques* (voir Note complémentaire [13] au Livre II).

[85] II.29.

[86] II.5 et 6.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ παραβολαὶ κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΛ, ΛΒ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων καὶ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Λ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἡ ΛΖ.

Ἐπεὶ οὖν δύο γραμμαὶ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ δύο τὰ Α, Β, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ᾽ ἕτερον, ὥστε ἡ ΛΖ ἑκατέραν τῶν τομῶν τέμνει· τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἡ ΛΗ τῇ ΗΖ ἴση, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἡ ΛΜ τῇ ΜΖ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα παραβολὴ παραβολῆς ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

– λα′ – Παραβολὴ ὑπερβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα ἐκτὸς αὐτῆς πίπτουσα.

7 τὰ Ψ : τὸ V ‖ 10 παραβολὴ Ψ : om. V ‖ 12 λα′ Heiberg vide adn. : κη′ V (sed litt. om.).

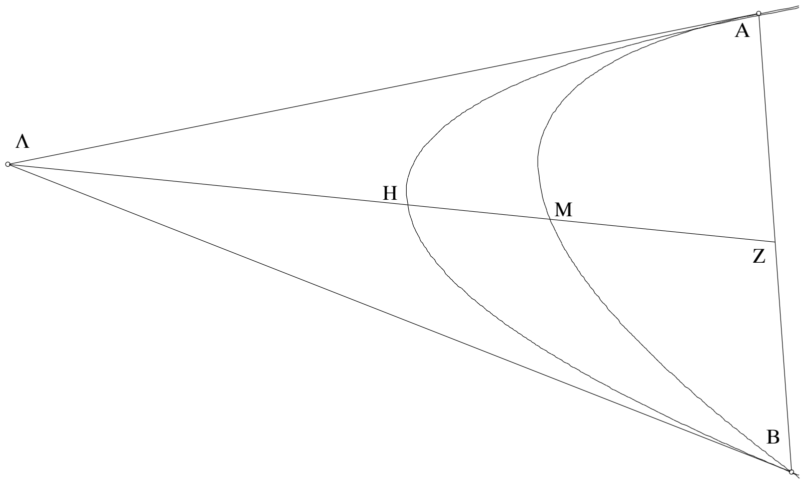


Fig. 30

Que des paraboles ΑΗΒ et ΑΜΒ soient tangentes en des points Α et Β, si c'est possible, et que soient menées des tangentes ΑΛ et ΛΒ ; elles seront alors tangentes à l'une et l'autre section et se rencontreront en un point Λ.

Que soit menée une droite de jonction ΑΒ et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Ζ, et que soit menée une droite ΛΖ.

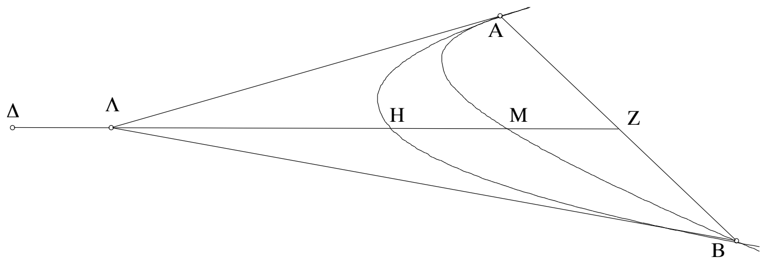
Dès lors, puisque deux lignes ΑΗΒ et ΑΜΒ sont tangentes en deux points Α et Β, elles ne se rencontreront pas en un autre point[87], de sorte que ΛΖ coupe chacune des sections ; qu'elle les coupe en des points Η et Μ ; en raison d'une section, ΛΗ sera alors égale à ΗΖ, en raison de l'autre section, ΛΜ sera égale à ΜΖ[88], ce qui est impossible.

Une parabole ne sera donc pas tangente à une parabole en plus d'un point.

– 31 [28V] – *Une parabole tombant à l'extérieur d'une hyperbole ne sera pas tangente à l'hyperbole en deux points.*

[87] Prop. 27 ; voir Note complémentaire [24].

[88] I.35. ΛΖ n'a pas été reconnue explicitement comme diamètre ni ΑΒ comme ordonnée ; *cf. supra*, note 64.



Ἔστω παραβολὴ μὲν ἡ ΑΗΒ, ὑπερβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τομαὶ κατὰ τὰ Α, Β ἐφάπτονται, κατ' ἄλλο οὐ συμβάλλουσιν· ἡ ἄρα ΛΖ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο τέμνει τὰς τομάς· τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ ΛΖ· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς· ἔστω κέντρον τὸ Δ; ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ὑπερβολήν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ, ἡ ΜΔ πρὸς ΔΛ καὶ λοιπὴ ἡ ΖΜ πρὸς ΜΛ· μείζων δὲ ἡ ΖΔ τῆς ΔΜ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΜ τῆς ΜΛ. Διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ, ὅπερ ἀδύνατον.

– λβʹ – Παραβολὴ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα ἐντὸς αὐτῆς πίπτουσα.

3 τῶν τομῶν Ψ : τῶν Α, Β τομῶν V || 13 λβʹ Heiberg : κθʹ V (sed litt. om.).

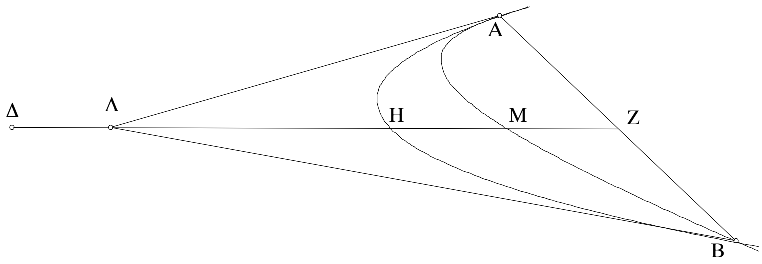


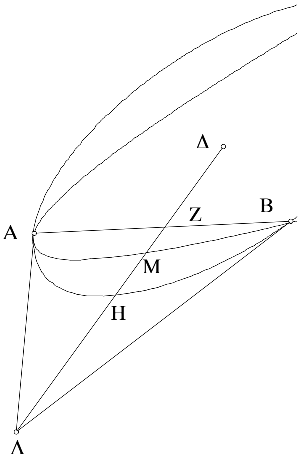
Fig. 31

Soient une parabole AHB et une hyperbole AMB ; qu'elles soient tangentes en des points A et B, si c'est possible ; que soient menées de A et B des tangentes à chacune des sections et qu'elles se rencontrent l'une l'autre en un point Λ ; que soit menée une droite de jonction AB et qu'elle soit coupée en deux parties égales en un point Z, et que soit menée une droite de jonction ΛZ.

Dès lors, puisque les sections AHB et AMB sont tangentes aux points A et B, elles ne se rencontrent pas en un autre point[89] ; ΛZ coupera donc les sections en tel et tel point[90] ; qu'elle les coupe en des points H et M, et que ΛZ soit prolongée ; elle tombera alors sur le centre de l'hyperbole[91] ; soit Δ ce centre ; en raison de l'hyperbole[92], MΔ sera alors à ΔΛ et la droite restante sera à MΛ comme ZΔ est à ΔM ; or ZΔ est plus grande que ΔM ; ZM est donc aussi plus grande que MΛ. Or, en raison de la parabole[93], ZH sera égale à HΛ, ce qui est impossible.

– 32 [29V] – *Une parabole tombant à l'intérieur d'une ellipse ou d'une circonférence de cercle ne sera pas tangente à l'ellipse ou à la circonférence de cercle en deux points*.

[89] II.27 ; voir Note complémentaire [24].
[90] Sur cette expression, voir Note complémentaire [25].
[91] II. 29.
[92] I.37.
[93] I.35.



Ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΗΒ, παραβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ δύο τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν καὶ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ· τεμεῖ δὴ ἑκατέραν τῶν τομῶν κατ᾿ ἄλλο καὶ ἄλλο, ὡς εἴρηται · τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛΖ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω τὸ Δ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ἢ τοῦ κύκλου· ἔστιν ἄρα διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ, ἡ ΔΗ πρὸς ΔΖ καὶ λοιπὴ ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ· μείζων δὲ ἡ ΛΔ τῆς ΔΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΗ τῆς ΗΖ. Διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΛΜ τῇ ΜΖ, ὅπερ ἀδύνατον.

– λγʹ – Ὑπερβολὴ ὑπερβολῆς τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα.

8 alt. ΔΗ Canon. : ΔΠ V ‖ λγʹ Heiberg : λʹ V (sed litt. om.).

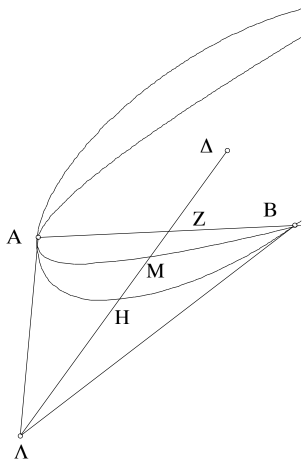
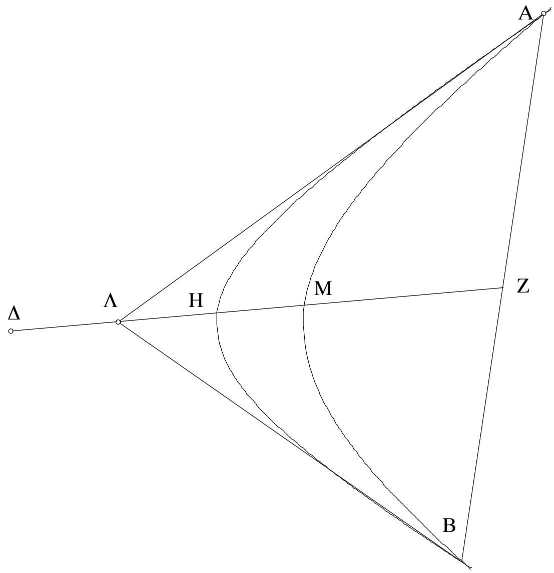


Fig. 32

Soient une ellipse ou une circonférence de cercle AHB et une parabole AMB ; qu'elles soient tangentes en deux points A et B, si c'est possible ; que soient menées de A et B des tangentes aux sections et qu'elles se rencontrent en un point Λ ; que soit menée une droite de jonction AB et qu'elle soit coupée en un point Z, et que soit menée une droite de jonction ΛZ ; elle coupera alors les sections en tel et tel point, comme on l'a dit[94] ; qu'elle les coupe en des points H et M ; que ΛZ soit prolongée jusqu'en un point Δ, et que Δ soit le centre de l'ellipse ou du cercle ; en raison de l'ellipse et du cercle[95], ΔH est donc à ΔZ et la droite restante ΛH est à HZ comme ΛΔ est à ΔH ; or ΛΔ est plus grande que ΔH ; ΛH est donc aussi plus grande que HZ. Or, en raison de la parabole[96], ΛM est égale à MZ, ce qui est impossible.

– 33 [30V] – *Une hyperbole ayant le même centre qu'une hyperbole ne sera pas tangente à l'hyperbole en deux points.*

[94] Voir Note complémentaire [24].
[95] I.37.
[96] I.35.



Ὑπερβολαὶ γὰρ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσαι τὸ Δ, εἰ δυνατόν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΛ, ΛΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΛ καὶ ἐκβεβλήσθω.

Ἐπεζεύχθω δὴ καὶ ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ΔΖ τὴν ΑΒ δίχα τέμνει κατὰ τὸ Ζ· τεμεῖ δὴ ἡ ΔΖ τὰς τομὰς κατὰ τὰ Η, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ΑΗΒ ὑπερβολὴν ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΔΛ τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ΑΜΒ τὸ ὑπὸ ΖΔΛ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ. Τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ, ὅπερ ἀδύνατον.

– λδʹ – Ἐὰν ἔλλειψις ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα, ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πεσεῖται.

7 post ἴσον del. δὲ V[1] || 8 ΖΔΛ V[1] : ΖΜΛ V || 10 λδʹ Heiberg : λαʹ V (sed litt. om.).

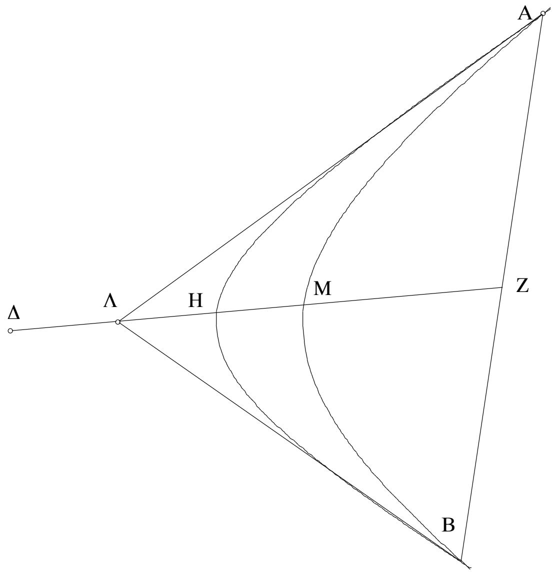


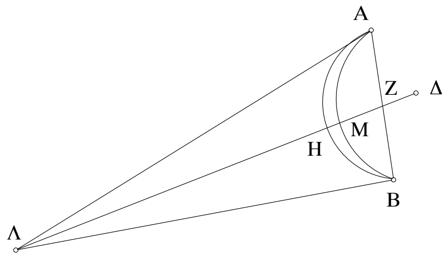
Fig. 33

Que des hyperboles AHB et AMB, ayant le même centre Δ, soient tangentes en des points A et B, si c'est possible ; que soient menées de A et B des droites AΛ et ΛB tangentes aux sections et se rencontrant l'une l'autre ; que soit menée une droite de jonction ΔΛ et qu'elle soit prolongée.

Que soit menée aussi une droite de jonction AB ; ΔZ coupe donc AB en deux parties égales[97] en un point Z ; ΔZ coupera alors les sections en des points H et M. En raison de l'hyperbole AHB[98], le rectangle ZΔΛ sera égal au carré sur ΔH, et, en raison de l'hyperbole AMB, le rectangle ZΔΛ sera égal au carré sur ΔM. Le carré sur MΔ sera donc égal au carré sur ΔH, ce qui est impossible.

– 34 [31V] – *Si une ellipse est tangente en deux points à une ellipse ou à une circonférence de cercle en ayant le même centre, la droite joignant les points de contact passera par le centre.*

[97] II.30.
[98] I.37.



Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν ἤχθωσαν καί, εἰ δυνατόν, συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἡ ΑΒ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῶν τομῶν.

Ἔστω, εἰ δυνατόν, κέντρον τὸ Δ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ ΛΔΖ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἴσον τῷ ἀπὸ ΜΔ, ὥστε τὸ ἀπὸ ΗΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι συμπεσοῦνται· παράλληλοι ἄρα εἰσίν, καὶ διὰ τοῦτο διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, ὥστε διὰ τοῦ κέντρου πίπτει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

– λε′ – Κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

6 ΛΔΖ Mont. : ΔΛΖ V || 12 λε′ Heiberg : λβ′ V (sed litt. om.).

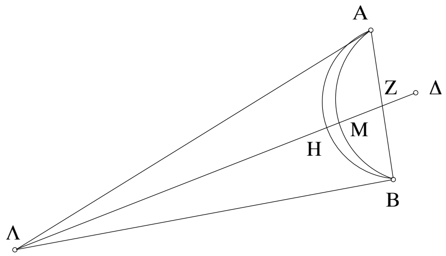


Fig. 34

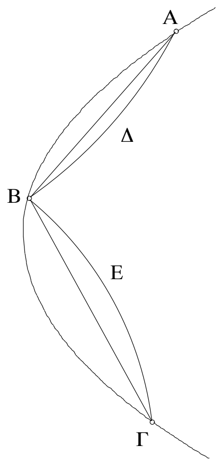
Que les lignes susdites soient tangentes entre elles en des points Α et Β ; que soit menée une droite de jonction ΑΒ ; que, par Α et Β, soient menées des tangentes aux sections et qu'elles se rencontrent en un point Λ, si possible ; que ΑΒ soit coupée en deux parties égales en un point Ζ, et que soit menée une droite de jonction ΛΖ ; ΛΖ sera donc un diamètre des sections[99].

Soit Δ ce centre, si c'est possible ; en raison de l'une des sections, le rectangle ΛΔ,ΔΖ sera donc égal au carré sur ΔΗ, et, en raison de l'autre section, il sera égal au carré sur ΜΔ[100], de sorte que le carré sur ΗΔ sera égal à celui sur ΔΜ, ce qui est impossible.

Les tangentes menées de Α et Β ne se rencontreront donc pas ; elles sont donc parallèles, ce qui fait que ΑΒ est un diamètre[101], de sorte qu'il passe par le centre, ce qu'il fallait démontrer.

– 35 [32V] – *Une section de cône ou une circonférence de cercle, qui n'a pas sa convexité dans le même sens, ne rencontrera pas la section de cône ou la circonférence de cercle en plus de deux points.*

[99] II.29.
[100] I.37.
[101] II.27.



Εἰ γὰρ δυνατόν, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ τῇ ΑΔΒΕΓ συμβαλλέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα τὰ Α, Β, Γ <, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῆς ΑΒΓ> γραμμῆς εἴληπται τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ καὶ ἐπεζευγμέναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, γωνίαν ἄρα περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ αἱ ΑΒΓ τὴν αὐτὴν γωνίαν περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς ΑΔΒΕΓ γραμμῆς. Αἱ εἰρημέναι ἄρα γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔχουσι τὰ κοῖλα ἅμα καὶ τὰ κυρτά, ὅπερ ἀδύνατον.

– λϛʹ – Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια συμπίπτῃ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν συμπτώσεων γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχωσι, προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ κατὰ τὰς συμπτώσεις οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

3-5 καὶ — ΑΒΓ addidi vide adn. ‖ γραμμῆς ego : γραμμῇ V ‖ 6 αἱ Ψ : om. V ‖ 7 τοῖς e corr. V^1 ‖ 9 ἅμα Heiberg : ἀλλὰ V ‖ 11 λϛʹ Heiberg : λγʹ V (sed litt. om.) ‖ 13 ἔχωσι Ψ : ἔχουσι V.

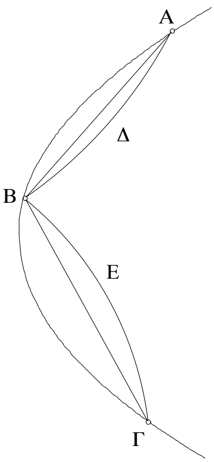


Fig. 35

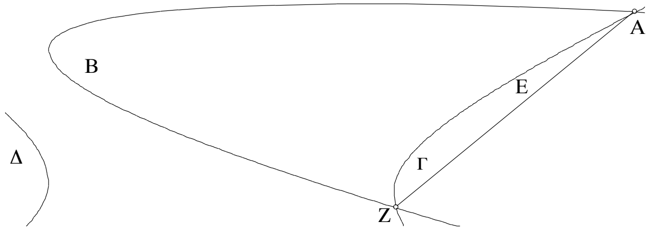
Si c'est possible, qu'une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒΓ, qui n'a pas sa convexité dans le même sens, rencontre une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΔΒΕΓ en plus de deux points Α, Β et Γ <, et que soient menée des droites de jonction ΑΒ, ΒΓ.

Dès lors, puisque sur la ligne ΑΒΓ>[102], sont pris trois points Α, Β et Γ, et que sont menées des droites de jonction ΑΒ et ΒΓ, alors elles comprennent le même angle du même côté que la concavité de la ligne ΑΒΓ. Pour les mêmes raisons, ΑΒ et ΒΓ comprennent le même angle du même côté que la concavité de la ligne ΑΔΒΕΓ. Les lignes susdites sont donc à la fois concaves et convexes dans le même sens, ce qui est impossible.

– 36 [33V] – *Si une section de cône ou une circonférence de cercle rencontrent l'une de deux opposées en deux points, et que les lignes situées entre les points de rencontre ont leur concavité dans le même sens, la ligne passant par les points de rencontre et prolongée*[103] *ne rencontrera pas l'autre opposée.*

[102] Voir Note complémentaire [26].

[103] Le tour προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ κατὰ τὰς συμπτώσεις n'a pas d'autre occurrence dans le *corpus* mathématique classique.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Δ, ΑΕΓΖ, καὶ ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΖ συμπίπτουσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Ζ, καὶ ἐχέτωσαν αἱ ΑΒΖ, ΑΓΖ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα.

Λέγω ὅτι ἡ ΑΒΖ γραμμὴ ἐκβαλλομένη οὐ συμπεσεῖται τῇ Δ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ Δ, ΑΓΖ, καὶ ἡ ΑΖ εὐθεῖα κατὰ δύο τέμνει τὴν ὑπερβολήν, οὐ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ Δ ἀντικειμένῃ.

Οὐδὲ ἄρα ἡ ΑΒΖ γραμμὴ συμπεσεῖται τῇ Δ.

– λζʹ – Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, τῇ λοιπῇ αὐτῶν οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

7 Δ, ΑΓΖ] ΔΑ, ΓΖ V || 11 λζʹ Heiberg : λδʹ V (sed litt. om.) || μιᾷ Ψ : om. V.

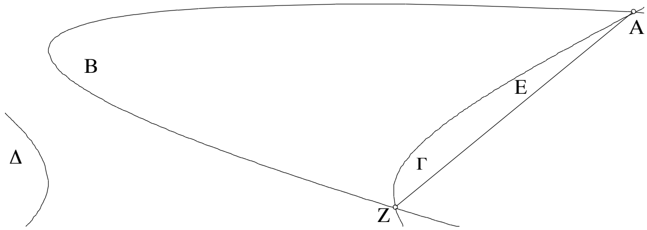


Fig. 36

Soient des opposées Δ et ΑΕΓΖ; soit une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒΖ rencontrant[104] l'une des opposées en deux points Α et Ζ, et que les sections ΑΒΖ et ΑΓΖ aient leur concavité dans le même sens.

Je dis que le prolongement de la ligne ΑΒΖ ne rencontrera pas l'opposée Δ.

Que soit menée une droite de jonction ΑΖ.

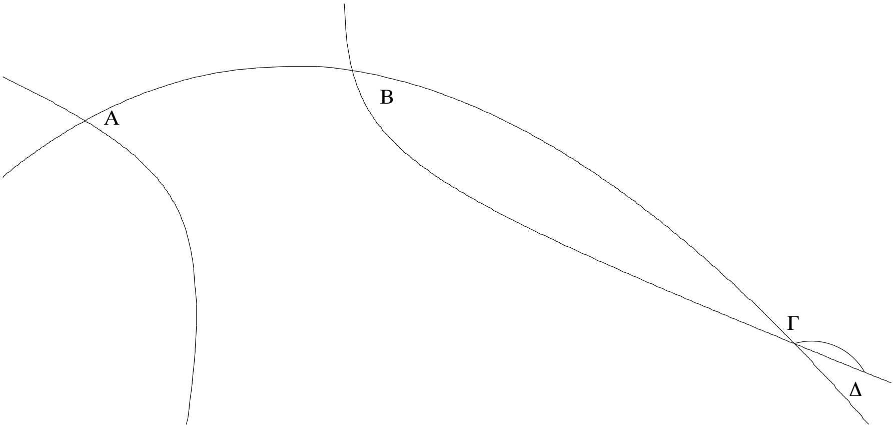
Puisque les sections Δ et ΑΓΖ sont des opposées et que la droite ΑΖ coupe l'hyperbole en deux points, son prolongement ne rencontrera pas l'opposée Δ[105].

La ligne ΑΒΖ ne rencontrera donc pas non plus l'opposée Δ.

– 37 [34V] – *Si une section de cône ou une circonférence de cercle rencontre l'une de deux opposées, elle ne rencontrera pas l'opposée restante en plus de deux points.*

[104] L'emploi du syntagme discontinu ἔστω + participe, fréquent chez Euclide et Archimède, est un *hapax* dans les *théorèmes* des *Coniques* ; voir M. Federspiel, « Sur l'élocution de l'ecthèse dans la géométrie grecque classique », p. 107-108.

[105] II.33.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ συμβαλλέτω τῇ Α κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ καὶ τεμνέτω τὴν Β ἀντικειμένην κατὰ τὰ Β, Γ.

Λέγω ὅτι κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ. Ἡ ἄρα ΒΓΔ τῇ ΒΓ τομῇ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα τὰ κοῖλα, ὅπερ ἀδύνατον.

Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐὰν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς ἀντικειμένης ἐφάπτηται.

– λη΄ – Κώνου τομὴ ἢ κυκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

Φανερὸν δὲ τοῦτο ἐκ τοῦ τῇ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτουσαν αὐτὴν τῇ λοιπῇ κατὰ πλείονα δυεῖν μὴ συμπίπτειν.

1 alt. Α Ψ : del. V[1] || 2 τὴν Β Canon. : τῇ ΝΒ V || 6 μὴ Canon.[pc] : om. V Canon.[ac] || 10 λη΄ Heiberg : λε΄ V (sed litt. om.).

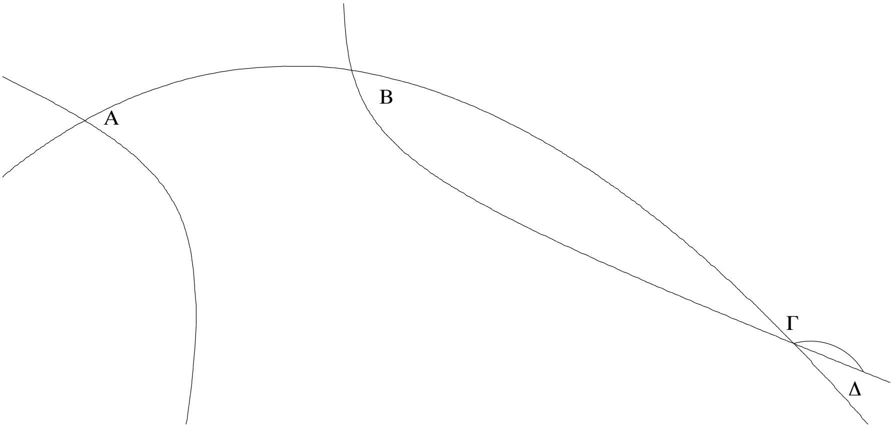


Fig. 37

Soient des opposées Α et Β ; qu'une section de cône ou une circonférence de cercle ΑΒΓ rencontre l'opposée A et qu'elle coupe l'opposée Β en des points Β et Γ.

Je dis qu'elle ne rencontrera pas l'opposée ΒΓ en un autre point.

Qu'elle la rencontre en un point Δ, si c'est possible. La section ΒΓΔ rencontre donc la section ΒΓ en plus de deux points, sans être concave dans le même sens que la section ΒΓ, ce qui est impossible[106].

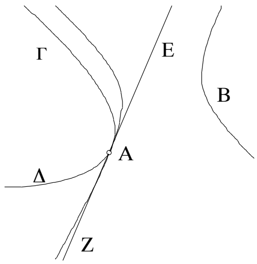
On fera une démonstration semblable si la ligne ΑΒΓ est tangente à l'opposée.

– 38 [35V] – *Une section de cône ou une circonférence de cercle ne rencontrera pas des opposées en plus de quatre points*.

C'est évident en raison du fait que, rencontrant l'une des opposées, elle ne rencontre pas l'opposée restante en plus de deux points[107].

[106] Prop. 35.
[107] Prop. 37.

– λθʹ – Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται τοῖς κοίλοις αὐτῆς, τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΓΑΔ.

Λέγω ὅτι ἡ ΓΑΔ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΕΑΖ· ἑκατέρας δὴ τῶν γραμμῶν ἐπιψαύει κατὰ τὸ Α, ὥστε οὐ συμπεσεῖται τῇ Β, ὥστε οὐδὲ ἡ ΓΑΔ.

–μʹ – Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ᾿ ἓν ἐφάπτηται σημεῖον, καθ᾿ ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς ἀντικειμέναις.

1 λθʹ Heiberg : λϛʹ V (sed litt. om.) || 7 ΕΑΖ Ψ : ΑΕΖ V || 9 ΓΑΔ Ψ : ΑΓΔ V || 10 μʹ Heiberg : λζʹ V (sed litt. om.).

– 39 [36V] – *Si une section de cône ou une circonférence de cercle est tangente à l'une de deux opposées du côté de la concavité de celle-ci, elle ne rencontrera pas l'autre opposée.*

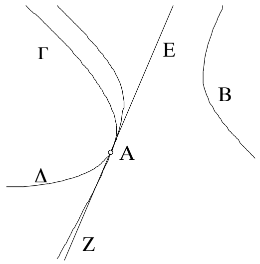


Fig. 39

Soient des opposées Α et Β, et qu'une section ΓΑΔ soit tangente à la section Α[108].

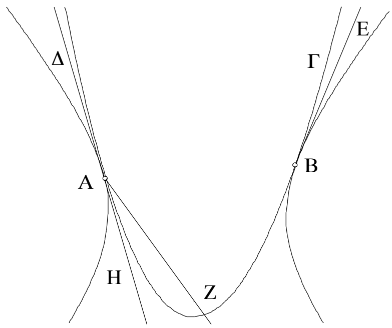
Je dis que la section ΓΑΔ ne rencontrera pas l'autre section.

Que soit menée de Α une tangente ΕΑΖ. Elle est alors tangente à chacune des lignes en Α, de sorte qu'elle ne rencontrera pas l'opposée Β[109], de sorte que la section ΓΑΔ ne rencontrera pas non plus l'opposée Β.

– 40 [37V] – *Si une section de cône ou une circonférence de cercle est tangente à chacune de deux opposées en un point, elle ne rencontrera pas les opposées en un autre point.*

[108] L'*ecthèse* est incomplète ; il manque la reprise de τοῖς κοίλοις αὐτῆς.

[109] II.33.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἐφαπτέσθω ἑκατέρας τῶν Α, Β κατὰ τὰ Α, Β.

Λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ γραμμὴ καθ' ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς Α τομῆς ἐφάπτεται καθ' ἓν συμπίπτουσα καὶ τῇ Β, τῆς Α ἄρα τομῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ τὰ κοῖλα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ τῆς Β.

Ἤχθωσαν τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΒΕ· αὗται δὴ ἐφάπτονται τῆς ΑΒΓ γραμμῆς.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ἡ ἑτέρα αὐτῶν, καὶ ἔστω ἡ ΑΖ. Μεταξὺ ἄρα τῆς ΑΖ ἐφαπτομένης καὶ τῆς Α τομῆς παρεμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΗ, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐφάψονται ἄρα τῆς ΑΒΓ, καὶ διὰ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἡ ΑΒΓ καθ' ἕτερον οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β ἀντικειμέναις.

– μα′ – Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα συμπίπτῃ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΔ, Ζ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΒΔ συμβαλλέτω κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ [τοῖς κοίλοις], καὶ τῆς ΑΒΓ ἔστω ἀντικειμένη ἡ Ε.

Λέγω ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ.

3 Β Ψ : Γ V || 10 ΑΖ edd. (jam Mont) : ΑΖ, ὅπως καὶ φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἡ ΓΑΔ γραμμὴ συμπίπτῃ καὶ τῇ Β ἀντικειμένῃ, οὐκ ἐφάψεται τῆς Α τοῖς κοίλοις ἑαυτῆς· δειχθήσεται γὰρ ἀντιστρόφως V vide adn. || 12 ΑΗ Ψ : Η V || 14 μα′ Heiberg : λη′ V (sed litt. om.) || ὑπερβολὴ Ψ : -βολῇ V || 18 ΑΒΔ, Ζ] ΑΒ, ΔΖ V || ΑΒΓ Ψ : ΑΒ V || ΑΒΔ Ψ : ΑΔ V || 20 τοῖς κοίλοις del. Federspiel[6].

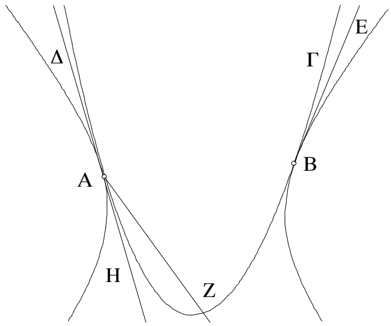


Fig. 40

Soient des opposées A et B, et qu'une section de cône ou une circonférence de cercle soit tangente à chacune des opposées A et B en des points A et B.

Je dis que la ligne ABΓ ne rencontrera pas les sections A et B en un autre point.

Dès lors[110], puisque la ligne ABΓ est tangente à la section A et rencontre aussi B en un point, alors, elle ne sera pas tangente à la section A du côté de la concavité de celle-ci[111]. On démontrera pareillement qu'elle ne le sera pas non plus à la section B.

Que soient menées des tangentes AΔ et BE aux sections A et B ; elles seront alors tangentes à la ligne ABΓ.

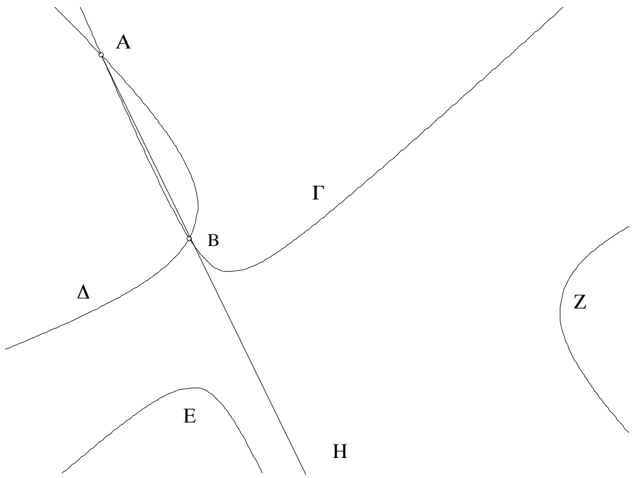
Qu'une de ces droites, soit AZ, coupe la ligne ABΓ, si c'est possible[112]. Une droite AH est donc insérée entre la tangente AZ et la section A, ce qui est impossible[113].

Elles seront donc tangentes à la section ABΓ, et, pour cette raison, il est évident que la ligne ABΓ ne rencontre pas les opposées A et B en un autre point.

– 41 [38V]– *Si une hyperbole rencontre l'une de deux opposées en deux points en ayant sa convexité en sens contraire, son opposée ne rencontrera pas l'autre des deux opposées.*

Soient des opposées ABΔ et Z ; qu'une hyperbole ABΓ rencontre l'opposée ABΔ aux points A et B en ayant sa convexité en sens contraire [de la concavité de cette opposée], et soit l'opposée E de l'hyperbole ABΓ.

[110] On attend ἐπεὶ γὰρ.
[111] Prop. 39.
[112] Voir Note complémentaire [27].
[113] I.32.



Ἐπεζεύχθω ἡ AB καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H.

Ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴν τὴν ABΔ εὐθεῖα τέμνει ἡ ABH, ἐκβαλλομένη δὲ ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, οὐ συμπεσεῖται τῇ Z τομῇ. Ὁμοίως δὴ διὰ τὴν ABΓ ὑπερβολὴν οὐδὲ τῇ E ἀντικειμένῃ συμπίπτει.

Οὐδὲ ἡ E ἄρα τῇ Z συμπεσεῖται.

– μβʹ – Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ A, B, καὶ ἡ AΓB ὑπερβολὴ συμπιπτέτω ἑκατέρᾳ τῶν A, B ἀντικειμένων.

Λέγω ὅτι ἡ τῇ AΓB ἀντικειμένη οὐ συμβάλλει ταῖς A, B τομαῖς κατὰ δύο σημεῖα.

3 οὐ Heiberg : ὥστε οὐ V ‖ 6 Z Ψ : om. V lacuna 8 litt. relicta ‖ 7 μβʹ Heiberg : λθʹ V (sed litt. om.) ‖10 AΓB Ψ : AB V.

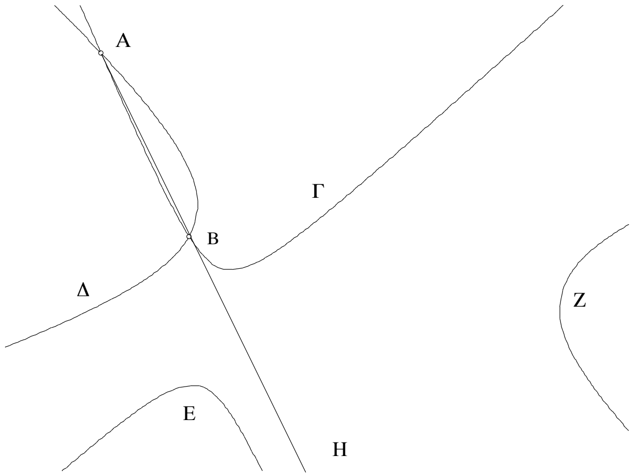


Fig. 41

Je dis qu'elle ne rencontrera pas l'opposée Z.

Que soit menée la droite de jonction AB et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point H.

Dès lors, puisqu'une droite ABH coupe une hyperbole ABΔ, et que son prolongement de part et d'autre tombe hors de la section, elle ne rencontrera pas la section Z[114]. Pareillement, en raison de l'hyperbole ABΓ, elle ne rencontre pas non plus l'opposée E.

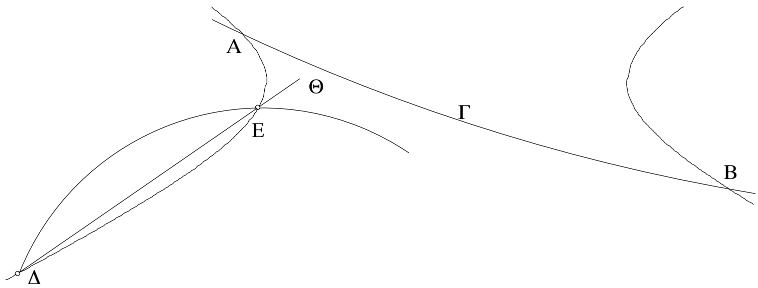
La section E ne rencontrera donc pas non plus la section Z.

– 42 [39V]– *Si une hyperbole rencontre chacune de deux opposées, son oppposée ne rencontrera aucune des deux opposées en deux points.*

Soient des opposées A et B, et que l'hyperbole AΓB[115] rencontre chacune des opposées A et B.

Je dis que l'opposée de AΓB ne rencontre pas les sections A et B en deux points.

[114] II.33.
[115] On attend l'expression indéfinie καὶ ὑπερβολὴ ἡ AΓB.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω <τῇ Α> κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω. Διὰ μὲν δὴ τὴν ΔΕ τομὴν οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕ εὐθεῖα τῇ ΑΒ τομῇ, διὰ δὲ τὴν ΑΕΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Β· διὰ γὰρ τῶν τριῶν τόπων ἐλεύσεται· ὅπερ ἀδύνατον.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ τῇ Β τομῇ κατὰ δύο σημεῖα συμπεσεῖται.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ἐφάψεται ἑκατέρας αὐτῶν. Ἀγαγόντες γὰρ ἐπιψαύουσαν τὴν ΘΕ ἐφάπτεται [μὲν] αὕτη ἑκατέρας τῶν τομῶν, ὥστε διὰ μὲν τὴν ΔΕ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΓ, διὰ δὲ τὴν ΑΕ οὐ συμβάλλει τῇ Β, ὥστε οὐδὲ ἡ ΑΓ τῇ Β συμβάλλει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

– μγʹ – Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα πρὸς ἑκατέραν τὰ κυρτά, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν τῶν Α, Β τεμνέτω κατὰ δύο σημεῖα ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά.

Λέγω ὅτι ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΕΖ οὐδεμιᾷ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.

1 τῇ Α addidi ‖ τὰ c Ψ : om. V ‖ 9 μὲν delevi (prop. Heiberg) ‖ αὕτη Heiberg : αὐτὴ V ‖ 13 μγʹ Heiberg : μʹ V (sed litt. om.) ‖ 16 ΓΑΒΔ] ΓΑ, ΒΔ V.

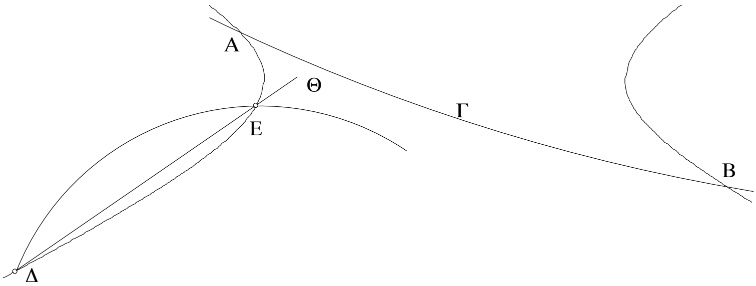


Fig. 42

Qu’elle rencontre <Α> en des points Δ et Ε, si c’est possible ; que soit menée une droite de jonction ΔΕ et qu’elle soit prolongée. En raison de la section ΔΕ, la droite ΔΕ ne rencontrera pas la section ΑΒ[116], et en raison de la section ΑΕΔ, elle ne rencontrera pas la section Β, car elle passera par les trois lieux[117], ce qui est impossible.

On démontrera pareillement qu’elle ne rencontrera pas non plus la section Β en deux points.

Pour les mêmes raisons, elle ne sera pas non plus tangente à l’une et à l’autre opposées[118]. En effet, si on[119] mène la droite ΘΕ comme tangente, elle est tangente à chacune des sections, de sorte que, en raison de la section ΔΕ, elle ne rencontrera pas la section ΑΓ[120], et, en raison de la section ΑΕ, elle ne rencontre pas la section Β ; de sorte que ΑΓ ne rencontre pas non plus la section Β, ce qui contredit l’hypothèse.

– 43 [40V] – *Si une hyperbole coupe chacune de deux opposées en deux points en ayant sa convexité en sens contraire de chacune, son opposée ne rencontrera aucune des opposées.*

Soient des opposées Α et Β, et qu’une hyperbole ΓΑΒΔ coupe chacune des sections Α et Β en deux points en ayant sa convexité en sens contraire.

Je dis que son opposée ΕΖ ne rencontrera aucune des sections Α et Β.

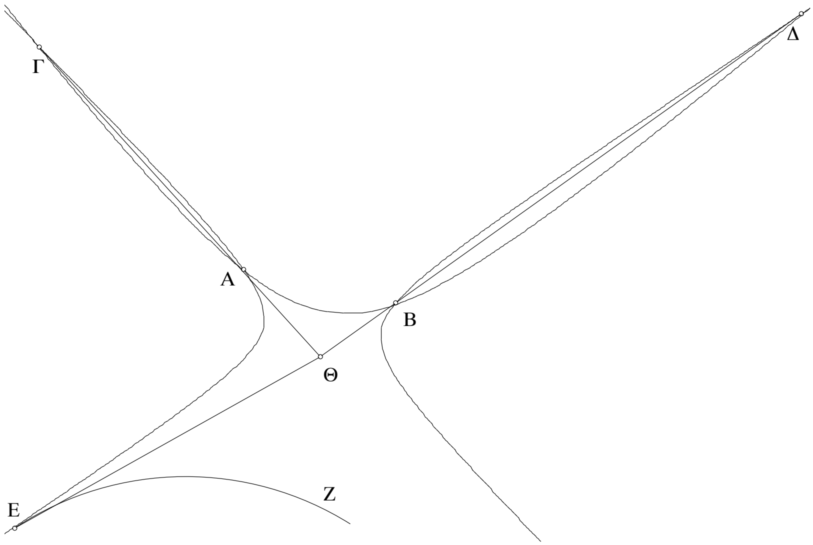
[116] II.33.

[117] II.33.

[118] Ce développement est absent de la traduction arabe.

[119] Le participe ἀγαγόντες devrait être accordé au sujet d’un verbe à la première personne du pluriel ; ce verbe manque ; l’anacoluthe a été relevée par Heiberg, n. 1, p. 63.

[120] II.33.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ Α κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΑ, ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις· συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔσται δὴ τὸ Θ ἐν τῇ περιεχομένῃ γωνίᾳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς. Καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΑΘΒ περιεχομένης γωνίας.

Πάλιν ἐπεὶ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΓΑΕ, καὶ συμπίπτουσιν αἱ ΓΑΘ, ΘΕ, καὶ αἱ Γ, Α συμπτώσεις οὐ περιέχουσι τὴν Ε, τὸ Θ σημεῖον ἔσται μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΕ τομῆς. Καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΒΔ· † ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Θ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΓΘΕ γωνίας †, ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ καὶ εἰς τὴν ὑπὸ ΑΘΒ.

11-12 locus corruptus.

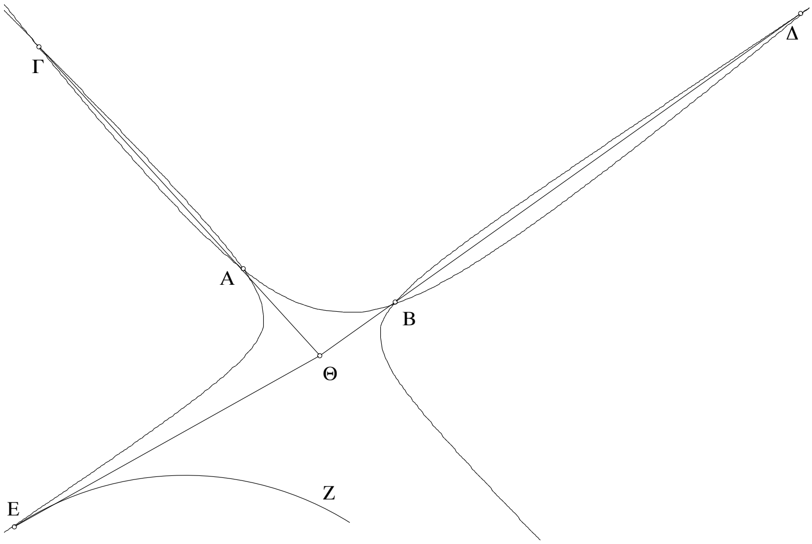


Fig. 43

Qu'elle rencontre A en un point E, si c'est possible[121] ; que soient menées les droites de jonction ΓA et ΔB et qu'elles soient prolongées ; elles se rencontreront alors l'une l'autre[122] ; qu'elles se rencontrent en un point Θ ; Θ sera alors dans l'angle compris par les asymptotes de la section ΓABΔ[123]. D'autre part, EZ est son opposée ; la droite joignant E à Θ tombera donc à l'intérieur de l'angle AΘB.

De même[124], puisque ΓAE est une hyperbole, que les droites ΓAΘ et ΘE se rencontrent, que les points de rencontre Γ et A ne comprennent pas le point de rencontre E, le point Θ sera entre les asymptotes de la section ΓAE[125]. D'autre part BΔ est son opposée ; †la droite joignant B à Θ tombera donc à l'intérieur de l'angle ΓΘE†, ce qui est absurde, puisqu'elle tombe, on l'a vu[126], dans l'angle AΘB.

[121] Cette démonstration apagogique a été corrompue dans sa deuxième partie ; voir les propositions 47 et 51.

[122] II.25.

[123] II.25.

[124] Halley, à la suite de Commandino, introduit directement dans le texte une démonstration correcte, qui, par le recours à II.33, établit que EΘ, avec E comme point de ΓAE, tombe à l'extérieur de l'angle AΘB ; d'où l'absurdité.

[125] Comme le note Heiberg (*Coniques*, II, p. 65, note 1), cette conclusion tirée de II.25 ne vaut que si EΘ coupe la branche ΓAE en deux points ou lui est tangente. On retrouve la même insuffisance dans la proposition 47.

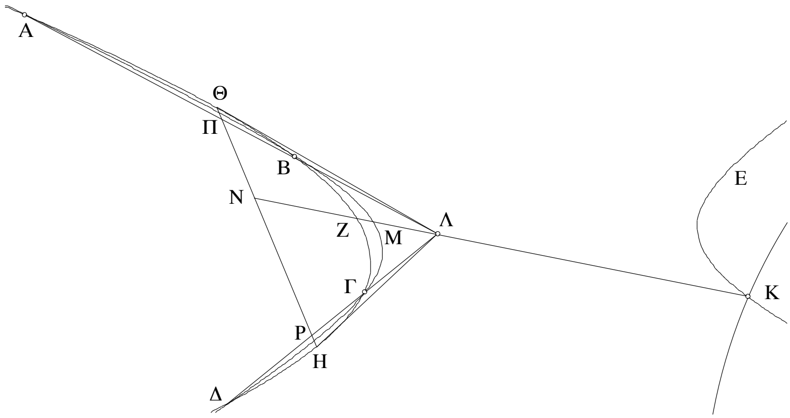
[126] Sur cet imparfait, voir Note complémentaire [47] au Livre II.

Οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ μιᾷ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.

– μδʹ – Ἐὰν ὑπερβολὴ μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ τέσσαρα σημεῖα τέμνῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, Ε, καὶ τεμνέτω ὑπερβολὴ τὴν ΑΒΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ Κ.

Λέγω ὅτι ἡ Κ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ε.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις· συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΛ πρὸς ΛΒ, ἐχέτω ἡ ΑΠ πρὸς ΠΒ, ὃν δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ, ἡ ΔΡ πρὸς ΡΓ. Ἡ ἄρα διὰ τῶν Π, Ρ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται.

2 μδʹ Heiberg : μαʹ V (sed litt. om.) ‖ 5 ΑΒΓΔ, Ε] ΑΒΓΔΕ V ‖ 6 Α, Β, Γ, Δ] ΑΒ, ΓΔ V.

La section ΕΖ ne rencontrera donc aucune des sections Α et Β[127].

– 44 [41V] – *Si une hyperbole coupe l'une de deux opposées en quatre points, son opposée ne rencontrera pas l'autre des opposées.*

Soient des opposées ΑΒΓΔ et Ε ; qu'une hyperbole coupe la section ΑΒΓΔ en quatre points Α, Β, Γ et Δ , et soit son opposée Κ.

Je dis que Κ ne rencontrera pas Ε.

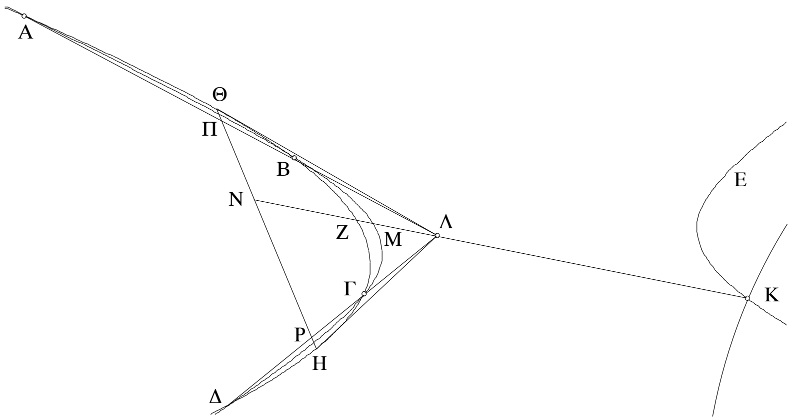


Fig. 44

Qu'elle la rencontre en un point Κ, si c'est possible ; que soient menées des droites de jonction ΑΒ et ΓΔ et qu'elles soient prolongées ; elles se rencontreront alors l'une l'autre[128] ; qu'elles se rencontrent en un point Λ ; que ΑΠ ait avec ΠΒ le rapport que ΑΛ a avec ΛΒ, et que ΔΡ ait avec ΡΓ celui que ΔΛ a avec ΛΓ. La droite menée par Π et Ρ rencontrera donc chacune des sections, et les droites menées de Λ aux points de concours seront tangentes[129].

[127] Dans son commentaire, Eutocius expose une variante de démontration par la voie directe ; il fera de même pour la proposition 51.

[128] II.25.

[129] Prop. 9.

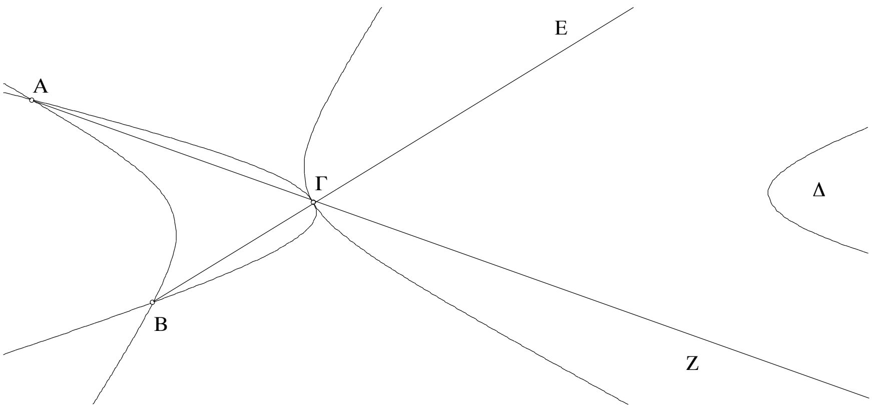
Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΚΛ καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὴν ὑπὸ ΒΛΓ γωνίαν καὶ τὰς τομᾶς κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον. Τεμνέτω κατὰ τὰ Ζ, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὰς ΑΘΖΗ, Κ ἀντικειμένας ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, ἡ ΝΖ πρὸς ΖΛ, διὰ δὲ τὰς ΑΒΓΔ, Ε ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα αἱ Ε, Κ συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

– με′ – Ἐὰν ὑπερβολὴ τῇ μὲν τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα αὐτῇ τὰ κοῖλα, τῇ δὲ καθ᾽ ἓν σημεῖον, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, Γ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓΒ τῇ μὲν ΑΒ συμπιπτέτω κατὰ τὰ Α, Β, τῇ δὲ Γ καθ᾽ ἓν τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη ἡ Δ.

Λέγω ὅτι ἡ Δ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, Γ συμπεσεῖται.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν. Αἱ ἄρα ΑΓ, ΒΓ τῇ Δ τομῇ οὐ συμπεσοῦνται.

Ἀλλ᾽ οὐδὲ τῇ Γ τομῇ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται πλὴν τὸ Γ· εἰ γὰρ συμβάλλουσι καὶ καθ᾽ ἕτερον, τῇ ΑΒ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσοῦνται· ὑπόκεινται δὲ συμπίπτουσαι· αἱ ΑΓ, ΒΓ ἄρα εὐθεῖαι τῇ μὲν Γ τομῇ καθ᾽ ἓν συμβάλλουσι τὸ Γ, τῇ δὲ Δ τομῇ οὐδὲ ὅλως συμβάλλουσιν.

7 με′ Heiberg : μβ′ V (sed litt. om.) ‖ 8 καθ᾽ ἓν Halley : κατὰ τὸ ἓν V ‖ 11 ΑΒ, Γ] ΑΒΓ V ‖ 12 ΑΓΒ Ψ : ΑΓ, ΒΓ V ‖ 14 ΑΒ, Γ] ΑΒΓ V ‖ 18 συμβάλλουσι c : συμβάλλωσι V.

Que soit menée une droite de jonction ΚΛ et qu'elle soit prolongée ; elle coupera alors l'angle ΒΛΓ et les sections en tel et tel point ; qu'elle les coupe en des points Ζ et Μ ; en raison des opposées ΑΘΖΗ et Κ, ΝΖ sera alors à ΖΛ comme ΝΚ est à ΚΛ, et, en raison des opposées ΑΒΓΔ et Ε, ΝΜ sera à ΜΛ comme ΝΚ est à ΚΛ[130], ce qui est absurde.

Les sections Ε et Κ ne se rencontreront donc pas l'une l'autre.

– 45 [42V] – *Si une hyperbole rencontre l'une de deux opposées en deux points en ayant sa concavité dans le même sens qu'elle, et qu'elle rencontre l'autre opposée en un seul point, son opposée ne rencontrera aucune des opposées.*

Soient des opposées ΑΒ et Γ; qu'une hyperbole ΑΓΒ rencontre ΑΒ en des points Α et Β et Γ en un point Γ, et que l'opposée de ΑΓΒ soit Δ.

Je dis que Δ ne rencontrera aucune des opposées ΑΒ et Γ.

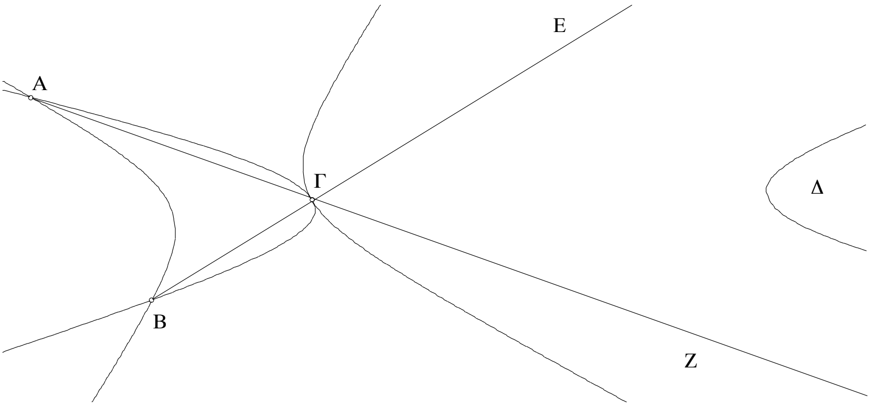


Fig. 45

Que soient menées des droites de jonction ΑΓ et ΒΓ et qu'elles soient prolongées. Les droites ΑΓ et ΒΓ ne rencontreront donc pas la section Δ[131].

Mais elles ne rencontreront pas non plus la section Γ en un autre point que Γ ; en effet, si elles la rencontrent aussi en un autre point, elles ne rencontreront pas l'opposée ΑΒ[132] ; or, par hypothèse, elles la rencontrent ; ΑΓ et ΒΓ rencontrent donc la section Γ en un seul point Γ, mais ne rencontrent pas du tout la section Δ.

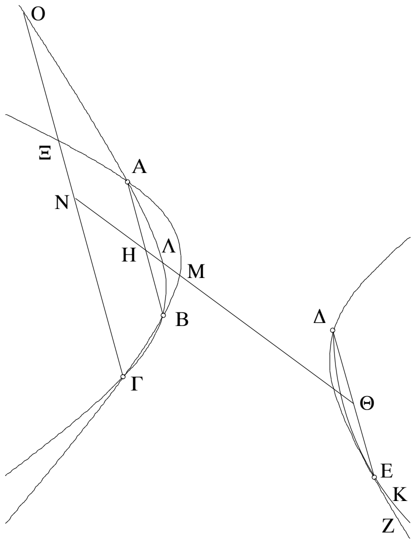
[130] III.39.
[131] II.33.
[132] II.33.

Ἡ Δ ἄρα ἔσται ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΓΖ, ὥστε ἡ Δ τομὴ οὐ συμπεσεῖται ταῖς ΑΒ, Γ.

– μϛʹ – Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ τρία σημεῖα συμβάλλῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται πλὴν καθ' ἕν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΜΒΓ συμβαλλέτω τῇ ΑΒΓ κατὰ τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, ἔστω δὲ τῇ ΑΜΓ ἀντικειμένη ἡ ΔΕΚ [τῇ δὲ ΑΒΓ ἡ ΔΕΖ].

Λέγω ὅτι ἡ ΔΕΚ τῇ ΔΕΖ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ.

Ἤτοι δὴ παράλληλοί εἰσιν ἢ οὔ.

2 ΑΒ, Γ] ΑΒΓ V || 3 μϛʹ Heiberg : μγʹ V (sed litt. om.) || 7 Α, Β, Γ] ΑΒΓ V || 8 τῇ — ΔΕΖ del. Heiberg (om. Ψ).

La section Δ sera donc sous[133] l'angle ΕΓΖ, de sorte que la section Δ ne rencontrera pas les opposées ΑΒ et Γ.

– 46 [43V] – *Si une hyperbole rencontre l'une de deux opposées en trois points, son opposée ne rencontrera l'autre des deux opposées qu'en un seul point.*

Soient des opposées ΑΒΓ et ΔΕΖ ; qu'une hyperbole ΑΜΒΓ rencontre ΑΒΓ en trois points Α Β et Γ et soit l'opposée ΔΕΚ de l'hyperbole ΑΜΓ [et l'opposée ΔΕΖ de l'hyperbole ΑΒΓ].

Je dis que l'opposée ΔΕΚ ne rencontre pas l'opposée ΔΕΖ en plus d'un point.

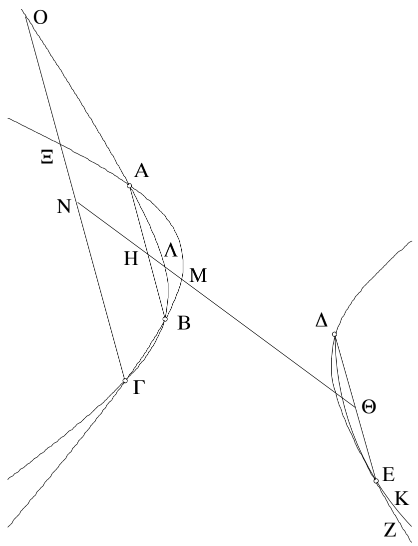


Fig. 46.1

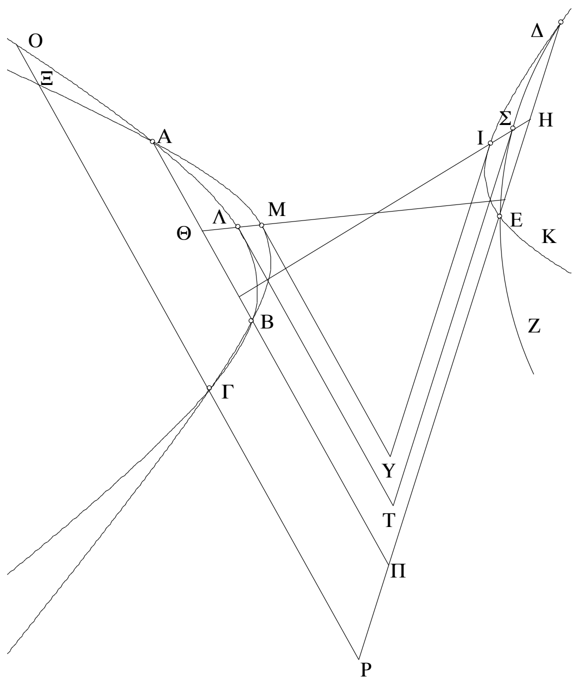
Qu'elle la rencontre en des points Δ et Ε, si c'est possible, et que soient menées des droites de jonction ΑΒ et ΔΕ.

Ces droites sont ou bien parallèles ou bien non.

[133] On attend la préposition ἐν.

Ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ πασῶν τῶν τομῶν καὶ τεταγμένως ἐπ᾽ αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΔΕ.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΓΝΞΟ· ἔσται δὴ καὶ αὐτὴ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένη καὶ συμπεσεῖται ταῖς τομαῖς κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο. Εἰ γὰρ κατὰ τὸ αὐτό, οὐκέτι κατὰ τρία συμβάλλουσιν, ἀλλὰ τέσσαρα· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ΑΜΒ τομῇ ἴση ἡ ΓΝ τῇ ΝΞ, ἐν δὲ τῇ ΑΛΒ ἡ ΓΝ τῇ ΝΟ. Καὶ ἡ ΟΝ ἄρα τῇ ΝΞ ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.



1 αἱ Ψ : om. V || ΑΒ, ΔΕ] ΑΒΔΕ V || 5 ΓΝΞΟ] ΓΝ, ΞΟ V || 9 ΟΝ Canon. : ΟΝΡ V.

Qu'elles soient d'abord parallèles ; que les droites ΑΒ et ΔΕ soient coupées en deux parties égales en des points Η et Θ, et que soit menée une droite de jonction ΗΘ ; elle est donc un diamètre de toutes les sections[134] et les droites ΑΒ et ΔΕ sont abaissées sur elle de manière ordonnée.

Que soit menée une droite ΓΝΞΟ de Γ parallèlement à ΑΒ ; elle sera alors aussi abaissée sur le diamètre de manière ordonnée et elle rencontrera les sections en tel et tel point ; en effet, si elle les rencontre en un même point, les sections ne se rencontrent plus en trois points, mais en quatre ; dans la section ΑΜΒ, ΓΝ sera donc égale à ΝΞ, et dans la section ΑΛΒ, ΓΝ sera égale à ΝΟ. ΟΝ sera donc aussi égale à ΝΞ, ce qui est impossible.

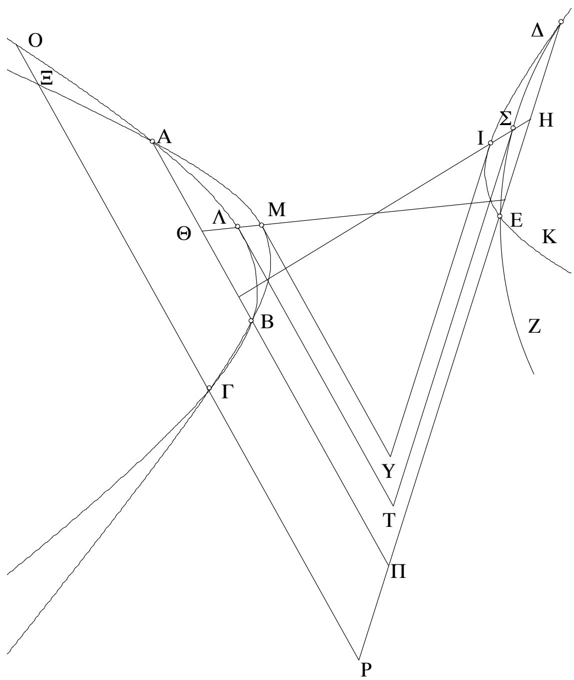


Fig. 46.2[135]

[134] II.36.

[135] La figure transmise par V a été corrompue (elle représente trois tangentes au lieu de quatre, les points Ι, Υ, Τ étant alignés). L'éditeur Heiberg a suivi la tradition manuscrite. Halley édite une figure corrigée.

Μὴ ἔστωσαν δὴ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΔΕ, ἀλλ᾽ ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π, καὶ ἡ ΓΟ ἤχθω παρὰ τὴν ΑΠ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΔΠ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ρ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ τῶν Η, Θ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ ΗΣΙ, ΘΛΜ, ἀπὸ δὲ τῶν <Σ>, Ι, Λ, Μ, ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΙΥ, <Σ>Τ, ΜΥ, ΛΤ· ἔσονται δὴ αἱ μὲν Ι<Υ, Σ>Τ παρὰ τὴν ΔΠ, αἱ δὲ ΛΤ, ΜΥ παρὰ τὰς ΑΠ, ΟΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ὑπὸ ΑΠΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΠΕ, <τὸ δὲ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΤ, τὸ ὑπὸ ΑΠΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΠΕ>, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΤ. Διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΜΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΥΙ, τὸ ὑπὸ ΞΡΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΡΕ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛΤ πρὸς τὸ ἀπὸ ΣΤ, τὸ ὑπὸ ΟΡΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΡΕ.

Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΟΡΓ τῷ ὑπὸ ΞΡΓ, ὅπερ ἀδύνατον.

– μζʹ – Ἐὰν ὑπερβολὴ τῆς μὲν ἐφάπτηται τῶν ἀντικειμένων, τὴν δὲ κατὰ δύο σημεῖα τέμνῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΒΔ τὴν μὲν ΑΒΓ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τῆς δὲ Δ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστω τῆς ΑΒΔ τομῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ.

Λέγω ὅτι ἡ ΓΕ οὐδεμιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.

4 κατὰ Ψ : καὶ κατὰ V ‖ 5 ΘΛΜ Ψ : ΘΛΜΣ V ‖ Σ addidi ‖ 6 Σ addidi ‖ ἔσονται ego : ἔσται V ‖ αἱ ego : ἡ V ‖ Υ, Σ addidi ‖ 9-10 alt. τὸ — ΔΠΕ addidi (jam Halley aliis litteris) vide adn. ‖ 11 ΣΤ ego : ΤΙ V ‖ 12 ΞΡΓ V^1 : ΞΡΠ V ‖ 13 ΣΤ ego : ΤΙ V ‖ 15 μζʹ Heiberg : μδʹ V (sed litt. om.) ‖ ὑπερβολὴ Ψ : ὑπερβολῆς V ‖ 18 ΑΒΓ, Δ] ΑΒ, ΓΔ V ‖ 21 ΑΒΓ, Δ] ΑΒΓΔ V

Que ΑΒ et ΔΕ ne soient pas parallèles, mais que leurs prolongements se rencontrent en un point Π ; que ΓΟ soit menée parallèlement à ΑΠ et qu'elle rencontre le prolongement de ΔΠ en un point Ρ ; que ΑΒ et ΔΕ soient coupées en deux parties égales en des points Η et Θ ; que, par Η et Θ, soient menés des diamètres ΗΣΙ et ΘΛΜ[136], que, de <Σ>[137], Ι, Λ, Μ, soient menées des tangentes ΙΥ, <Σ>Τ, ΜΥ et ΛΤ aux sections ; Ι<Υ, Σ>Τ seront alors parallèles à ΔΠ, et ΛΤ et ΜΥ seront parallèles à ΑΠ et ΟΡ[138].

Puisque le rectangle ΑΠ,ΠΒ est au rectangle ΔΠ,ΠΕ comme le carré sur ΜΥ est à celui sur ΥΙ[139], <que, d'autre part, le rectangle ΑΠ,ΠΒ est au rectangle ΔΠ,ΠΕ comme le carré sur ΛΤ est à celui sur ΣΤ >[140], alors le carré sur ΛΤ est aussi à celui sur ΣΤ comme celui sur ΜΥ est à celui sur ΥΙ. Pour les mêmes raisons, le rectangle ΞΡ,ΡΓ est au rectangle ΔΡ,ΡΕ comme le carré sur ΜΥ est à celui sur ΥΙ, et le rectangle ΟΡ,ΡΓ est au rectangle ΔΡ,ΡΕ comme le carré sur ΛΤ est à celui sur ΣΤ.

Le rectangle ΟΡ,ΡΓ est donc égal au rectangle ΞΡ,ΡΓ, ce qui est impossible.

– 47 [44V] – *Si une hyperbole est tangente à l'une de deux opposées et coupe l'autre en deux points, son opposée ne rencontrera aucune des deux opposées.*

Soient des opposées ΑΒΓ et Δ ; qu'une certaine hyperbole ΑΒΔ coupe l'opposée ΑΒΓ en des points Α et Β, qu'elle soit tangente à l'opposée Δ en un point Δ, et soit ΓΕ l'opposée de la section ΑΒΔ.

Je dis que l'opposée ΓΕ ne rencontrera aucune des opposées ΑΒΓ et Δ.

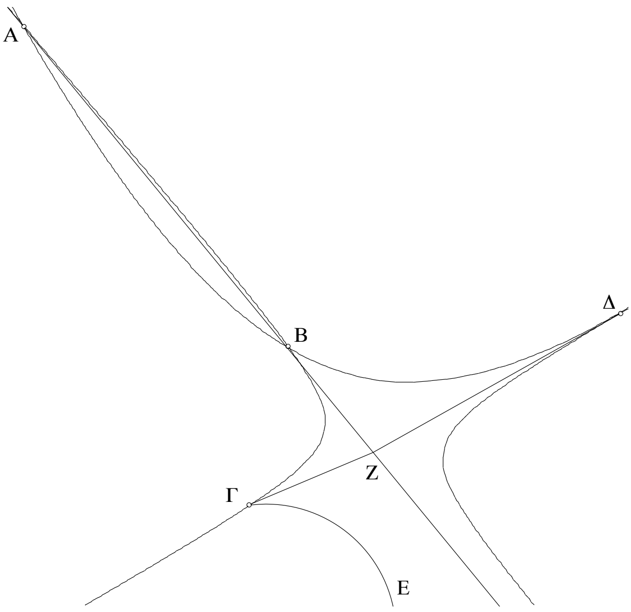
[136] Les trois points Η, Σ, I sont alignés, tout comme les points Θ, Λ, Μ ; cette erreur est commune au texte grec et à la traduction arabe, voir tome 2.2, p. 190, note 28. On retrouve la même erreur dans les propositions 49 et 50.

[137] Le texte de **V** correspond à la figure corrompue qu'il transmet (voir *supra*, note 135). Que la faute ait été d'abord commise sur la figure ou dans le texte, on a manifestement veillé ensuite à la concordance du texte et de la figure.

[138] II.5.

[139] III.19.

[140] Pour cette restitution, je n'ai pas suivi le texte de la Recension Ψ, comme le fait Heiberg. Il faut, en effet, retrouver le texte susceptible d'éclairer le saut du même au même.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἤχθω συμπίπτουσα τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον ἐντὸς ἔσται τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒΔ τομῆς. Καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΒΖΔ περιεχομένης γωνίας.

Πάλιν ἐπεὶ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒΓ, καὶ συμπίπτουσιν αἱ ΑΒ, ΓΖ, καὶ αἱ Α, Β συμπτώσεις οὐ περιέχουσι τὴν Γ, τὸ Ζ σημεῖον μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων ἐστὶ τῆς ΑΒΓ τομῆς· καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ Δ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ † ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΑΖΓ † γωνίας, ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ καὶ εἰς τὴν ὑπὸ ΒΖΔ.

Οὐκ ἄρα ἡ ΓΕ μιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.

1 ΑΒ V : an ΑΒΓ ? ‖ 7 περιέχουσι c Ψ : περιέχωσι V ‖ 9 Γ V : Δ Heiberg ‖ locus corruptus.

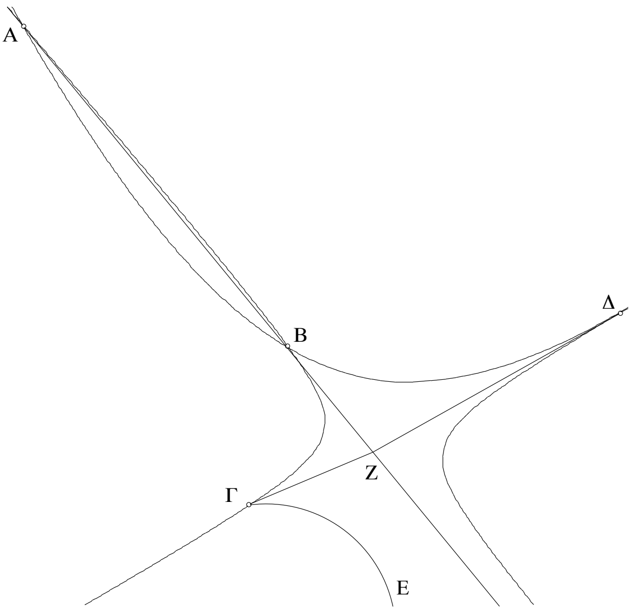


Fig. 47

Qu'elle rencontre l'opposée AB<Γ> en un point Γ, si c'est possible ; que soit menée une droite de jonction AB, et que, par Δ, soit menée une tangente rencontrant la droite AB en un point Z ; le point Z sera donc à l'intérieur des asymptotes de la section ABΔ[141]. D'autre part, ΓE est son opposée ; la droite menée de Γ à Z tombera donc à l'intérieur de l'angle BZΔ.

De même[142], puisque la section ABΓ est une hyperbole, que les droites AB et ΓZ se rencontrent, et que les points de rencontre A et B n'entourent pas le point Γ, le point Z est entre les asymptotes de la section ABΓ[143] ; d'autre part, la section Δ est son opposée ; la droite menée de Γ à Z tombera donc à l'intérieur de l'angle †AZΓ†, ce qui est absurde, puisqu'elle tombe aussi, on l'a vu[144], dans l'angle BZΔ.

L'opposée ΓE ne rencontrera donc aucune des opposées ABΓ et Δ.

[141] II.25.

[142] Halley introduit directement dans le texte une démonstration, qui par le recours à II.33, établit que ΓZ, avec Γ comme point de ABΓ, tombera à l'extérieur de l'angle BZΔ ; d'où l'absurdité.

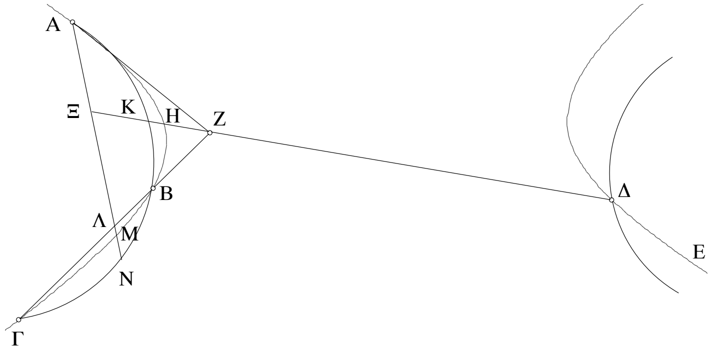
[143] Voir *supra*, note 125. Cette insuffisance est commune au texte grec et à la traduction arabe, voir tome 2.2, p. 194, note 29.

[144] Voir *supra*, note 126.

– μη′ – Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικείμενων καθ᾽ ἓν μὲν ἐφάπτηται, κατὰ δύο δὲ συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΗΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ τῆς ΑΗΓ ἀντικειμένη ἔστω ἡ Ε.

Λέγω ὅτι ἡ Ε τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΑΖ. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι τὸ Ζ σημεῖον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας ἐστίν. Καὶ ἡ ΑΖ ἐφάψεται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων, καὶ ἡ ΔΖ ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Α, Β κατὰ τὰ Η, Κ.

Καὶ ὃν δὴ ἔχει λόγον ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ, ἐχέτω ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΛ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὰς τομὰς κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο. Τεμνέτω κατὰ τὰ Ν, Μ. Αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ Ν, Μ ἐφάψονται τῶν τομῶν, καὶ ἔσται ὁμοίως τοῖς πρότερον διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομήν ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΞΚ πρὸς ΚΖ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ, ἡ ΞΗ πρὸς ΗΖ, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἡ ἀντικειμένη τῇ ἀντικειμένῃ συμπεσεῖται

1 μη′ Heiberg : με′ V (sed litt. om.) ǁ 9 ἐφαπτομένη huc transposui : post ἡ habet V ǁ 14 ΛΒ Ψ : om. V in extr. pag. ǁ 18-19 διὰ — ΗΖ Ψ : om. V ǁ 20 τῇ ἀντικειμένῃ Ψ : om. V.

– 48 [45V] – *Si une hyperbole est tangente à l'une de deux opposées en un point et la rencontre en deux points, son opposée ne rencontrera pas l'autre opposée*.

Soient des opposées ΑΒΓ, Δ ; qu'une certaine hyperbole ΑΗΓ soit tangente en un point Α et coupe la section en des points Β et Γ ; soit l'opposée Ε de l'hyperbole ΑΗΓ.

Je dis que l'opposée Ε ne rencontrera pas l'opposée Δ.

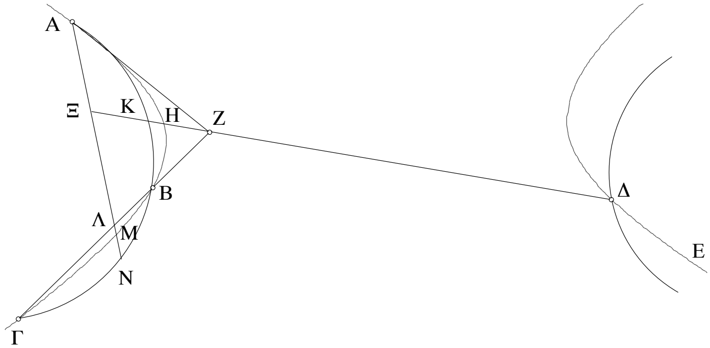


Fig. 48

Qu'elle la rencontre en un point Δ, si c'est possible ; que soit menée une droite de jonction ΒΓ et qu'elle soit prolongée jusqu'en un point Ζ ; que, de Α, soit menée une tangente ΑΖ. Comme plus haut, on démontrera que le point Ζ est à l'intérieur de l'angle compris par les asymptotes[145]. D'autre part, ΑΖ sera tangente à chacune des sections, et le prolongement de ΔΖ coupera les sections entre Α et Β en des points Η et Κ.

Que ΓΛ ait avec ΛΒ le rapport que ΓΖ a avec ΖΒ ; que soit menée une droite de jonction ΑΛ et qu'elle soit prolongée ; elle coupera alors les sections en tel et tel point. Qu'elle les coupe en des points Ν et Μ. Les droites menées de Ζ aux points Ν et Μ seront donc tangentes aux sections[146], et, comme plus haut, en raison de l'une des sections, ΞΚ sera à ΚΖ comme ΞΔ est à ΔΖ[147], et, en raison de l'autre section, ΞΗ sera à ΗΖ comme ΞΔ est à ΔΖ, ce qui est impossible.

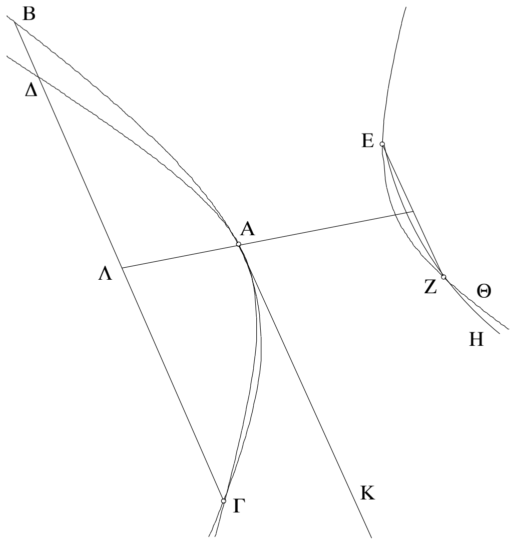
L'opposée ne rencontrera donc pas l'opposée.

[145] II.25.
[146] Prop. 1.
[147] III.39.

– μθʹ – Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη καθ' ἕτερον αὐτῇ σημεῖον συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΔΑΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΔΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΖΘ.

Λέγω ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ δύο τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἤτοι δὴ παράλληλοί εἰσιν ἢ οὔ.

Ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ ἤχθω ἡ διχοτομοῦσα διάμετρος τὴν ΕΖ· ἥξει ἄρα διὰ τοῦ Α καὶ ἔσται διάμετρος τῶν δύο συζυγῶν. Ἤχθω διὰ τοῦ Γ παρὰ τὰς ΑΚ, ΕΖ ἡ ΓΛΔΒ· τεμεῖ ἄρα τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον · ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ ἴση ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ, ἐν δὲ τῇ λοιπῇ ἡ ΓΛ τῇ ΛΒ· τοῦτο δὲ ἀδύνατον.

1 μθʹ Heiberg : μςʹ V (sed litt. om.) ‖ 14 ΓΛΔΒ Ψ : ΓΛ, ΒΔ V.

– 49 [46V] – *Si une hyperbole tangente à l'une de deux opposées la rencontre en un autre point, son opposée ne rencontrera pas l'autre des deux opposées en plus d'un point.*

Soient des opposées ΑΒΓ et ΕΖΗ ; qu'une certaine hyperbole ΔΑΓ soit tangente en un point Α et coupe la section en un point Γ ; et soit l'opposée ΕΖΘ de ΔΑΓ.

Je dis qu'elle[148] ne rencontrera pas l'autre opposée en plus d'un point.

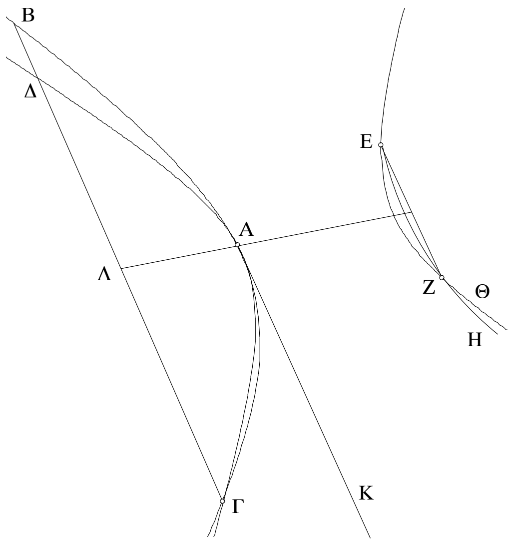


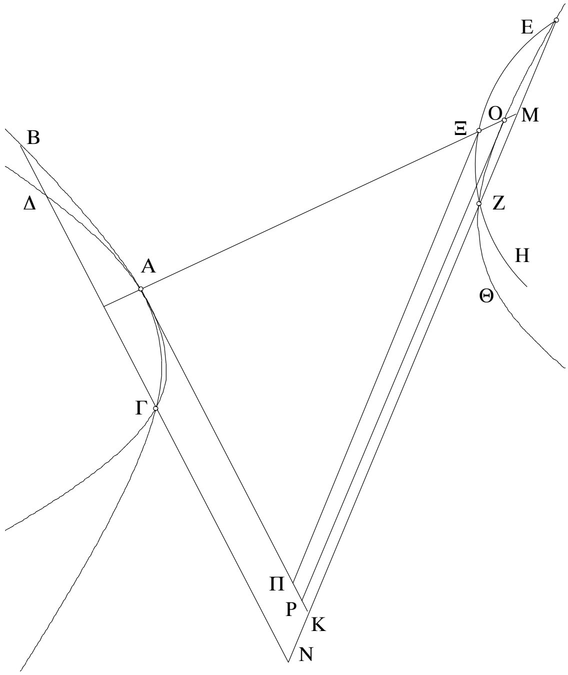
Fig. 49.1

Qu'elle la rencontre en deux points Ε et Ζ, si c'est possible ; que soit menée une droite de jonction ΕΖ, et que, par Α, soit menée une tangente ΑΚ aux sections.

Ou bien ces droites sont parallèles, ou bien elles ne le sont pas.

Qu'elles soient d'abord parallèles, et que soit mené le diamètre coupant en deux parties égales la section ΕΖ ; il passera donc par Α[149] et sera le diamètre des deux sections conjuguées. Que soit menée par Γ une droite ΓΛΔΒ parallèlement à ΑΚ et à ΕΖ ; elle coupera donc les sections en tel et tel point ; dans l'une de ces sections, ΓΛ sera alors égale à ΛΔ, dans l'autre, ΓΛ sera égale à ΛΒ ; or cela est impossible.

[148] La rédaction est rapide. On attend que la section soit nommée.
[149] II.34.



Μὴ ἔστωσαν δὴ παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΕΖ, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἡ ΓΔ παρὰ τὴν ΑΚ ἠγμένη συμπιπτέτω τῇ ΕΖ κατὰ τὸ Ν, ἡ δὲ ΑΜ διχοτομοῦσα τὴν ΕΖ τεμνέτω τὰς τομὰς κατὰ τὰ Ξ, Ο, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν τῶν τομῶν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο αἱ ΞΠ, ΟΡ· ἔσται ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΞ, τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΟ, καὶ διὰ τοῦτο ὡς τὸ ὑπὸ ΔΝΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΝΖ, τὸ ὑπὸ ΒΝΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΝΖ. Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΝΓ τῷ ὑπὸ ΒΝΓ, ὅπερ ἀδύνατον.

– *ν′* – Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν σημεῖον ἐπιψαύῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

3 τὰ Ψ : τὸ V ‖ 9 *ν′* Heiberg : μζ′ V (sed litt. om.).

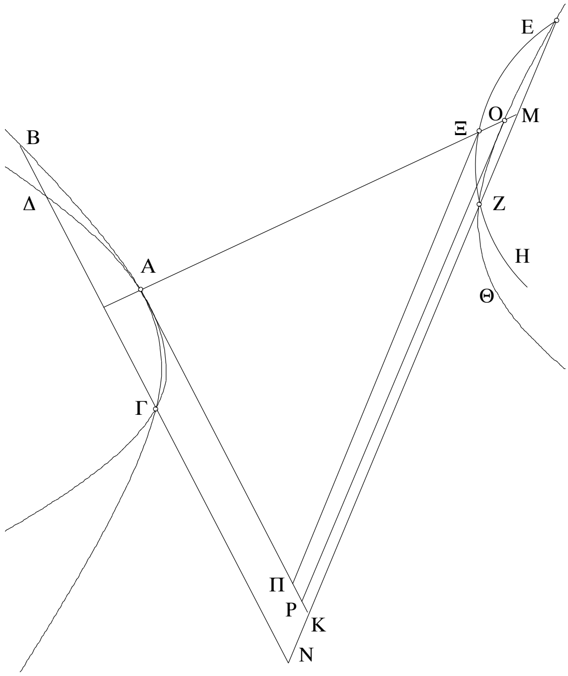


Fig. 49.2

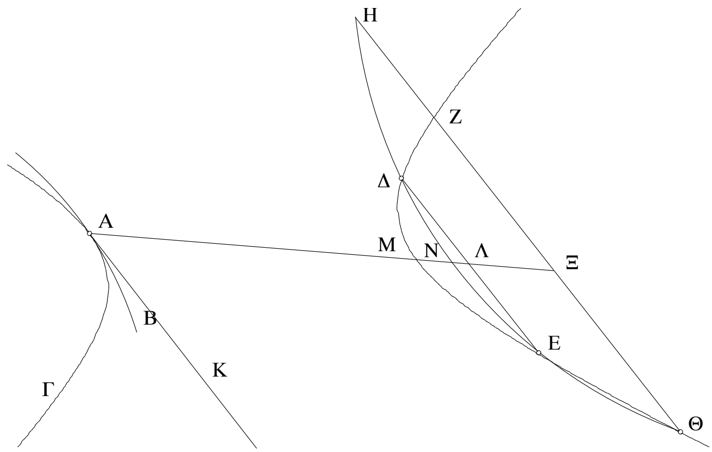
Que AK et EZ ne soient pas parallèles, mais qu'elles se rencontrent au point K ; que ΓΔ, menée parallèlement à AK rencontre EZ en un point N ; que AM, qui coupe la droite EZ en deux parties égales, coupe les sections en des points Ξ et O[150], et que, des points Ξ et O, soient menées des tangentes ΞΠ et OP aux sections ; le carré sur AP sera donc à celui sur PO comme celui sur AΠ est à celui sur ΠΞ[151], et, pour cette raison, le rectangle BN,NΓ sera au rectangle EN,NZ comme le rectangle ΔN,NΓ est au rectangle EN,NZ[152]. Le rectangle ΔN,NΓ est donc égal au rectangle BN,NΓ, ce qui est impossible.

– 50 [47V] – *Si une hyperbole est tangente à l'une de deux opposées en un point, son opposée ne rencontrera pas l'autre opposée en plus de deux points*[153].

[150] Sur cette erreur dans le texte grec et la traduction arabe, voir tome 2.2, p. 82.
[151] III.18.
[152] III.19.
[153] La proposition traite du cas de figure où les hyperboles tangentes ont des concavités de même sens. Le cas opposé sera examiné dans la proposition 54. L'énoncé formulera le cas de figure de manière explicite.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΕΔΗ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστω τῆς ΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΔΖ.

Λέγω ὅτι ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτω κατὰ τρία τὰ Δ, Ε, Θ, καὶ ἤχθω τῶν ΑΒ, ΑΓ ἐφαπτομένη ἡ ΑΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΔΕ· καὶ τετμήσθω ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΛ· ἔσται δὴ διάμετρος ἡ ΑΛ τῶν δύο συζυγῶν καὶ τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Δ, Ε κατὰ τὰ Μ, Ν [ὥστε ἡ ΔΛΕ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ].

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΞΗ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΖ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞΗ· ὥστε καὶ ἡ ΞΖ τῇ ΞΗ ἐστιν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

1 ΕΔΗ Ψ : ΔΕΗ V ‖ 2 ΕΔΖ Ψ : ΔΕΖ V ‖ 3 ΕΔΖ Ψ : ΔΕΖ V ‖ ΕΔΗ Ψ : ΔΕΗ V ‖ 5 κατὰ c Ψ : κατὰ τὰ V ‖ 9 τεμεῖ Halley : τέμνει V ‖ 10 ὥστε — Λ del. Heiberg (om. Ψ) ‖ 11 ΘΖΗ Ψ : ΘΗΖ V ‖ 12 ἐν — ΞΗ Ψ : om. V.

Soient des opposées ΑΒ et ΕΔΗ ; qu'une hyperbole ΑΓ soit tangente à ΑΒ en Α, et soit ΕΔΖ l'opposée de ΑΓ.

Je dis que ΕΔΖ ne rencontrera pas ΕΔΗ en plus de deux points.

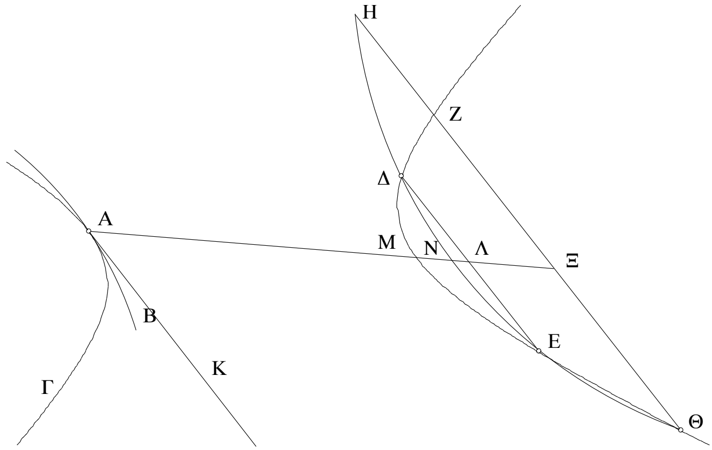


Fig. 50.1

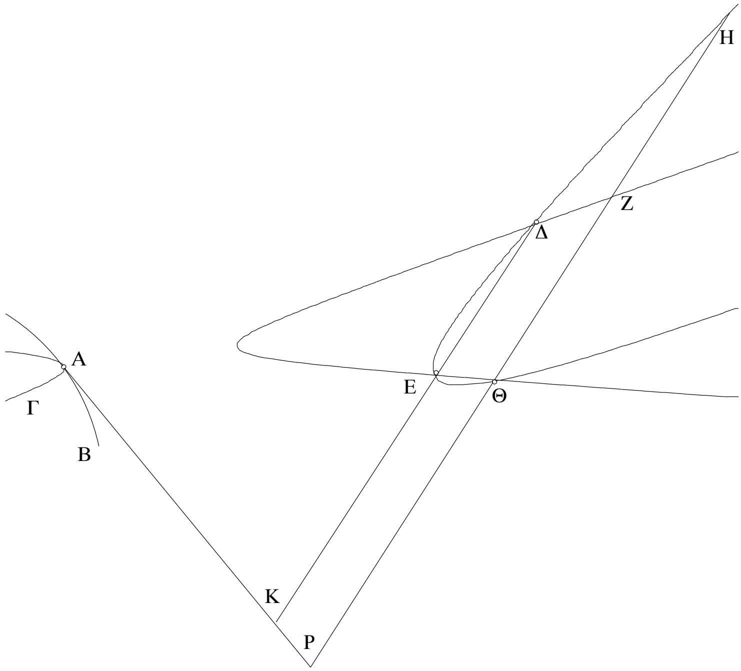
Qu'elle la rencontre en trois points Δ, Ε et Θ, si c'est possible ; que soit menée une tangente ΑΚ aux sections ΑΒ et ΑΓ ; que soit menée une droite de jonction ΔΕ et qu'elle soit prolongée[154], et que ΑΚ et ΔΕ soient d'abord parallèles. Que soit coupée la droite ΔΕ en deux parties égales en un point Λ, et que soit menée une droite de jonction ΑΛ ; ΑΛ sera alors le diamètre[155] des deux conjuguées et coupera les sections entre les points Δ et Ε en des points Μ et Ν [de sorte que ΔΛΕ est coupée en deux parties égales en un point Λ][156].

Que soit menée du point Θ une droite ΘΖΗ parallèle à ΔΕ ; dans l'une des sections, ΘΞ sera alors égale à ΞΖ, et, dans l'autre section, ΘΞ sera égale à ΞΗ ; de sorte que ΞΖ sera aussi égale à ΞΗ, ce qui est impossible.

[154] Cette construction ne concerne que la seconde figure.

[155] II.34.

[156] Cette mention, inutile dans la rédaction transmise, figure également dans la tradition arabe ; voir tome 2.2, p. 235, note 24.



Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΚ, ΔΕ παράλληλοι, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γεγονέτω, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΖΘ κατὰ τὸ Ρ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΚ, ἐν μὲν τῇ ΖΔΕ τομῇ, τὸ ὑπὸ ΖΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ, ἐν δὲ τῇ ΗΔΕ, τὸ ὑπὸ ΗΡΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΑ. Τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΡΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΡΘ, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἡ ΕΔΖ τῇ ΕΔΗ κατὰ πλείονα σημεῖα συμβάλλει ἢ δύο.

5 ΖΔΕ Canon. : ΞΔΕ V || 6 ἀπὸ Ψ : om. V || 8 ΕΔΖ Ψ : ΔΕΖ V || ΕΔΗ Ψ : ΔΕΗ V.

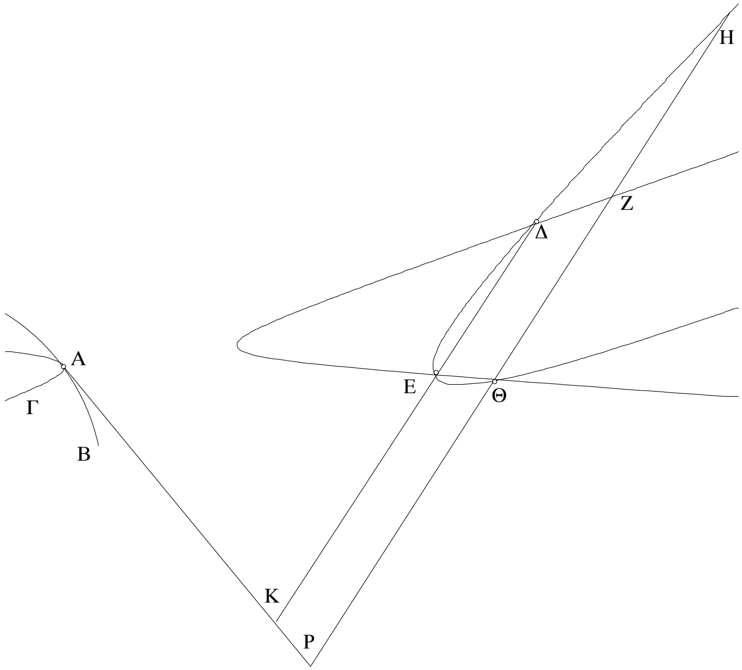


Fig. 50.2

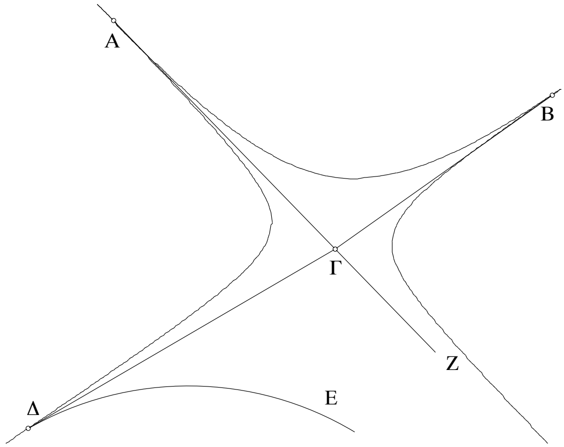
Que AK et ΔE ne soient pas parallèles, mais qu'elles se rencontrent en un point K ; toutes choses égales d'ailleurs, que le prolongement de AK rencontre ZΘ en un point P. Nous démontrerons alors comme auparavant[157] que, dans la section ZΔE, le rectangle ZP,PΘ est au carré sur PA comme le rectangle ΔK,KE est au carré sur AK[158], et que, dans la section HΔE, le rectangle HP,PΘ est au carré sur PA comme le rectangle ΔK,KE est au carré sur AK. Le rectangle HP,PΘ est donc égal au rectangle ZP,PΘ, ce qui est impossible.

La section EΔZ ne rencontre donc pas la section EΔH en plus de deux points.

[157] Sur l'erreur commune au texte grec et à la traduction arabe, voir tome 2.2, p. 84.
[158] III.18.

– να′ – Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ ἑκατέρας αὐτῶν ἐφαπτέσθω κατὰ τὰ Α, Β, ἀντικειμένη δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ Ε.



Λέγω, ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ Α κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις ἐντὸς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒ τομῆς· συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΔ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ἔσται τῶν ΑΓ, ΓΒ. Ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΓΖ, ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ Ε συμπεσεῖται ταῖς Α, Β.

– νβ′ – Ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἀντικειμένων ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν ἐφάπτηται ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχουσα, οὐ συμπεσεῖται καθ᾽ ἕτερον σημεῖον.

1 να′ Heiberg : μη′ V (sed litt. om.) ‖ 2 οὐδεμιᾷ] οὐδὲ μιᾷ V ‖ 12 νβ′ Heiberg : μθ′ V (sed litt. om.) ‖ 12-13 ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων Ψ : om. V.

– 51 [48V] – *Si une hyperbole est tangente à chacune de deux opposées, son opposée ne rencontrera aucune des opposées*[159].

Soient des opposées A et B ; qu'une hyperbole AB soit tangente à chacune des deux sections en des points A et B, et soit E son opposée.

Je dis que la section E ne rencontrera aucune des sections A et B.

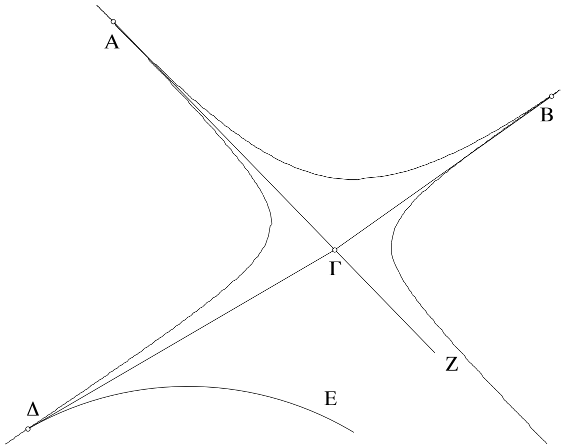


Fig. 51

Qu'elle rencontre A en un point Δ, si c'est possible, et que soient menées depuis les points A et B des tangentes aux sections ; elles se rencontreront alors à l'intérieur des asymptotes de la section AB[160] ; qu'elles se rencontrent en un point Γ, et que soit menée une droite de jonction ΓΔ ; ΓΔ sera donc dans le lieu situé entre les droites AΓ et ΓB. Mais elle est aussi entre les droites BΓ et ΓZ[161], ce qui est impossible.

La section E ne rencontrera donc pas les sections A et B.

– 52 [49V] – *Si chacune de deux opposées est tangente en un point à chacune des opposées et qu'elles ont leur convexité tournée du même côté, elles ne se rencontreront pas en un autre point.*

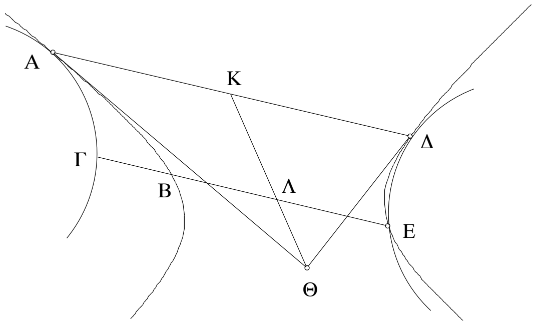
[159] Eutocius fournit une variante par la voie directe.

[160] II.25.

[161] II.33 (avec Δ comme point de la section A) ; voir les passages parallèles des propositions 43 et 47, dont le texte a malheureusement été corrompu.

Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων ἀντικείμεναι κατὰ τὰ Α, Δ [σημεῖα].

Λέγω ὅτι καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Ε.

Ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Δ συμπέπτωκε κατὰ τὸ Ε, ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΑΓ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Δ τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΘ, ΘΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΕΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ δευτέρα διάμετρος ἤχθω τῶν ἀντικειμένων ἡ ΘΛΚ· τεμεῖ δὴ τὴν ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΒ, ΕΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ. Ἴση ἄρα ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται κατ' ἄλλο σημεῖον.

– *νγ'* – Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΔΒ, Ε, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω ἀντικειμένη τῆς ΑΓ ἡ Ζ.

Λέγω ὅτι ἡ Ζ τῇ Ε οὐ συμπεσεῖται.

2 σημεῖα delevi (vide adn.) ‖ 10 ΘΛΚ ego (jam Comm.) : ΘΚΛ V ‖ 14 *νγ'* Heiberg : *ν'* V (sed litt. om.) ‖ 17 ΑΔΒ, Ε] ΑΔΒΕ V.

Que des opposées soient tangentes entre elles en des points Α et Δ[162].
Je dis qu'elles ne se rencontreront pas en un autre point.

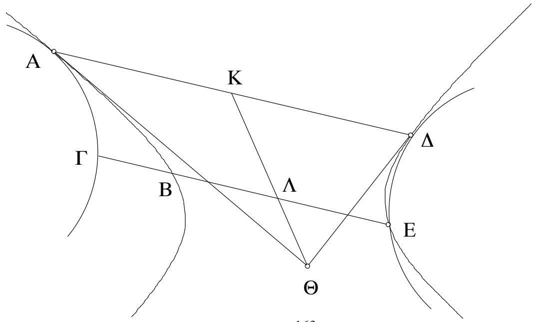


Fig. 52[163]

Qu'elles se rencontrent en un point Ε, si c'est possible.

Dès lors, puisqu'une hyperbole est tangente à l'une de deux opposées au point Δ et la rencontre en un point Ε, alors la section ΑΒ ne rencontre pas la section ΑΓ en plus d'un point[164].

Que soient menées des points Α et Δ des tangentes ΑΘ et ΘΔ aux sections ; que soit menée une droite de jonction ΑΔ ; que, par Ε, soit menée une parallèle ΕΒΓ à ΑΔ, et que, de Θ, soit mené un second diamètre ΘΛΚ des opposées ; il coupera alors ΑΔ en deux parties égales en un point Κ[165]. Chacune des droites ΕΒ et ΕΓ est donc coupée en deux parties égales en un point Λ. ΒΛ est donc égale à ΛΓ, ce qui est impossible.

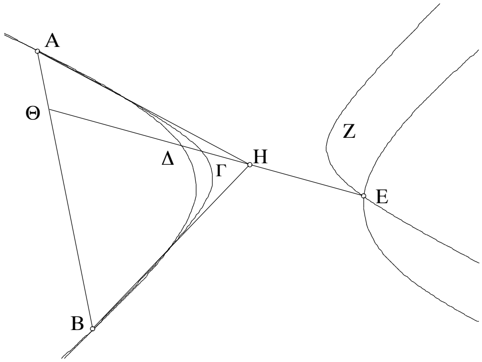
Les opposées ne se rencontreront donc pas en un autre point.

– 53 [50V] – *Si une hyperbole est tangente à l'une de deux opposées en deux points, son opposée ne rencontrera pas l'autre des opposées.*

Soient des opposées ΑΔΒ et Ε ; qu'une hyperbole ΑΓ soit tangente à ΑΔΒ en deux points Α et Β, et soit Ζ l'opposée de ΑΓ.

Je dis que la section Ζ ne rencontrera pas la section Ε.

[162] La tournure définie est à corriger en grec.
[163] Dans la figure de **V**, Β et Γ sont intervertis.
[164] Prop. 49.
[165] II.39.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΕΗ καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὰς τομάς. Ἔστω δὴ ὡς ἡ ΕΗΓΔΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἡ ΑΒ τὰς ἁφὰς ἐπέζευξεν, ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ συζυγίᾳ ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ, ὅπερ ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἡ Ζ τῇ Ε συμβάλλει.

– *νδʹ* – Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐπιψαύῃ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ὑπερβολή τις ἡ ΑΔ κατὰ τὸ Α, ἀντικειμένη δὲ τῆς ΑΔ ἔστω ἡ Ζ.

Λέγω ὅτι ἡ Ζ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

4 ΕΗΓΔΘ] ΕΗΓ, ΔΘ V || 9 *νδʹ* Heiberg : *ναʹ* V (sed litt. om.).

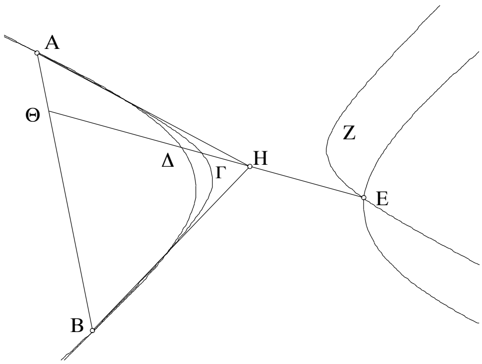


Fig. 53

Qu’elle la rencontre en un point E, si c’est possible ; que soient menées, des points A et B, des tangentes AH et HB aux sections ; que soient menées des droites de jonction AB et EH et que cette dernière soit prolongée[166] ; elle coupera alors les sections en tel et tel point. Qu’elle fasse la droite EHΓΔΘ.

Dès lors, puisque AH et HB sont des tangentes et que AB joint[167] les points de contact, dans l’une des conjonctions[168], ΘΔ sera à ΔH comme ΘE est à EH[169], dans l’autre, ΘΓ sera à ΓH comme ΘE est à EH, ce qui est impossible.

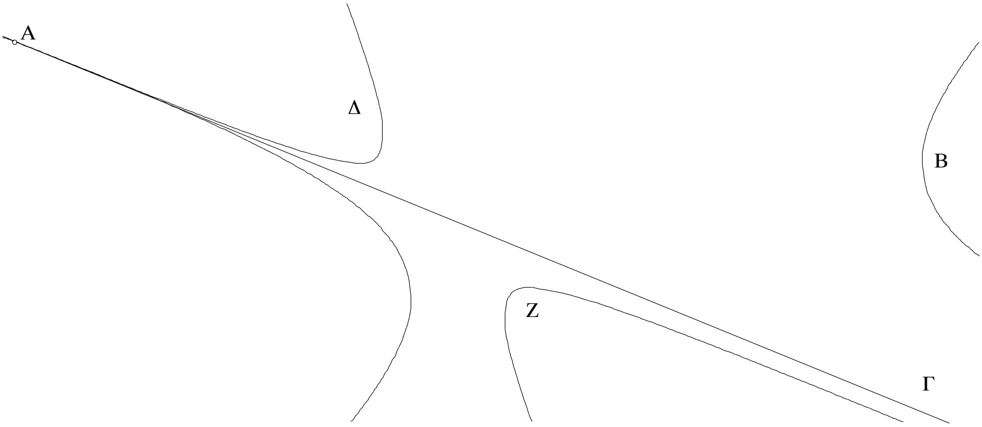
La section Z ne rencontre donc pas la section E.

– 54 [51V] – *Si une hyperbole est tangente à l’une de deux opposées en ayant sa convexité en sens contraire, son opposée ne rencontrera pas l’autre des deux opposées.*

Soient des opposées A et B, qu’une certaine hyperbole AΔ soit tangente à la section A en un point A, et soit Z l’opposée de AΔ.

Je dis que la section Z ne rencontrera pas la section B.

166 Sur cette tournure singulière, déjà rencontrée dans le Livre III, voir p. XXIV.
167 On attend une forme verbale au parfait dans cette partie de la *démonstration*.
168 Cet emploi libre de συζυγία est un *hapax* dans les *Coniques*.
169 III.39.



Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ΑΓ διὰ μὲν τὴν ΑΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ, διὰ δὲ τὴν Α οὐ συμπεσεῖται τῇ Β, ὥστε ἡ ΑΓ μεταξὺ πεσεῖται τῶν Β, Ζ τομῶν.

Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ Β τῇ Ζ οὐ συμπεσεῖται.

– νεʹ – Ἀντικείμεναι ἀντικειμένας οὐ τέμνουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

Ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἕτεραι ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ, καὶ τεμνέτω πρότερον ἡ ΑΒΓΔ τομὴ ἑκατέραν τῶν ΑΒ, ΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς. Ἡ ἄρα ἀντικειμένη τῇ ΑΒΓΔ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, οὐδεμιᾷ τῶν ΑΒ, ΓΔ συμπεσεῖται.

5 νεʹ Heiberg : νβʹ V (sed litt. om.) ‖ 6 τέσσαρα] δʹ V ‖ 8 ΑΒΓΔ, ΕΖ] ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ V ‖ ΑΒΓΔ] ΑΒ, ΓΔ V ‖ 9 Α, Β, Γ, Δ] ΑΒ, ΓΔ V ‖ 11 ΑΒΓΔ] ΑΒ, ΓΔ V.

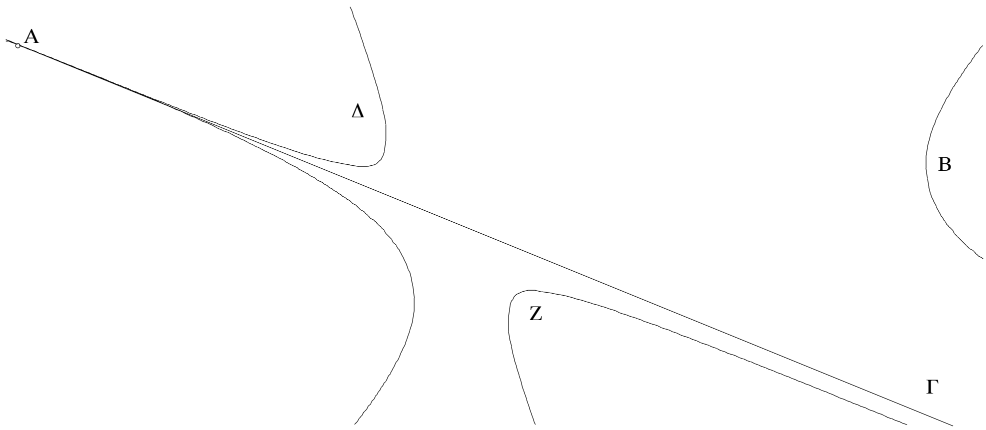


Fig. 54

Que soit menée, de Α, une tangente ΑΓ aux sections ; ΑΓ ne rencontrera donc pas la section Ζ à cause de la section ΑΒ, ni la section Β à cause de la section Α[170] ; de sorte que la droite ΑΓ tombera entre les sections Β et Ζ.

Il est évident que l'opposée Β ne rencontrera pas la section Ζ.[171]

– 55 [52V][172] – *Des opposées ne coupent pas des opposées en plus de quatre points*[173].

Soient des opposées ΑΒ et ΓΔ et d'autres opposées ΑΒΓΔ et ΕΖ ; que, tout d'abord, la section ΑΒΓΔ coupe chacune des opposées ΑΒ et ΓΔ en quatre points Α, Β, Γ et Δ[174], en ayant sa convexité en sens contraire, comme sur la première figure. L'opposée de la section ΑΒΓΔ, c'est-à-dire ΕΖ, ne rencontrera donc aucune des sections ΑΒ et ΓΔ[175].

[170] II.33.

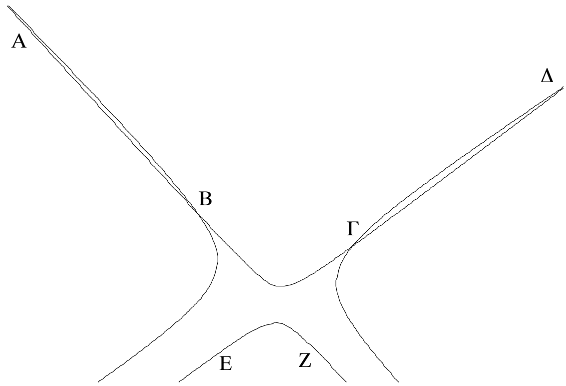
[171] Un élément décoratif sépare la proposition des suivantes dans **V** (folio 157r) ; le même motif est reproduit au folio 160r pour marquer la fin du Livre.

[172] Voir Note complémentaire [28].

[173] Les figures (8 au total) sont rassemblées et alignées sur quatre rangs à la fin de la proposition dans **V**.

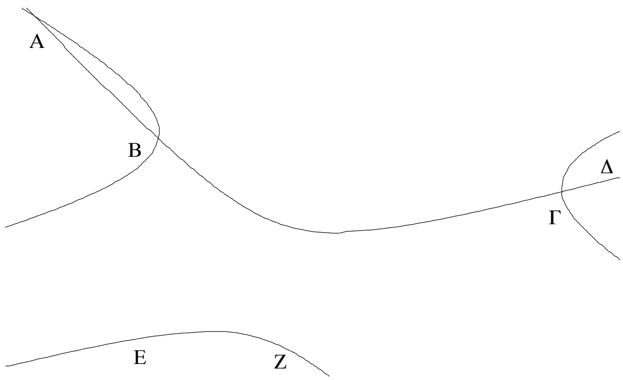
[174] La traduction est littérale ; il faut entendre « quatre points <au total> ». M.F.

[175] Prop. 43.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΑΒΓΔ τὴν μὲν ΑΒ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τὴν δὲ Γ καθ᾽ ἓν τὸ Γ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς· ἡ ΕΖ ἄρα τῇ Γ οὐ συμπεσεῖται.

Εἰ δὲ τῇ ΑΒ συμβάλλει ἡ ΕΖ, καθ᾽ ἓν μόνον συμβάλλει· εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλει τῇ ΑΒ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΑΒΓ τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ τῇ Γ οὐ συμπεσεῖται· ὑπόκειται δὲ καθ᾽ ἓν τὸ Γ συμβάλλουσα.



1 ΑΒΓΔ] ΑΒ, ΓΔ V || Γ Heiberg : ΓΔ V || 5 Α]Β[Γ e corr. V^1.

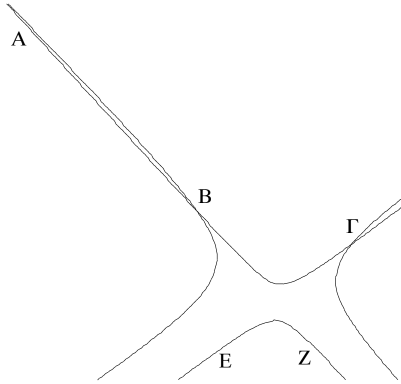


Fig. 55.1[176]

Que, maintenant[177], la section ΑΒΓΔ rencontre la section ΑΒ en des points Α et Β et la section Γ en un point Γ, comme sur la deuxième figure ; la section ΕΖ ne rencontrera donc pas la section Γ[178].

Si, d'autre part, la section ΕΖ rencontre la section ΑΒ, elle la rencontre en un seul point, car, si elle rencontre la section ΑΒ en deux points, sa propre opposée ΑΒΓ ne rencontrera pas l'autre opposée Γ[179]. Or on a supposé qu'elle la rencontre au seul point Γ.

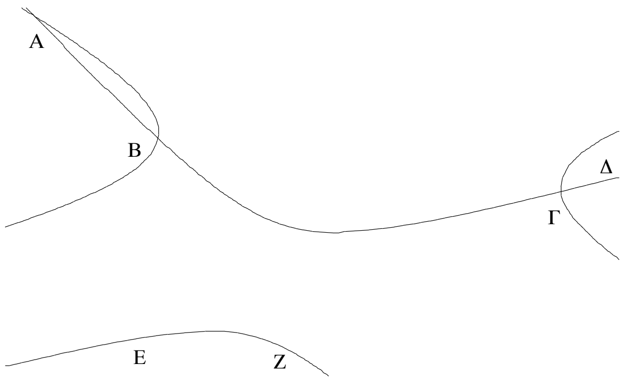


Fig. 55.2

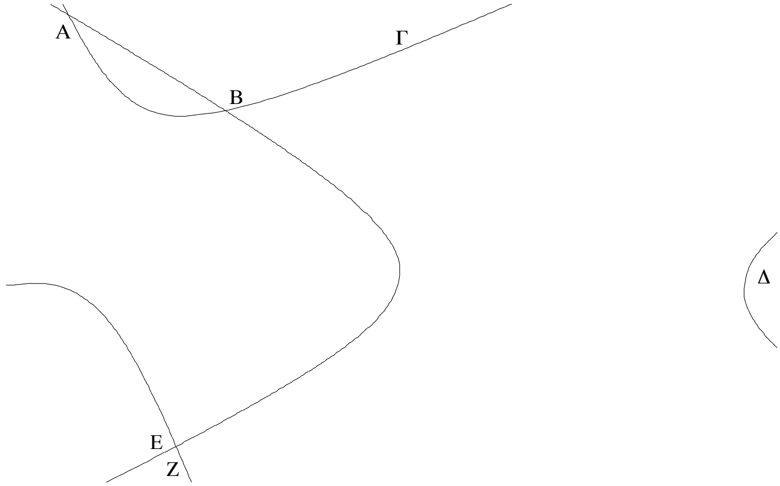
[176] Les lettres Γ et Δ sont interverties dans les figures 53.1 et 53.2 dans V.

[177] Les propositions 55 et 56 fournissent deux des quatre occurrences de la particule euclidienne ἀλλὰ δή trouvée dans les *Coniques* (pour introduire le traitement des cas, le traité utilise δή). Les deux autres occurrences sont dans le Livre I (I.22 et I.58).

[178] Prop. 41.

[179] Prop. 43.

Εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τέμνει κατὰ δύο τὰ Α, Β, τῇ δὲ ΑΒΕ συμβάλλει ἡ ΕΖ, τῇ μὲν Δ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒΕ συμπίπτουσα οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.



Εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓΔ ἑκατέραν τέμνει καθ' ἓν σημεῖον, ἡ ΕΖ οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα, ὥστε διὰ τὰ εἰρημένα [καὶ <τὰ> ἀντίστροφα αὐτῶν] αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ ἀντικειμέναις ταῖς ΒΕ, ΓΖ τομαῖς οὐ συμπεσοῦνται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

1 δὲ Ψ : om. V ‖ 5 ΑΒΓΔ] ΑΒ, ΓΔ V ‖ 7 καὶ — αὐτῶν delevi (susp. Heiberg) ‖ τὰ add. Halley ‖ ΑΒΓΔ, ΕΖ Halley (jam Comm.) : ΑΒΓ, ΔΓΖ V ‖ 8 ΓΖ Halley (jam Comm.) : ΕΖ V ‖ τέσσαρα] δ′ V.

Mais si, comme sur la troisième figure, la section ΑΒΓ coupe la section ΑΒΕ en deux points Α et Β, et que la section ΕΖ rencontre la section ΑΒΕ, elle ne rencontrera pas la section Δ[180] et, puisqu'elle rencontre la section ΑΒΕ, elle ne rencontrera pas celle-ci en plus de deux points[181].

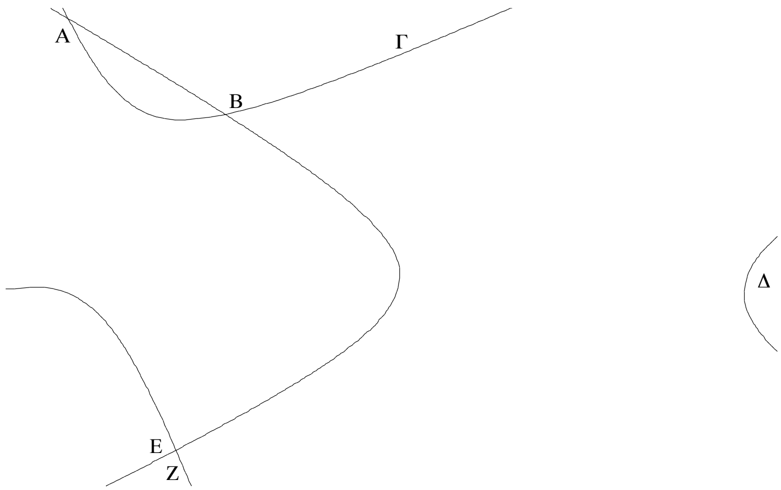
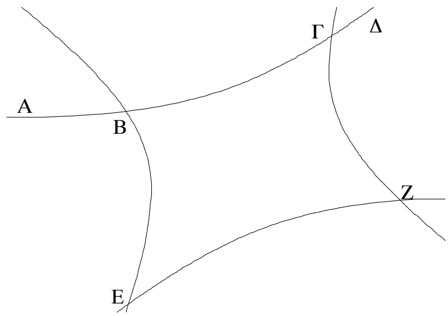


Fig. 55.3

Mais si, comme sur la quatrième figure, la section ΑΒΓΔ coupe chacune des deux sections en un seul point, la section ΕΖ ne rencontrera aucune des deux sections en deux points[182], de sorte que, en vertu de ce qu'on a dit [et des réciproques], les sections ΑΒΓΔ et ΕΖ ne rencontreront pas les opposées, c'est-à-dire les sections ΒΕ et ΓΖ en plus de quatre points.

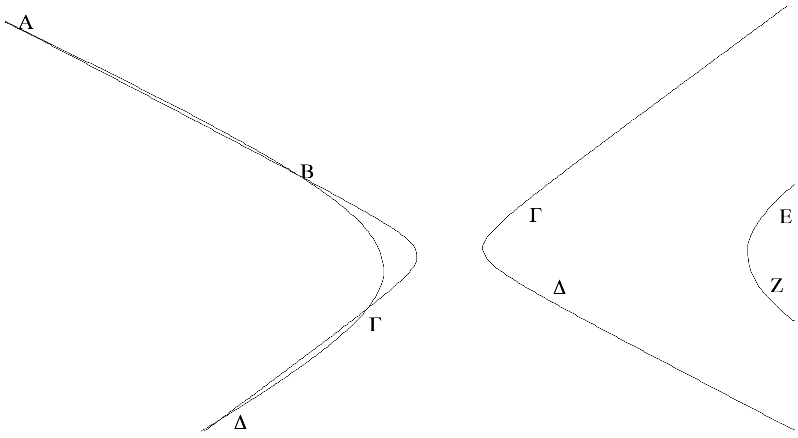
[180] Prop. 41.
[181] Prop. 37.
[182] Prop. 42.



Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσιν, καὶ ἡ ἑτέρα τὴν ἑτέραν τέμνῃ κατὰ τέσσαρα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τῆς πέμπτης καταγραφῆς, ἡ ΕΖ τῇ ἑτέρᾳ οὐ συμπεσεῖται.

Οὐδὲ μὴν ἡ ΕΖ συμπεσεῖται τῇ ΑΒ· πάλιν γὰρ ἔσται ἡ ΑΒ ταῖς ΑΒΓΔ, ΕΖ ἀντικειμέναις συμπίπτουσα κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

[Ἀλλ᾽ οὐδὲ ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ συμπεσεῖται.]



2 Α, Β, Γ, Δ] ΑΒ, ΓΔ V ‖ 3 συμπεσεῖται Ψ : οὐ συμπεσεῖται V ‖ 5 ΑΒΓΔ] ΑΒ, ΓΔ V ‖ 7 Ἀλλ᾽ — συμπεσεῖται del. Heiberg.

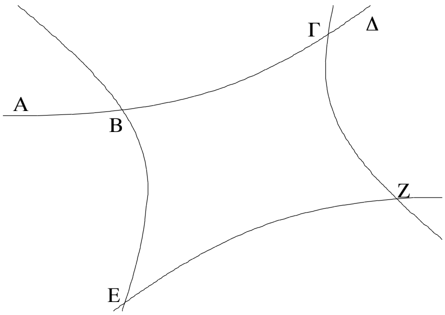


Fig. 55.4

Mais si les sections ont leur concavité dans le même sens, et que l'une coupe l'autre en quatre points Α, Β, Γ et Δ, comme sur la cinquième figure, ΕΖ ne rencontrera pas l'autre opposée[183].

Elle ne rencontrera pas non plus[184] la section ΑΒ ; en effet, la section ΑΒ rencontrera de nouveau les opposées ΑΒΓΔ et ΕΖ en plus de quatre points[185]. [Mais la section ΓΔ ne rencontrera pas non plus la section ΕΖ.]

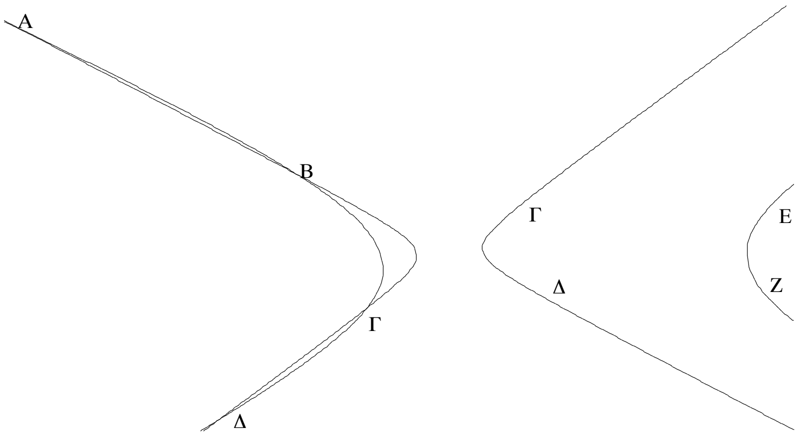


Fig. 55.5[186]

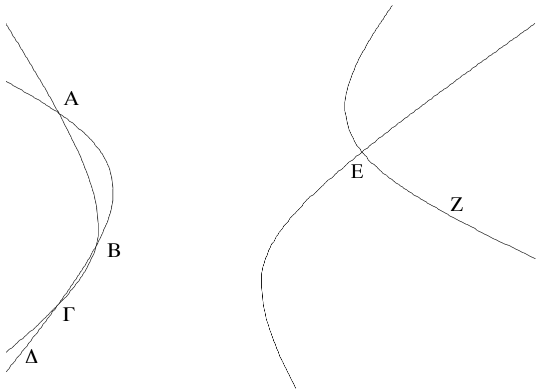
[183] Prop. 44.

[184] Les propositions 55 et 57 présentent les deux seules occurrences dans les *Coniques* de la séquence euclidienne οὐδὲ μήν.

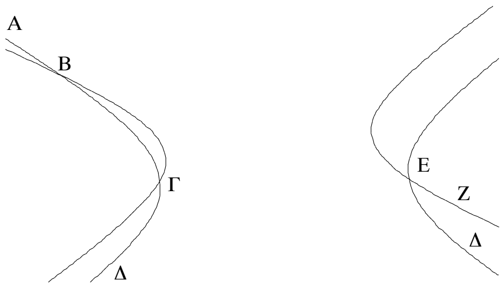
[185] Prop. 38.

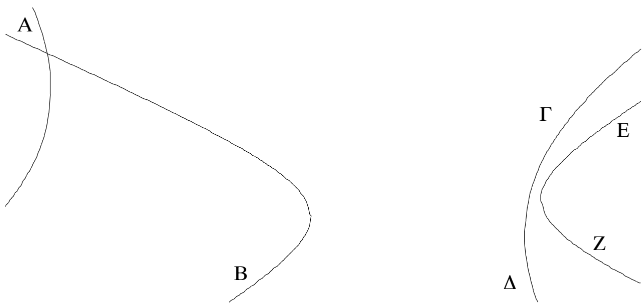
[186] Les lettres Γ et Δ sont utilisées deux fois dans **V**. La succession des quatre lettres Α, Β, Γ, Δ des sections qui se coupent est naturelle et conforme aux autres figures.

Εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς ἕκτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓΔ τῇ ἑτέρᾳ τομῇ συμβάλλει κατὰ τρία σημεῖα, ἡ ΕΖ τῇ ἑτέρᾳ καθ᾽ ἓν μόνον συμπεσεῖται.



Καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τὰ αὐτὰ τοῖς προτέροις ἐροῦμεν.





1 ΑΒΓΔ] ΑΒ, ΓΔ V.

Mais si, comme c'est le cas sur la sixième figure, la section ΑΒΓΔ rencontre l'autre section en trois points, la section ΕΖ rencontrera l'autre opposée en un seul point[187].

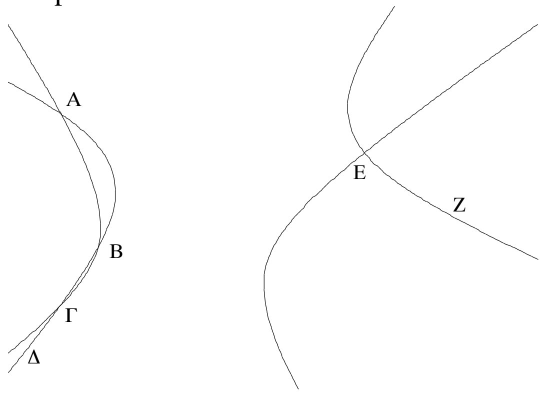


Fig. 55.6

Dans les cas restants[188], nous répéterons ce que nous avons déjà dit.

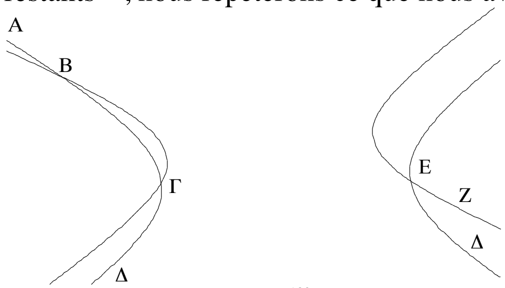


Fig. 55.7[189]

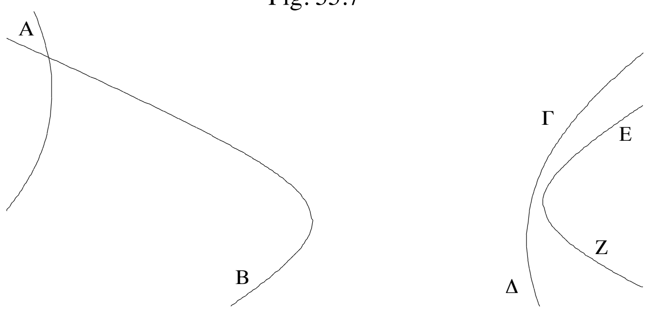


Fig. 55.8

[187] Prop. 46.

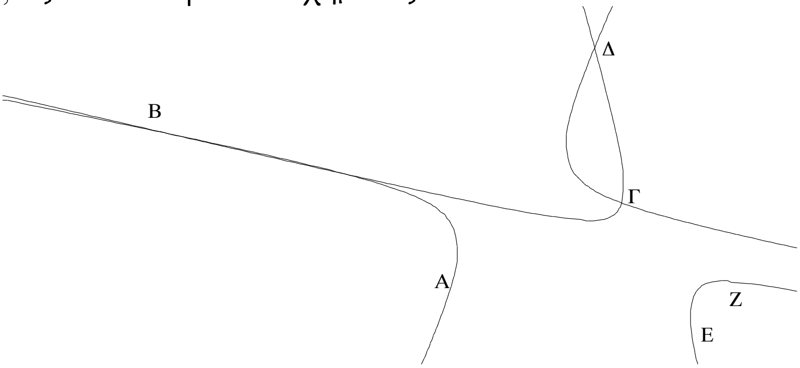
[188] C'est-à-dire les cas où les sections qui ont leur concavité dans le même sens se coupent en deux points (ΑΒΓΔ et Β dans la figure 55.7) et en un point seulement (ΑΒ et Α dans la figure 55.8).

[189] La lettre Δ figure deux fois dans **V**.

Ἐπεὶ οὖν κατὰ πάσας τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστι τὸ προτεθέν, ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις οὐ συμβάλλουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

– νϛʹ – Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύωσιν, οὐ συμπεσοῦνται [καὶ] κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΒΓ καὶ ἕτεραι αἱ Δ, ΕΖ, καὶ ἡ ΒΓΔ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, καὶ ἐχέτωσαν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτά, καὶ συμπιπτέτω πρῶτον ἡ ΒΓΔ τῇ ΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΓΔ <τὴν ΓΔ> κατὰ δύο τέμνει ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά, ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται.

Πάλιν ἐπεὶ ἡ ΒΓΔ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά, ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται. Ἡ ἄρα ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ τομῶν συμπεσεῖται.

<Αἱ τομαὶ> κατὰ δύο μόνον ἄρα τὰ Γ, Δ συμβάλλουσιν.

4 νϛʹ Heiberg : νγʹ V (sed litt. om.) || 5 ἐπιψαύωσιν c^1 Ψ : ἐπιψαύουσιν V c || καὶ del. Mont. || 7 Ε]Ζ e corr. V^1 || 11 τὴν ΓΔ addidi || δύο Ψ : τὸ Β V || 16 Αἱ τομαὶ addidi.

Dès lors, puisque, dans toutes les dispositions[190] possibles, ce qui est proposé est évident, des opposées ne coupent pas d'autres opposées en plus de quatre points.

– 56 [53V] – *Si des opposées sont tangentes à des opposées en un point, elles ne se rencontreront pas en plus de deux autres points.*

Soient des opposées ΑΒ et ΒΓ et d'autres opposées Δ et ΕΖ ; que la section ΒΓΔ soit tangente à la section ΑΒ en un point Β ; qu'elles aient leurs convexités dans le sens contraire, et que, tout d'abord, la section ΒΓΔ rencontre la section ΓΔ en deux points Γ et Δ, comme sur la première figure[191].

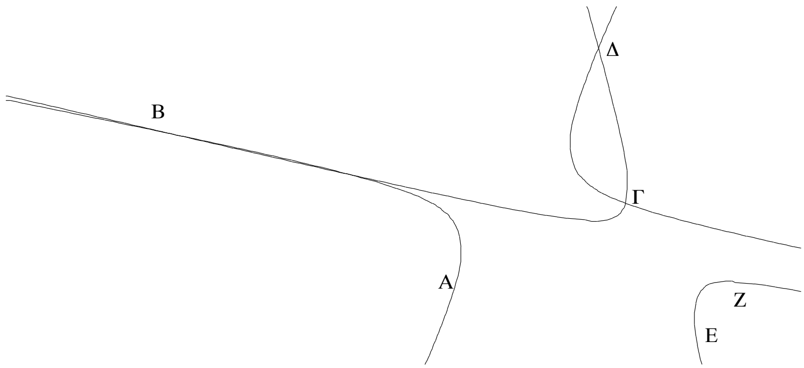


Fig. 56.1

Dès lors, puisque la section ΒΓΔ coupe <la section ΓΔ> en deux points, en ayant sa convexité dans le sens contraire, la section ΕΖ ne rencontrera pas la section ΑΒ[192].

De même, puisque la section ΒΓΔ est tangente à la section ΑΒ au point Β, en ayant sa convexité dans le sens contraire, la section ΕΖ ne rencontrera pas la section ΓΔ[193]. La section ΕΖ ne rencontrera donc aucune des sections ΑΒ et ΓΔ[194].

<Les sections >[195] se rencontrent donc aux deux seuls points Γ et Δ.

[190] Le terme διαστολή, qu'il faut entendre au sens de « distinction, distribution », ne s'emploie pas en mathématiques. Les propositions 55-57 des *Coniques* offrent les trois seules occurrences du *corpus* mathématique grec.

[191] Les propositions 56 et 57 offrent les seules occurrences des *Coniques* de l'emploi du mot σχῆμα au sens de καταγραφή (figure accompagnant le texte).

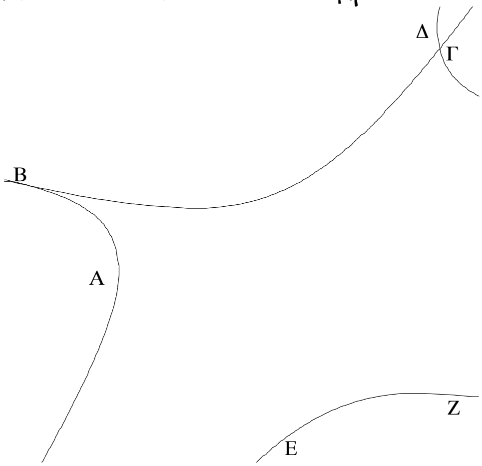
[192] Prop. 41.

[193] Prop. 54.

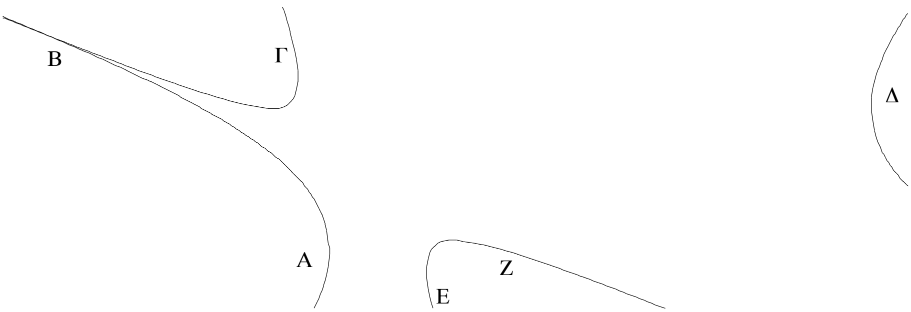
[194] Ce résultat avait fait l'objet de la proposition 47.

[195] Il s'agit des sections ΒΓ et Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὴν ΓΔ ἡ ΒΓ τεμνέτω καθ᾽ ἓν σημεῖον τὸ Γ, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος. Ἡ ἄρα ΕΖ τῇ μὲν ΓΔ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒ συμπεσεῖται καθ᾽ ἓν μόνον· εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλει ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ, ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται· ὑπόκειται δὲ συμβάλλουσα καθ᾽ ἕν.



Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῇ Δ τομῇ μὴ συμπίπτει, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, διὰ μὲν τὰ προειρημένα ἡ ΕΖ τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.



4 ΒΓ Halley (jam Comm.) : ΒΓΔ V ‖ 5 συμπίπτει c : συμπίπτῃ V ‖ 6 Δ Mont. : ΓΔ V.

Que, maintenant, la section ΒΓ coupe la section ΓΔ en un seul point Γ, comme sur la deuxième figure. La section ΕΖ ne rencontrera donc pas la section ΓΔ[196], et elle rencontrera la section ΑΒ en un seul point ; en effet, si la section ΕΖ rencontre la section ΑΒ en deux points, la section ΒΓ ne rencontrera pas la section ΓΔ[197] ; or, par hypothèse, elle la rencontre en un point.

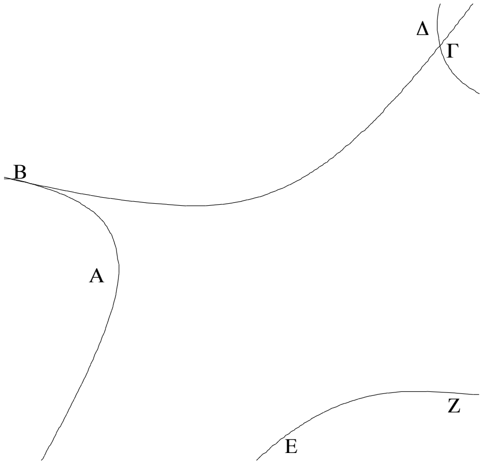


Fig. 56.2

Mais, si la section ΒΓ ne rencontre pas la section Δ, comme sur la troisième figure, la section ΕΖ, en vertu des considérations précédentes, ne rencontrera pas la section Δ[198], et la section ΕΖ ne rencontrera pas la section ΑΒ en plus de deux points[199].

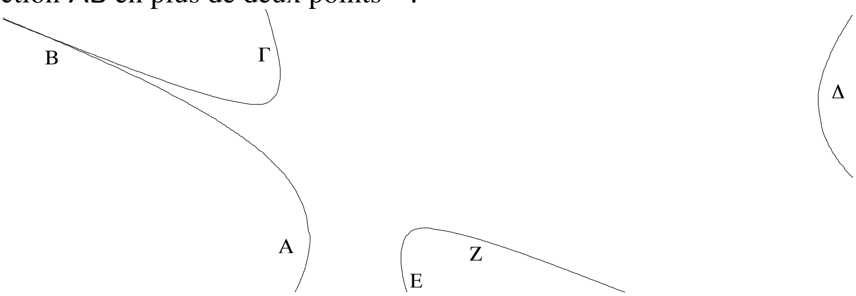
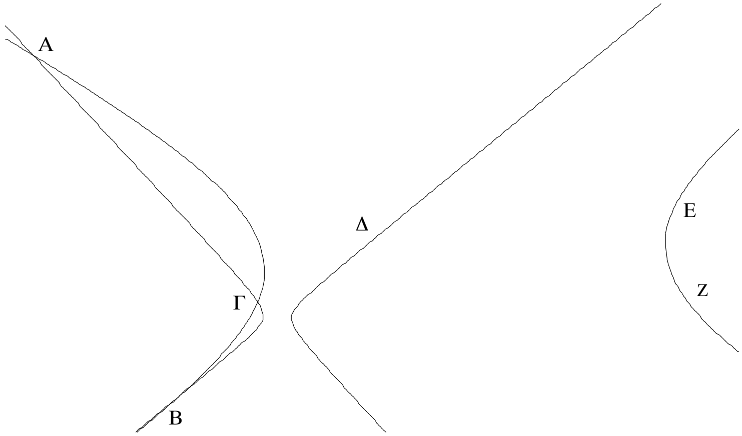


Fig. 56.3

[196] Prop. 54.
[197] Prop. 41.
[198] Prop. 54.
[199] Prop. 37.

Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσιν, αἱ αὐταὶ ἀποδείξεις ἁρμόσουσιν.



Κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

– *νζʹ* – Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων κατὰ δύο ἐπιψαύωσι, καθʼ ἕτερον σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἕτεραι αἱ ΑΓ, ΕΖ καὶ ἐφαπτέσθωσαν πρῶτον, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος, κατὰ τὰ Α, Γ.

5 *νζʹ* Heiberg : *νδʹ* V (sed litt. om.).

Mais si les sections ont leur concavité dans le même sens, les mêmes démonstrations s'appliqueront[200].

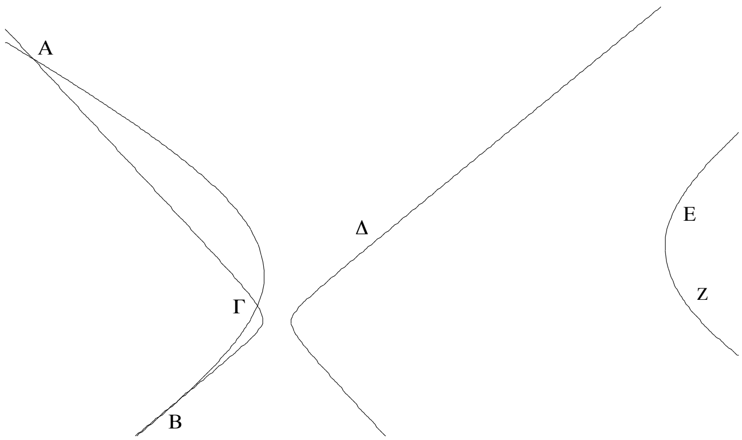


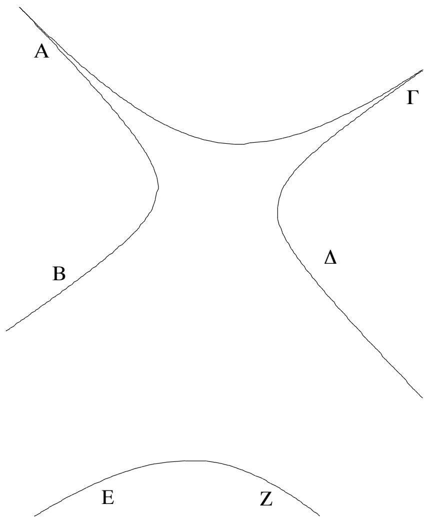
Fig. 56.4

Dans toutes les dispositions possibles, les démonstrations montrent que ce qui est proposé est évident.

– 57 [54V] – *Si des opposées sont tangentes à d'autres opposées, elles ne se rencontreront pas en un autre point.*

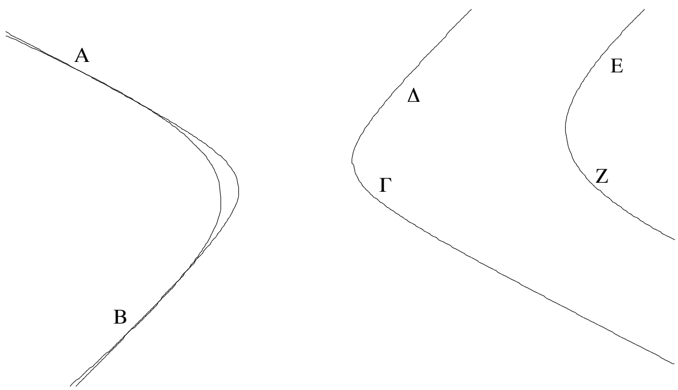
Soient des opposées ΑΒ et ΓΔ et d'autres opposées ΑΓ et ΕΖ ; qu'elles soient tangentes tout d'abord en des points Α et Γ, comme sur la première figure.

200 On trouve seulement dans **V** la figure ci-dessus, où les sections ΒΓ et ΑΒ, tangentes en Β, se coupent en deux points, Α et Γ (*cf.* prop. 48). Au vu des cas présentés précédemment dans la proposition, on attend deux autres figures pour représenter respectivement le cas où les deux sections se coupent en un point (*cf.* prop. 49), et le cas où elles ne présentent pas de point de concours (*cf.* prop. 50). Ces figures sont restituées dans l'édition Heiberg. Dans **V**, on trouve à leur place la figure 55.7, mais amputée de sa partie droite, et la figure 55.8.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐφάπτεται κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα, ἡ ΕΖ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ συμπεσεῖται.

Ἐφαπτέσθωσαν δὴ ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου.



Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ οὐ συμπεσεῖται.

2 post ΓΔ del. ἐφάπτεται V[1].

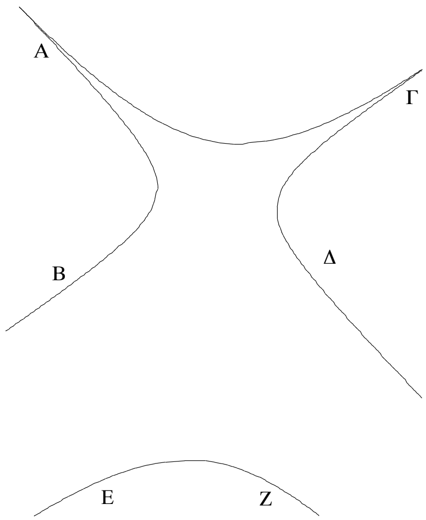


Fig. 57.1

Dès lors, puisque la section ΑΓ est tangente à chacune des sections ΑΒ et ΓΔ en des points Α et Γ, alors la section ΕΖ ne rencontrera aucune des sections ΑΒ et ΓΔ[201].

Qu'elles soient tangentes comme sur la deuxième figure.

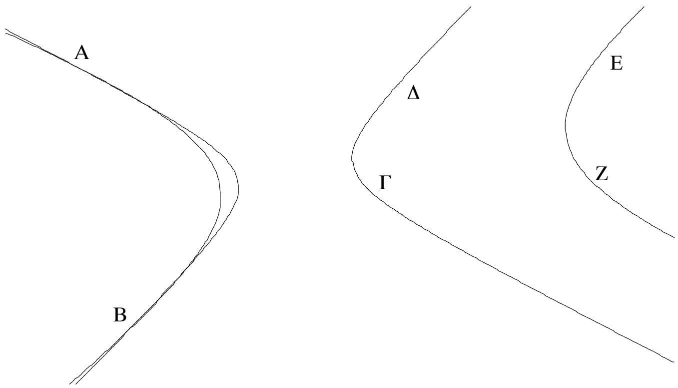
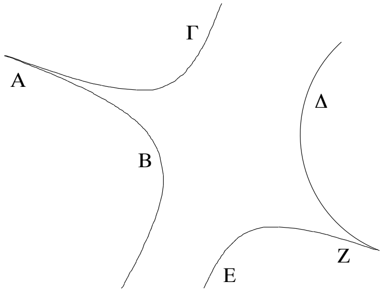


Fig. 57.2

On démontrera pareillement que la section ΓΔ ne rencontre pas la section ΕΖ[202].

[201] Prop. 51.
[202] Prop. 53.

†Ἐφαπτέσθω δή, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, ἡ μὲν ΓΑ τῆς ΑΒ κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ Δ τῆς ΕΖ κατὰ τὸ Ζ.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται.

Πάλιν ἐπεὶ ἡ ΖΔ τῆς ΕΖ ἐφάπτεται, ἡ ΓΑ τῇ ΔΖ οὐ συμπεσεῖται.†

Εἰ δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΓΔ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα, ὡς ἐπὶ τοῦ τετάρτου σχήματος, καθ᾽ ἕτερον οὐ συμπεσοῦνται.

Οὐδὲ μὴν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ συμπεσεῖται.

1-5 locus corruptus (vide adn.) ‖ 1 ἡ μὲν ΓΑ τῆς ΑΒ c Ψ : iter. V ‖ 7 ἔχουσιν c Ψ : ἔχωσιν V ‖ 9 μὴν Mont. : μὴ V.

†Que, comme sur la troisième figure, la section ΓA rencontre la section AB en un point A, et que la section Δ rencontre la section EZ en un point Z[203].

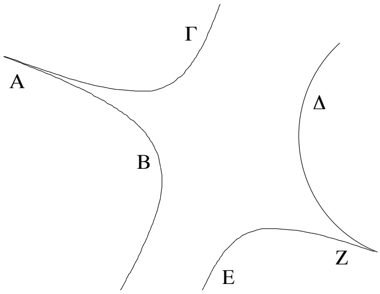


Fig. 57.3

Dès lors, puisque la section AΓ est tangente à la section AB en ayant sa convexité dans le sens contraire, la section EZ ne rencontrera pas la section AB.

De même, puisque la section ZΔ est tangente à la section EZ, la section ΓA ne rencontrera pas la section ΔZ.†

Mais, si la section AΓ est tangente à la section AB au point A, que la section EΓ[204] est tangente à la section ΓΔ en un point Γ, et qu'elles ont leur concavité dans le même sens, comme sur la quatrième figure, elles ne se rencontrent pas en un autre point[205].

La section EZ ne rencontrera pas non plus la section AB[206].

[203] Ce cas n'existe pas (*cf.* prop. 54), et la figure de **V**, reproduite ici, est évidemment fausse. L'erreur a été repérée par Commandino. Elle figure également dans la tradition arabe, voir tome 2.2, p. 72.

[204] Le point Γ est utilisé deux fois.

[205] Prop. 52.

[206] Prop. 39.

Κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

In fine Ἀπολλωνίου Κωνικῶν δʹ :— ἐκδόσεως Εὐτοκίου Ἀσκαλωνίτου V.

Fig. 57.3[207]

Dans toutes les distributions possibles, les démonstrations montrent que ce qui est proposé est évident.[208]

[207] Les courbes ΑΒ et ΑΓ se croisent dans **V**, comme les courbes ΕΖ et ΓΔ.

[208] Le texte se termine dans **V** à la fin du folio 160r, et les figures de la proposition sont regroupées au verso. Le texte est suivi du même élément décoratif qui séparait la prop. 54 de la proposition suivante (voir *supra*, note 171). On trouve à la ligne suivante, de la main du copiste, les deux mentions constituant le titre de rappel (voir l'apparat critique). A la suite des figures du folio 160v, le copiste a porté la mention suivante : Ἀπολλωνίου κωνικῶν δʹ.

NOTES COMPLÉMENTAIRES

(Les notes des auteurs sont suivies de leurs initiales)

[1] On ne sait rien sur ce nouveau correspondant d'Apollonius. Les anciennes hypothèses qui le reliaient à la famille royale de Pergame ou l'identifiaient à Attale de Rhodes, commentateur des *Phénomènes* d'Aratos, sont maintenant abandonnées (voir pour la bibliographie, tome 1.2, p. IX, note 1). On doit donc considérer qu'Attale est un mathématicien. M. D-F.

[2] Compte tenu des réalités de l'édition antique, le changement imprévu de destinataire peut faire courir un risque à un ouvrage mis en circulation de manière progressive, comme le traité des *Coniques*, que son auteur édite, Livre après Livre, au fur et à mesure de leur révision. Apollonius semble conscient du danger, en précisant à nouveau ici, l'exacte étendue de l'ouvrage complet, à savoir huit Livres, et en rappelant quel était le dédicataire des trois premiers. On apprend dans cette lettre qu'Eudème est mort entre la mise en circulation du Livre III et celle du Livre IV. Le changement de destinataire ne conduit pas Apollonius à modifier la démarche exposée dans la préface du Livre I. Les Livres restants continueront à être envoyés au fur et à mesure de l'achèvement du travail de révision. On apprend par ce passage qu'Attale avait manifesté de lui-même son vif désir d'avoir communication (διὰ τὸ φιλοτιμεῖσθαί σε μεταλαμβάνειν) des recherches qu'Apollonius était en train de conduire (τὰ ὑφ' ἡμῶν πραγματευόμενα), ce qui confirme le témoignage de la préface du Livre I, à savoir que les recherches d'Apollonius sur les sections coniques étaient suivies de près par les milieux scientifiques contemporains. M. D-F.

[3] Le sommaire est divisé en deux parties nettement séparées par le complément prépositionnel καὶ ἐκτὸς τούτων (« et en dehors de ces questions ») : la première fait référence aux rencontres entre sections, et à la détermination du nombre de points de rencontre, la seconde à d'autres propriétés, non définies, mais de même nature que les sujets précédents (καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις, p. 342, 11). On retrouve le même partage dans l'extrait relatif au Livre IV de la lettre d'envoi du Livre I, à ceci près que les rencontres entre sections dans l'extrait du Livre I sont décrites de manière moins détaillée. Le sommaire du Livre IV accorde, en effet, une mention spéciale à la rencontre entre une section conique (ou une circonférence de cercle) et des sections opposées.

On ne trouve pas d'allusion explicite au groupe des propositions 1-23, en lien direct avec la proposition II.49 et les propositions III.30 à III.40. Or l'analyse mathématique de ces propositions (voir tome 2.2, p. 1-25) ouvre la possibilité que l'étude menée dans cet ensemble entre dans un cadre beaucoup plus large, à savoir l'examen des différentes formes de « rencontre » (intersection et contact) entre droite, cercle, sections coniques, et la détermination du nombre des points de rencontre (*ibid.*, p. 6). Aussi n'est-il pas exclu, entre autres hypothèses, que le groupe des propositions 1-23 puisse également représenter ces sujets apparentés aux rencontres entre sections (καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις), qui sont mentionnés de manière vague dans la deuxième partie du sommaire (p. 342, l. 11). Auquel cas, si l'on compare le sommaire avec l'extrait de la préface du Livre I relatif au contenu du Livre IV, ce groupe de propositions serait représenté par la séquence καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ (tome 1.2, p. 4, 13). M. D-F.

[4] Dans la suite de sa lettre d'envoi (p. 342, 12-20) Apollonius donne un aperçu des recherches de ses devanciers et de ses propres découvertes. Or, en se référant de manière elliptique aux différents points qu'il vient de signaler dans le sommaire, Apollonius introduit de nouveaux éléments d'incertitude. Il nous informe que Conon de Samos a lui aussi exposé (ἐξέθηκε) la première question (τὸ μὲν προειρημένον), que le second point (τοῦ δευτέρου) a été mentionné par Nicotélès de Cyrène dans sa critique de l'ouvrage de Conon, mais sans qu'il en ait donné de démonstration, et que le troisième point (τὸ μέντοι τρίτον) et les autres questions du même genre (καὶ τὰ ἄλλα τὰ ὁμογενῆ τούτοις, p. 342, 19) n'ont été traités par personne.

Si l'on doit respecter la cohérence esquissée dans l'analyse précédente du sommaire, on peut associer le nom de Conon à la question des rencontres entre sections (y compris le cercle), et celui de Nicotélès à la question de la rencontre entre la section d'un cône (ou le cercle) et les deux sections opposées. Reste à identifier la nature exacte du « troisième point » et des « autres questions du même genre que les précédentes », qui représentent aux yeux d'Apollonius la partie la plus originale de son travail, en plus des démonstrations nouvelles dont il a enrichi le traitement de la question mentionnée par Nicotélès. On peut supposer que les « autres questions du même genre que les précédentes » renvoient au groupe qualifié de la même manière dans le passage précédent (ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις, p. 342, 11), et donc, si l'on retient l'hypothèse mentionnée précédemment, elles pourraient représenter le groupe des propositions 1-23. Ici, elles sont mentionnées à la suite d'un troisième point, alors qu'elles constituaient ce troisième point dans le sommaire, et sans qu'il soit vraiment dit clairement s'il faut les associer plus particulièrement à ce troisième point ou plutôt à l'ensemble des questions précédentes, comme semble l'indiquer le pluriel τούτοις. On peut résoudre la difficulté en donnant à la conjonction καί, employée à la ligne 19, le sens appositionnel (ou *épexégétique*) de « c'est-à-dire » (*cf.* J.B. Denniston, *The Greek Particles*, 2e éd., Oxford, 1954, p. 291, § 5), comme le fait M. Federspiel dans sa traduction du passage. Les « autres questions du même genre que les précédentes » deviennent le « troisième point ».

D'autres interprétations ont été faites de ce passage difficile, qui autorise bien des lectures, dont celle que j'ai également donnée dans une première note sur le sujet (tome 1.2, p. 214). L'hypothèse qui vient d'être exposée permettrait à l'ensemble des propositions 1-23 d'être représenté dans le sommaire d'Apollonius. On peut s'étonner toutefois de la présentation adoptée par Apollonius, puisque, dans ce cas, l'objet de recherche dont Apollonius revendique la totale paternité n'est pas défini de manière précise. Mais sans doute faut-il s'en contenter, s'il y a à cela une raison objective. M. D-F.

[5] C'est par ce témoignage d'Apollonius que nous connaissons l'intérêt porté par le célèbre astronome et ami d'Achimède, Conon de Samos, aux intersections entre

sections coniques, témoignage à mettre en relation avec celui de Dioclès dans sa préface des *Miroirs ardents* (voir *Les Catoptriciens grecs*, éd. R. Rashed, C.U.F., Paris, 2000, p. 98-102). Thrasydée et Nicotélès de Cyrène (voir *Dictionnaire des philosophes antiques*, dir. R. Goulet, IV, Paris, 2005, p. 702-703) restent des personnages inconnus. M. D-F.

[6] La rédaction de l'énoncé inclut le cas de l'hyperbole en considérant la « section de cône » en général, mais il en va autrement dans le reste de la proposition, puisque la condition pour mener deux tangentes à une hyperbole d'un même point extérieur Δ, à savoir que le point extérieur soit dans l'angle des asymptotes n'est pas formulée, ce qui empêche la construction. Il y a ici une première anomalie. La condition attendue figure en bonne et due forme dans le traitement qui suit du cas où Β est entre les points Ε et Γ et du cas où il ne l'est pas (prop. 2 et 3), et dont il n'est question que pour l'hyperbole (ces deux cas ne sont pas distingués pour la parabole). On retrouve la même situation et les mêmes choix rédactionnels dans les propositions 9-11, qui traitent le cas de deux sécantes issues de Δ, avec la même formule de transition pour introduire le traitement des deux cas de figure examinés dans le cas de l'hyperbole (ταῦτα μὲν κοινῶς <ἐπὶ πασῶν τῶν τομῶν δείκνυται>, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς). Il est peu probable que cette rédaction soit d'Apollonius. On est sans doute ici dans le cadre d'une réécriture délibérée du texte. M. D-F.

[7] Dans le Livre IV, il y a 34 occurrences du mot « ligne » (la dernière est en IV.40), qui se substitue chaque fois au mot « section conique » (ou au nom d'une section particulière). Le mot est un marqueur lexical du Livre IV, car, dans le reste des *Coniques*, cet emploi, comme variante libre de « section », se retrouve seulement deux fois dans le Livre II et dix fois dans le Livre III. En revanche, le mot n'a jamais cette fonction dans le Livre I, où il est très fréquent. M. F.

[8] La séquence est brachylogique, car la droite en question doit être prolongée pour rencontrer l'autre partie de la section. On retrouve le même phénomène dans le *diorisme* et dans les propositions 4, 6 et 9 (*protase* et *diorisme*) ; voir M. Federspiel, *REG*, 122, p. 295. M. D-F.

[9] Sur l'emploi de ἐχέτω, voir M. Federspiel, *REG*, 122, p. 295-297 ; voir également *Chapitre* I, p. XXIV-XXV. M. D-F.

[10] Ce passage est considéré comme une interpolation par l'éditeur Heiberg. Je ne l'ai pas athétisé, car il est un témoin de la rédaction dans laquelle nous a été transmise cette proposition. Il appartient à la *construction* de la proposition. On s'assure ici de la possibilité de construire une seconde tangente (*cf.* II.49), en l'occurrence la tangente ΔΑ, avant de démontrer, par *réduction à l'absurde*, que la droite ΑΒ passe nécessairement par Ζ. Il est manifeste que le rédacteur de ce passage ne raisonne que sur le cas de la parabole, en se fondant sur l'unique figure transmise (l'ellipse n'est pas représentée). Le même rédacteur est à l'œuvre dans le passage correspondant de la proposition 9. La reprise dans les deux passages de l'infinitif aoriste ἀγαγεῖν est une référence implicite à la *protase* de II.49. M. D-F.

[11] On retrouve ici une figure de style, l'*anadiplose*, très présente dans les *Coniques* (pour une première occurrence, voir tome 1.2, p. 12, l. 7-8), et dont M. Federspiel a dégagé les traits essentiels dans la langue géométrique (voir son article à paraître, « Sur la figure de l'anadiplose dans la langue de la géométrie grecque ») ; la particule γάρ n'a pas sa place après l'impératif (ἤχθω) qui reprend le verbe du premier segment de la double séquence (ἀγαγεῖν). M. D-F.

[12] Les formes composées ἀπόδειξις (prop. 2, 3, 9, 26) et ἀποδεικνύναι (prop. 3, sous la forme très rare ἀποδεικνύειν) n'appartiennent pas au vocabulaire euclidien ; on les trouve chez Archimède ou chez les commentateurs postérieurs (voir M. Federspiel, *REG*, 122, p. 297-298). Elles sont absentes des Livres I-III, exception faite de la deuxième partie de I.8, qui a conservé une rédaction non canonique. M. D-F.

[13] Sur la rédaction des propositions qui font dépendre leurs hypothèses des précédentes, voir la Note complémentaire [14] au Livre III. On observe que, dans le Livre IV, c'est la formule τῶν αὐτῶν ὄντων qui est généralisée. M. D-F.

[14] On voit ici comment s'ordonne l'exposé transmis en grec. Les propositions 2-5 traitent du cas de l'hyperbole et font dépendre leurs hypothèses de la première proposition, qui a formulé la propriété en terme généraux pour toute section de cône ; elles correspondent aux trois positions possibles du point extérieur Δ, qui est ou dans l'angle des asymptotes (1) ou dans l'un des angles adjacents à l'angle des asymptotes (2) ou sur l'une des asymptotes (3). L'ensemble constitué par les propositions 6-8 traitent du cas particulier où la sécante est parallèle à l'une des asymptotes ; ce cas fait l'objet d'un énoncé général dans la première proposition (prop. 6), dont dépendent pour leurs hypothèses les deux propositions suivantes. La *protase* de la proposition 6 vaut ainsi pour les trois positions possibles du point Δ ; ces positions sont ensuite traitées dans l'ordre qui était celui des propositions 2-5, dont les lettres désignatrices et les figures sont respectivement reprises. La position (1) est traitée dans la proposition 6, la position (2), dans la proposition 7, la position (3) dans la proposition 8. M. D-F.

[15] On trouve dans les propositions 10 et 11 les deux seules références numériques du Livre IV. Elles figurent dans deux passages qui ont toute chance d'avoir été réécrits (voir *supra*, note [6]). On saisit l'intention sous-jacente, qui confirme indirectement les figures transmises par **V** : dans la proposition 10, le rédacteur ne renvoie pas à la proposition précédente, comme cela avait été fait dans la proposition 2, parce que le traitement du cas de figure dont il est question ici (les arcs ΘΕ et ΗΖ ont une partie commune) ne peut prendre la figure de la proposition 9 pour support ; en revanche, cette figure peut servir de support au traitement du cas dont il est question dans la proposition 11, ce qui n'a pas manqué d'être souligné : καὶ ἡ καταγραφὴ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ τῷ θʹ. On observe que, si la référence à la proposition 2 est conforme au numéro d'ordre de la proposition dans **V**, ce n'est pas le cas de la référence à la proposition 9, qui est la proposition 8 dans **V**. M. D-F.

[16] Le groupe des propositions 15-17 correspond pour les sections opposées à l'ensemble constitué par les propositions 2-5, relatives à une hyperbole. La *protase*

générale de la proposition 15 vaut pour les trois positions possibles du point Δ par rapport aux asymptotes : Δ est dans l'angle des asymptotes (1) ou dans l'angle adjacent (2) ou sur une asymptote (3). Ces positions seront respectivement traitées dans les propositions 15, 16 et 17, selon le même ordre observé depuis la proposition 2. On peut faire les mêmes remarques pour l'ensemble constitué par les propositions 18-20, qui examinent pour les sections opposées, et en suivant le même ordre, le cas de deux sécantes issues de Δ. M. D-F.

[17] Les propositions 18 à 20 correspondent pour les sections opposées à l'ensemble constitué par les propositions 10 à 13, relatives à une hyperbole. Il est à noter que la rédaction s'abrège de plus en plus puisque le procédé de *réduction à l'absurde* n'est plus développé. M. D-F.

[18] Les propositions 21 à 23 sont des cas particuliers où l'une des deux sécantes menées du point Δ est parallèle à une asymptote. Le cas particulier d'une sécante parallèle à une asymptote a déjà fait l'objet de propositions spécifiques dans les ensembles précédents relatifs à l'hyperbole (prop. 2-5 ; prop. 10-13) : ce sont les propositions 6-8 pour les positions (1), (2) et (3) du point Δ, et la proposition 14 pour la position (3) du point Δ.

La proposition 21 est relative à la position (3) du point Δ. Elle est donc un cas particulier de la proposition 20. La proposition 22 est relative à la position (2) ; elle est un cas particulier de la proposition 19. La proposition 23 est encore un cas plus particulier pour la position (2) du point Δ, puisque chacune des sécantes est parallèle à une asymptote. Les propositions 21 et 23, ainsi que la proposition 7 sont absentes de la traduction arabe. M. D-F.

[19] La présence de l'adverbe ὁμοίως (« pareillement ») est un témoin précieux d'une ancienne ordonnance des propositions 18 à 23, qui se trouve confirmée par l'ordre du texte arabe. La proposition 22 concerne la position (2) du point Δ ; elle est un cas particulier de la proposition 19, et c'est à cette position que renvoie l'adverbe ὁμοίως. Or ce renvoi perd son sens dans le texte grec transmis puisque la proposition 21 est relative à la position (3). Il est clair que, dans un état plus ancien du texte grec, la proposition 22 suivait la proposition 19, dont elle est un cas particulier. On doit donc se demander pour quelle raison cet ordre logique a été modifié, et si ce changement est de date récente ou pas. Il peut s'agir d'un simple accident de reliure, auquel cas la modification est relativement récente. On peut supposer le retournement du feuillet central d'un cahier, portant sur chaque page les propositions 22-23-20-21 (avec leurs figures respectives, elles ont un volume global à peu près équivalent), ce qui, après retournement, donne l'ordre que nous avons dans **V**. On ne peut exclure cependant la possibilité d'une modification volontaire : on a pu vouloir regrouper les propositions traitant du cas particulier des sécantes parallèles à la fin du groupe des propositions 18-20, sur le modèle du groupe de propositions 6-8. Mais une intervention aussi délibérée n'aurait sans doute pas laissé les traces d'une telle incohérence au début de la proposition 22. M. D-F.

[20] La proposition 24 est la première à faire l'objet d'un commentaire par Eutocius (éd. Heiberg, *Coniques*, II, p. 356, 5-17). Eutocius expose deux variantes de démonstration. Dans la première, deux cas sont distingués : le premier est celui où ΘΑ « tombe à l'intérieur des sections » (dans l'*ecthèse* qui précède, ΘΑ a été menée parallèlement à une première sécante ΔΕΓ, ce qui n'est pas le cas dans le texte édité, où l'on a commencé par prendre un point Θ sur la partie commune, avant de mener à ΘΑ la parallèle ΔΕΓ). Eutocius renvoie pour ce premier cas à la démonstration de son édition (ἡ ἐν τῷ ῥητῷ ἀπόδειξις ἁρμόσει « la démonstration donnée dans le texte conviendra ») ; le deuxième cas est celui où ΘΑ est tangente ; il fait l'objet d'une démonstration en bonne et due forme. Par ce témoignage, on peut avoir la certitude que seul le premier cas faisait l'objet d'un traitement dans le texte édité par Eutocius, conformément au texte transmis par **V**. La seconde variante de démonstration (*ibid.*, p. 356, 18-358, 3) est une autre rédaction de la proposition éditée, qui suit le même cheminement, mais en termes plus explicites ; ΘΑ (= Eutocius ΑΒ) est reconnue comme ordonnée. M. D-F.

[21] L'expression διὰ τὴν τομὴν a déjà été relevée dans le Livre I pour le groupe des propositions 27, 31, 32, 42 (voir tome 1.2, p. 97, note 157). Elle y était utilisée pour renvoyer aux propriétés caractéristiques de chacune des trois sections, selon un usage qu'il faut sans doute rapporter à la source d'Apollonius. Elle est utilisée ici dans le cadre d'une référence implicite à III.37, pour renvoyer à la propriété des sections coniques démontrée dans cette proposition. Sur son emploi dans le Livre IV, voir M. Federspiel, *REG*, 122, p. 300-301. M. D-F.

[22] La proposition 27 fait l'objet de deux propositions dans la traduction arabe (prop. 27-28/29) et de trois chez Heiberg (prop. 27/28/29). La division de l'édition Heiberg est arbitraire, et l'éditeur s'en explique dans sa note 1, p. 45-47. Il a trouvé ainsi le moyen de faire correspondre le nombre de propositions comptées, dans **V**, entre les propositions 24 et 43, et les numéros respectifs de ces deux propositions dans le commentaire d'Eutocius. Cette intervention soulève un problème de méthode, puisque c'est le texte primaire, celui de **V**, qui a été modifié au vu du témoignage du texte secondaire, celui du commentaire d'Eutocius. Je rétablis donc l'ordonnance de **V**, qui correspond aux appels explicites qui sont faits dans le texte, avec un numéro d'ordre précis, aux figures (1), (2) et (3). Ces appels perdent toute justification dans l'édition d'Heiberg. Et même s'il n'est pas certain qu'ils soient d'Apollonius (les deux premiers sont également dans la traduction arabe), ils doivent être respectés, parce qu'ils sont solidaires de l'état de texte que transmet **V** dans cette proposition. Le rétablissement du témoignage de **V** permet également de redonner sa généralité à la conclusion qui précède le traitement du cas où le point Γ est entre les deux points de contact : sa dimension se trouve faussée dans l'édition Heiberg, où elle est rapportée au seul cas des tangentes parallèles (= prop. 28 Heiberg). M. D-F.

[23] L'emploi de la particule οὖν comme variante de δή a déjà rencontré dans les Livres I et II, voir M. Federspiel, *REG*, 112, p. 429-430. M. D-F.

[24] Cette référence à la propriété de la proposition 27 est inutile et n'est pas la raison pour laquelle la droite menée du point de concours des deux tangentes coupe chacune des deux sections dans l'hypothèse envisagée. On retrouve cette référence et le même lien de cause à effet dans la proposition 31. La même référence est implicite dans le passage parallèle de la proposition 32 (p. 396, 5-6), comme le souligne la mention ὡς εἴρηται. On a ici un exemple du caractère délibéré et systématique des interventions éditoriales dans la rédaction du texte grec. On remarquera également que le rédacteur a pris soin de reproduire le vocabulaire spécifique du traité, puisqu'on retrouve l'expression κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο utilisée dans le groupe des propositions 41-54 (prop. 44, 46, 48, 49 et 53) pour désigner deux points distincts entre eux. M. D-F.

[25] Sur l'emploi de l'expression κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο dans les mathématiques grecques, on pourra consulter mes « Notes linguistiques et critiques sur le Livre IV, etc. », *REG*, 122, p. 301-303. Dans les *Coniques*, elle présente 7 occurrences, toutes dans le Livre IV, dont elle est un des principaux marqueurs. M.F.

[26] L'omission de **V** a été repérée dès la recension byzantine, et diversement corrigée (voir l'apparat critique de l'édition Heiberg, *Coniques*, II, p. 54). Ma restitution, que confirme la traduction arabe, répond à trois exigences : (1) elle fait apparaître le saut du même au même ; (2) elle respecte le style rédactionnel du groupe des propositions 30-35, qui n'a pas de *diorisme* et mêle *ecthèse* et *construction* ; (3) elle conserve les caractères spécifiques de la partie de la *démonstration* que M. Federspiel a désignée par le terme « anaphore » (voir son article « Sur l'opposition *défini/indéfini*… », p. 253), et repérable ici par les formes verbales au parfait, l'indicatif εἴληπται et le participe ἐπεζευγμέναι. M. D-F.

[27] **V** présente après ΑΖ (p. 414, 10) une glose qui n'a pas sa place dans le texte (voir l'apparat critique). Elle devait figurer en marge dans l'un de ses ancêtres ; elle a été introduite indûment par un copiste dans ce passage qui ne la concerne pas. La remarque est en relation avec le texte qui figure quelques lignes plus haut (p. 414, 5-7). Pierre de Montdoré et Commandino ont été les premiers à supprimer cette mention. M. D-F.

[28] Les trois propositions finales présentent des particularités linguistiques qui leur sont propres. Elles ont été relevées par M. Federspiel, *REG*, 122, p. 307-310. M. D-F.

LEXIQUE DES TERMES TECHNIQUES

Le lexique, tel qu'il est conçu, permet de repérer les concepts et leur expression linguistique dans les Livre II-IV. N'y figurent que les emplois mathématiques des termes retenus. Les mots relatifs à la technique de la démonstration et à celle de l'édition sont également répertoriés. Quand le mot se répète un grand nombre de fois avec le même sens, seules les dix premières occurrences sont citées (les termes qui se répètent sur une même ligne, avec le même sens, n'ont été comptés qu'une fois).

Dans le cas des expressions abrégées, c'est la forme longue à laquelle renvoient implicitement toutes les formes brèves utilisées dans le texte qui est notée et traduite. Les éléments de la forme longue excisés dans les formes brèves sont placés entre crochets droits, si on les trouve explicitement formulés dans certaines occurrences des Livres II-IV ; dans le cas contraire, ils figurent entre parenthèses comme sous-entendus. M. D-F.

ἄγειν *mener*

- une droite 2, 13 ; 6, 2 ; 8, 15 ; 12, 2, 16 ; 14, 1 ; 16, 5 ; 20, 13, 15, 17 ;…

- τεταγμένως ἄγειν *mener* <une droite> *de manière ordonnée* 26, 2 ; 44, 11 ; 84, 15 ; 86, 1 ; 92, 8 ; 106, 6 ; 110, 15 ; 118, 2, 14 ‖ 242, 18

- ἐν γωνίᾳ ἄγειν *mener* <une droite> *sous un angle* 26, 16

ἀδύνατος *impossible* 14, 6 ; 30, 8, 13 ; 60, 4 ; 64, 15 ; 66, 10 ; 74, 12 ; 76, 3 ; 78, 3 ; 82, 5 ;…

- τὸ ἀδύνατον *l'impossibilité* 362, 17 ; 374, 9 ; 380, 7 ; 394, 12

ἄκρος *extrême* 54, 3

- l'extrémité d'une droite : 356, 6

- ἄκρα ἡ διάμετρος (ἄκρου τοῦ ἄξονος) *l'extrémité du diamètre* (*l'extrémité de l'axe*) 284, 8 ; 290, 8 ; 308, 18

ἀλλά

- *mais* (introduit la seconde prémisse) 14, 5 ; 16, 2 ; 26, 6, 9 ; 28, 4 ; 44, 16 ; 46, 24 ; 48, 7 ; 66, 15 ; 74,10 ;…

- *d'autre part* (dans la période causale introduite par ἐπεί) 4, 4 ; 8, 2 ; 44, 13 ; 134, 7 ‖ 200, 13 ; 202, 15

- ἀλλὰ δή : voir δή

- μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν : voir δυνατόν

ἀμβλεῖος *obtus* 138, 18, 19 ; 140, 10

ἀνάγειν *élever* <une droite> (selon une direction donnée)

- [τεταγμένως] ἀνάγειν *élever* <du diamètre une droite> *de manière ordonnée* 106, 7 ; 110, 18 ; 118, 16

ἀναγράφειν (avec ἀπό + gén.) *construire* <une figure> (figure rectiligne)
- sur un segment de droite : 202, 25 ; 238, 15, 21

ἀνάλογον *en proportion*
- ἀνάλογον εἶναι *être en proportion* 46, 9 ; 130, 21 || 182, 2

(ἡ) ἀνάλυσις *analyse* 344, 10

ἀνάπαλιν *par inversion* 128, 1 ; 144, 18 || 222, 6 ; 286, 15 ; 320, 8
- διὰ τὸ ἀνάπαλιν 210, 19

ἀναστρέφειν *intervertir* <un rapport>
- ἀναστρέψαντι *par interversion* 142, 4 || 182, 3 || 364, 18

ἄνισος *inégal* <84, 1>
- εἰς… ἄνισα τέμνειν : voir τέμνειν

(ἡ) ἀντιγραφή *réfutation* (*critique d'un écrit par un autre*) 342, 16

ἀντικείμενος *opposé*
- (αἱ) ἀντικείμεναι [τομαί] *sections opposées* 34, 4, 5 ; 36, 2, 3, 5, 8 ; 66, 18 ; 68, 1, 5 ; 70, 3…
- ἡ ἀντικειμένη [τομή] *la section opposée* 262, 18, 20 || 350, 4, 5 ; 360, 18 ; 362, 7, 9 ; 368, 13, 14 ; 408, 9 ;…
- (αἱ) κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι : voir συζυγία
- (αἱ) συζυγεῖς ἀντικείμεναι : voir συζυγής

ἀντιπάσχειν *être inversement proportionnel* 48, 2

ἀντιστρέφειν *tourner en sens contraire* 414, 16, 19 ; 418, 14, 17 ; 448, 10 ; 450, 9 ; 460, 8, 11, 13 ; 468, 3

(ἡ) ἀντιστροφή *renversement d'ordre*
- réciproque du théorème : 116, 14

ἀντίστροφος *réciproque* 454, 7

(ὁ) ἄξων *axe*
- de la conique : 94, 5, 8, 10 ; 96, 1, 13, 15, 18, 19, 22 ; 98, 1 ;…

ἄπειρος *infini ; en nombre infini* 92,16
- εἰς ἄπειρον *indéfiniment* 32, 1

ἀπό (+ gén.) *depuis*
- droite menée d'un point, d'une ligne : 2, 12 ; 4, 1 ; 16, 5 ; 20, 17 ; 26, 15, 17, 21 ; 46, 20 ; 50, 13 ; 52, 17 ;…
- segments découpés sur une droite : 2, 10 ; 18, 3 ; 36, 6 ; 284, 10 ; 286, 22
- figure construite sur un segment de droite : 2, 17 ; 8, 13 ; 24, 8 ; 50, 11 ; 52, 14 ; 84, 18 || 202, 25 ; 204, 8, 10 ; 208, 8 ;…
- retranchement d'un élément d'une figure : 144, 20
- τὸ ἀπὸ AB : voir τετράγωνος

ἀποδεικνύναι *démontrer* 348, 13

(ἡ) ἀπόδειξις *démonstration* 342, 13 ; 344, 11 ; 348, 6, 7 ; 360, 14 ; 390, 10 ; 464, 2

ἀποδέχεσθαι *approuver* <une théorie mathématique> 344, 13

(ἡ) ἀποδοχή *approbation* <d'une théorie mathématique> 344, 12

ἀπολαμβάνειν *découper*
- un segment de droite : 2, 11 ; 18, 3 ; 20, 11 ; 24, 7 ; 36, 6 ; 46, 21 || 204, 11 ; 212, 8 ; 216, 18 ; 238, 10 ;…
- un polygone : 174, 9, 10 ; 188, 7, 9

ἀποτέμνειν *découper*
- un segment de droite : 284, 9 ; 286, 22, 24 ; 310, 1 ; 312, 15 ; 316, 20 ; 320, 14

ἅπτεσθαι *être tangent* (droite tangente à une courbe) 20, 2, 5, 6, 8

ἄρα
- *donc* 4, 2, 7, 8, 10, 11 ; 6, 11 ; 8, 9, 11 ; 10, 2, 5 ;…
- *alors* (emploi facultatif dans la période causale introduite par ἐπεί) 4, 5 ; 6, 9, 10 ; 8, 3, 7 ; 12, 8 ; 16, 2 ; 18, 13 ; 22, 7, 11 ;…

ἀσύμπτωτος *asymptote* (+ dat.) 4, 11 ; 8, 11 ; 34, 1, 3 ; 36, 1
- (ἡ) ἀσύμπτωτος (*s.e.* εὐθεῖα) *asymptote* 4, 13 ; 8, 13, 17 ; 10, 4, 5, 6, 11, 17, 21 ; 12, 11 ;…

ἄτοπος *absurde* 4, 9 ; 8, 9 ; 10, 5, 12 ; 14, 17 ; 16, 2, 13 ; 20, 7 ; 62, 15 ; 66, 7 ;…
- **τὸ ἄτοπον** *l'absurdité* 360, 5 ; 366, 7 ; 374, 19 ; 376, 13 ; 378, 7 ; 382, 6 ; 390, 6

αὐτός *même*
- ὁ αὐτός *le même* 26, 10 ; 40, 3 ; 46, 4, 5, 8 ; 60, 17 ; 62, 13 ; 100, 7 ; 102, 12 ; 106, 1 ;…
- διὰ τὰ αὐτά *pour les mêmes raisons* 34, 16 ; 60, 16 || 226, 5 ; 234, 10 ; 240, 16 || 406, 7 ; 418, 8 ; 430, 11

- κατὰ τὰ αὐτά *pour les mêmes raisons* ; *en vertu du même raisonnement* 86, 16 ; 108, 14
- διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον *en vertu du raisonnement précédent* 196, 14 ; 236, 11
- κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν *en vertu du raisonnement précédent* 100, 8
- κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω *pour les mêmes raisons que ci-dessus* 394, 12
- τῶν αὐτῶν ὄντων *dans les mêmes conditions* 4, 13 ǁ 190, 11 ; 260, 4 ; 262, 16 ; 270, 15 ; 276, 19 ; 294, 3 ; 296, 1 ; 298, 15 ; 300, 7 ;…
- τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων : voir ὑποκεῖσθαι
- ἐπὶ τὰ αὐτά : voir μέρος

ἀφαιρεῖν *retrancher* 8, 6 ; 22, 10 ; 144, 20 ; 206, 10 ; 210, 8, 9 ; 214, 4 ; 220, 17 ; 224, 7, 8 ;…
- *retrancher* <une grandeur commune> 164, 12 ; 166, 8 ; 170, 2 ; 172, 6 ; 192, 4 ; 230, 16 ; 232, 15 ; 236, 3 ; 238, 3 ; 262, 9 ;…

(ἡ) ἁφή *point de contact* 8, 13, 15 ; 16, 6 ; 42, 3, 15 ; 44, 1, 2 ; 60, 7 ; 64, 3 ; 64, 20 ;…

ἀφορίζω *délimiter* 28, 8

βαίνειν (avec ἐπί + gén.) *s'appuyer sur* 170, 7 ; 178, 9

(ἡ) βάσις *base*
- du triangle : 100, 2 ; 196, 7 ; 198, 17

γάρ
- *en effet* (explication postposée) 8, 9 ; 10, 5 ; 14, 6, 17 ; 16, 13 ; 20, 7 ; 24, 14 ; 30, 8 ; 46, 6, 20 ;…
- au début du développement qui suit le *diorisme* : 22, 3 ; 26, 2 ; 28, 2 ; 32, 8 ; 36, 13 ; 38, 8 ; 40, 15 ; 42, 11 ; 44, 11 ; 50, 1 ;…
- au début de l'*ecthèse* : 20, 3 ; 36, 8 ; 62, 9 ǁ 168, 7 ; 170, 9 ; 190, 14 ; 220, 9 ; 244, 25 ; 284, 12 ; 286, 1 ;…
- εἰ γὰρ δυνατόν : voir δυνατός
- μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν : voir δυνατός
- εἰ γὰρ μή : voir εἰ

γίγνεσθαι *être produit* ; *être engendré* 8, 15 ; 20, 12 ; 50, 10 ; 52, 13 ǁ 168, 3, 5 ; 170, 3, 6 ; 174, 7 ; 176, 6 ;…
- établissement d'une proportion : 146, 9 ; 148, 1 ǁ 200, 7 ǁ 364, 13 ; 388, 16
- égalité demandée de deux figures : 12, 4
- existence d'une solution : 344, 8
- γεγονέτω *soit le problème résolu* 92, 8 ; 96, 1 ; 104, 12 ; 106, 4 ; 108, 3, 13 ; 110, 12 ; 112, 6 ; 114, 7 ; 118, 1 ;…
- γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν *le problème proposé sera résolu* 94, 10
- τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω ; voir λοιπός

(ἡ) γραμμή *ligne*

- ligne courbe : 102, 15 ; 104, 1, 3 ǁ 208, 8 ; 238, 9, 12, 14 ; 266, 12 ; 306, 6 ; 308, 1, 5, 20 ;…

γράφειν

- décrire une ligne autre que la droite : 10, 16, 21 ; 12, 5, 11 ; 98, 8, 15 ; 134, 1, 17 ǁ 294, 8 ; 300, 2 ;…
- produire un écrit : 342, 2, 5

(ἡ) γωνία *angle* 10, 15, 16, 19 ; 46, 9, 11 ; 48, 2 ; 56, 10 ; 58, 4 ; 66, 15 ; 70, 6 ;…

- angle opposé par le sommet : voir κορυφή
- ἡ ὑπὸ [τῶν] ΑΒΓ (*s.e.* εὐθειῶν) [περιεχομένη] [γωνία] *l'angle ΑΒΓ (l'angle compris par les droites ΑΒ,ΒΓ)* 4, 14 ; 24, 15 ; 34, 2 ; 36, 15 ; 46, 12, 13, 28 ; 56, 4, 15 ; 58, 4 ;…
- ἡ Α [γωνία] *l'angle Α* 122, 11 ; 130, 28 ; 132, 8, 10, 12, 13 ; 132, 15 ; 134, 2, 11 ; 134, 14 ;…
- ἡ πρὸς τῷ Α (*s.e.* σημείῳ) [γωνία] *l'angle en Α* (*l'angle au point Α*) 10, 20 ; 46, 9 ; 120, 13 ; 122, 11 ; 126, 2 ; 128, 6, 18 ; 130, 30 ; 136, 20 ; 142, 1 ;…
- ἡ ἐφεξῆς γωνία : voir ἐφεξῆς
- ἐν γωνίᾳ ἄγειν (διάγειν) : voir ἄγειν et διάγειν

δέ

- *or* (particule introduisant la seconde prémisse) 4, 6 ; 6, 10 ; 14, 16 ; 24, 2 ; 26, 13 ; 30, 6 ; 32, 11 ; 46, 28 ; 48, 12, 16 ;…
- *d'autre part* (dans la période causale introduite par ἐπεί) 16, 1 ; 22, 6 ; 38, 15 ; 48, 5 ; 50, 2 ; 58, 4 ; 64, 14 ; 86, 1 ; 92, 2 ; 100, 1 ;…

δεικνύναι *démontrer* 8, 10 ; 22, 5 ; 24, 1 ; 26, 13 ; 86, 19 ; 100, 6 ; 102, 8, 12 ǁ 170, 1 ; 176, 1 ;…

- δεικτέον (avec ὅτι *que*) *il faut démontrer* 4, 13 ; 48, 21 ǁ 186, 7 ; 230, 14, 17 ; 232, 13, 16 ; 236, 1, 3 ; 238, 1 ;…
- ἔστω δεῖξαι (avec ὅτι *que*) *il faut démontrer* 100, 6
- ὁμοίως δὴ δείξομεν (avec ὅτι καί ou ὅτι οὐδέ) *on démontrera pareillement* 4, 11 ; 16, 15 ; 32, 12 ; 40, 3 ; 48, 18 ; 58, 7 ; 60, 3 ; 62, 17 ; 64, 17 ǁ 240, 12 ;…
- ὁμοίως δὴ δειχθήσεται (avec ὅτι καί ou ὅτι οὐδὲ) *on démontrera pareillement* 24, 1 ǁ 210, 16 ; 272, 3 ; 288, 5, 8 ; 294, 1 ǁ 414, 7 ; 418, 6
- ὅπερ ἔδει δεῖξαι *ce qu'il fallait démontrer* 404, 11
- διὰ τὰ δεδειγμένα *en vertu de ce qui a été démontré* 116, 17 ǁ 198, 10 ; 256, 7
- ἐκ τῶν δεδειγμένων *en vertu de ce qui a été démontré* 464, 4 ; 470, 2

δεῖν *falloir*

- dans la formulation des conditions d'un problème (diorisme) : 124, 7 ; 144, 1
- δεῖ *il faut* (au début du *diorisme* dans les *problèmes*) 92, 7 ; 94, 8 ; 98, 1 ; 102, 21 ; 114, 6 ; 120, 7 ; 128, 8 ; 130, 29
- δέον ἔστω *qu'il faille* (au début du *diorisme* dans les *problèmes*) 10, 20 ; 110, 10 ; 112, 5 ; 116, 20 ; 118, 10

- ὅπερ ἔδει δεῖξαι : voir δεικνύναι
- ὅπερ ἔδει ποιῆσαι : voir ποιεῖν

δεύτερος *deuxième* 62, 1 || 392, 10 ; 452, 2 ; 462, 2 ; 466, 3
- second diamètre : voir διάμετρος

δέχεσθαι *être capable* <d’un angle> 134, 2 ; 134, 17 ; 140, 9 ; 144, 21

δή
- emploi figé après un impératif et certains mots (δεῖ, διὰ τὰ αὐτά, ὁμοίως, φανερός) : 6, 8 ; 10, 3 ; 22, 2 ; 32, 14 ; 34, 9, 12, 16 ; 36, 16 ; 46, 15 ; 56, 4 ;…
- introduction du traitement des cas (δή ou ἀλλὰ δή) : 104, 1 ; 106, 16 ; 108, 12 ; 114, 9 ; 118, 10 ; 144, 18 || <282, 4> ; 286, 10 || 386, 3 ; 396, 15 ; 426, 13 ;…
- *alors* (sens conclusif après un verbe au futur, précédé d’une proposition comportant un verbe à l’impératif) 18, 11 ; 30, 4 ; 64, 10 ; 92, 8 ; 104, 4 ; 106, 6 ; 108, 4 ; 110, 13, 15 ; 112, 7 ;…
- dans la formule du *porisme* : voir φανερός
- second *diorisme* : voir λέγω
- συντεθήσεται δὴ οὕτως : voir συντιθέναι

δηλαδή *évidemment* 34, 3

δῆλος *évident* 190, 7 || 460, 1 ; 464, 3 ; 470, 1

διά (+ acc.) *à cause de* 32, 17 ; 34, 13 ; 46, 23 ; 54, 3 ; 86, 1 ; 96, 5 ; 114, 14 ; 116, 13 ; 126, 18 ; 136, 6 ;…
- διὰ τὰ αὐτά : voir αὐτός
- διὰ τὰ δεδειγμένα : voir δεικνύναι
- διὰ τὸ προδεδειγμένον (ou τὰ προδεδειγμένα) : voir προδεικνύναι

διά (+ gén.) *à travers*
- ligne qui passe par un point : 6, 1 ; 8, 15 ; 10, 16, 20 ; 12, 2, 5 ; 14, 1, 8, 12 ; 22, 3 ;…
- δι’ ἴσου : voir ἴσος

διάγειν
- *mener* (joindre par une droite deux éléments d’une figure) 24, 11 ; 36, 9, 13 ; 50, 14 ; 94, 2 ; 98, 17 ; 124, 1, 3 ; 148, 19 || 222, 16 ;…
- ἐν γωνίᾳ διάγειν *mener* <une droite> *sous un angle* 124, 1

διαιρεῖν *diviser* 258, 7 || 358, 1
- δίχα διαιρεῖν : voir δίχα
- διελόντι *par division* 142, 7 ; 146, 15 ; 148, 5 || 282, 18, 26 ; 286, 16

(ἡ) διαίρεσις *division*
- *point de division* 344, 20 ; 350, 4 ; 358, 2 ; 360, 18 ; 362, 20

(ἡ) διάμετρ ος *diamètre* ; *diagonale*
- de la conique 2, 11, 15 ; 8, 16 ; 10, 2 ; 12, 12, 13, 15 ; 14, 3, 7, 9 ;…
- diamètre transverse de la conique : voir πλάγιος
- diamètre droit de la conique : voir ὄρθιος
- second diamètre de la conique : 46, 18 ; 84, 16, 17, 18 ‖ 194, 13 ; 196, 15 ; 252, 6 ‖ 446, 10
- diagonale d'un quadrilatère : 38, 11
- dans l'expression du paramètre : voir δύνασθαι

(τὸ) διάστημα *intervalle* 32, 3, 4, 7, 14
- rayon du cercle : 98, 8, 15

διαφέρειν *différer de* (+ gén.)… *par* (+ datif) 102, 1, 2, 6, 8, 9, 10 ‖ 174, 10, 17 ; 176, 4 ; 188, 7 ;…

διδόναι *donner* 10, 15, 18, 20 ; 32, 2, 4 ; 92, 5, 6, 10, 13 ; 94, 1 ;…

(ὁ) διορισμός *diorisme* (condition de possibilité) 344, 2, 4, 6, 10

διότι *parce que* 202, 3 ; 248, 15 ; 254, 4 ‖ 372, 19 ; 388, 2

διπλάσιος *double* 52, 14, 20 ; 54, 4 ‖ 200, 8 ; 240, 15, 17, 18, 22, 28, 29 ;…
- τὰ διπλάσια τῶν ἡγουμένων : voir ἡγεῖσθαι

διπλοῦς *double* 182, 5 ; 260, 1, 2 ; 284, 4 ; 288, 4 ; 290, 4 ; 306, 13, 14, 15, 16 ;…

δίς *deux fois*
- τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒΓ *le double du rectangle ΑΒ,ΒΓ* 232, 3 ; 246, 2, 5
- τὸ δὶς ἀπὸ …τετράγωνον *le double du carré construit sur…* 228, 9 ; 234, 8 ; 236, 10
- τὸ δὶς ἀπὸ ΑΒ *le double du carré sur ΑΒ* 228, 18 ; 230, 15 ; 232, 3, 14 ; 236, 1, 4 ; 238, 2 ; 240, 26, 27, 28 ;…

δίχα *en deux parties égales*
- δίχα διαιρεῖν *partager en deux parties égales* 254, 17
- δίχα τέμνειν *couper en deux parties égales* 6, 6 ; 8, 13 ; 12, 13, 14 ; 14, 8, 9, 12 ; 16, 5, 9 ; 18, 9 ;…

διχοτομεῖν *couper en deux parties égales* 20, 13 ‖ 436, 12 ; 438, 3

(ἡ) διχοτομία *milieu*
- d'un segment de droite 16, 6 ; 64, 3 ; 76, 8 ; 78, 6 ‖ 252, 13, 14 ; 254, 13, 16 ; 312, 18 ; 320, 17 ;…

(ἡ) δύναμις

- dans l'expression du carré construit sur un segment de droite (δυνάμει) : 312, 19 ; 320, 19

δύνασθαι

- ἴσον δύνασθαι (+ dat.) ou δύνασθαι *avoir son carré équivalent à* (carré construit sur un segment de droite) 2, 11 ; 12, 6 ; 34, 10, 15
- ἡ (*s.e.* εὐθεῖα) παρ' ἣν (*s.e.* παράκειται τὸ χώριον ὅ) δύνανται [αἱ] [ἐπὶ τὴν διάμετρον] (*s.e.* τεταγμένως) [καταγόμεναι] (*s.e.* εὐθεῖαι) *la droite à laquelle s'applique l'aire équivalente au carré sur les droites abaissées sur le diamètre de manière ordonnée* (paramètre) ; 44, 12 ; 46, 16 ; 48, 15

δυνατός *possible* 342, 7 ; 346, 8 ; 348, 6, 12 ; 356, 15 ; 368, 5 ; 374, 2

- εἰ δυνατόν (ou εἰ γὰρ δυνατόν au début du développement qui fait suite au *diorisme*) *si c'est possible* 4, 1 ; 6, 1 ; 10, 1 ; 20, 6 ; 30, 1, 11 ; 58, 10 ; 62, 12 ; 64, 9 ; 74, 9 ;…
- μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν *que ce ne soit pas le cas, mais que… , si c'est possible* (au début du développement qui fait suite au *diorisme*) 10, 10 ; 14, 15 ; 16, 12 ; 66, 5 || 352, 8

δύο *deux* 10, 15, 19 ; 18, 1 ; 26, 16 ; 42, 14 ; 54, 5, 6, 9 ; 56, 4, 5 ;…

ἐάν (+ subjonctif) *si* 2, 10 ; 8, 12 ; 12, 12 ; 14, 7 ; 16, 4 ; 18, 1 ; 20, 1, 9 ; 24, 4 ; 26, 15 ;…

ἐάνπερ (+ subjonctif) *si* 342, 9

ἐγγύς *au voisinage*

- ἔγγιον *plus près* 32, 2, 6 ; 34, 1

εἰ (+ indicatif) *si* (introduction des différents cas) : 96, 1, 14 || 366, 5, 6 ; 374, 7, 8 ; 380, 4, 5, 6 ; 452, 4 ;…

- εἰ δὲ (ou γὰρ) μή (*s.e.* ἔστιν) *si ce n'est pas le cas* (dans le raisonnement par *réduction à l'absurde*) 14, 1 ; 62, 12 ; 78, 1 ; 82, 15 || 298, 1 || 364, 5 ; 374, 5, 18 ; 376, 12 ; 378, 7
- εἰ μὲν οὖν (introduction des différents cas) : voir οὖν
- εἰ γὰρ δυνατόν : voir δυνατός
- μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν : voir δυνατός

(τὸ) εἶδος *figure* 12, 6 || 202, 25 ; 204, 2 ; 238, 15, 21 ; 240, 8, 9, 11, 13, 18 ;…

- rectangle caractéristique ayant pour base le *côté transverse* et pour hauteur le *côté droit* (*corrigendum*, t. 1.2, p. 246) : 2, 12, 17 ; 8, 15 ; 10, 3, 9, 10, 14 ; 12, 10 ; 20, 12 ; 34, 10 ;…

εἰς (+ acc.) *dans* ; *vers*

- droite menée à une ligne : 276, 4 ; 278, 8

- tomber dans un angle : 420, 12 ; 432, 10
- décrire une hyperbole dans des asymptotes données : 10, 21
- couper une droite dans un rapport donné : voir τέμνειν
- εἰς ἄπειρον : voir ἄπειρος
- εἰς μὲν ἴσα (*s.e.* μέρη)… εἰς δὲ ἄνισα (*s.e.* μέρη) τέμνειν : voir τέμνειν

ἐκ (+ gén.) *de*
- dans l'expression de la composition des rapports : voir συγκεῖσθαι
- dans l'expression du demi-diamètre : voir κέντρον
- dans la formule du *porisme* : voir φανερός

ἑκάτερος *chacun des deux* 2, 17 ; 8, 12, 14 ; 10, 4, 8, 11, 13 ; 12, 9 ; 20, 9 ; 24, 4 ;…
- ἐφ' ἑκάτερα : voir μέρη

ἐκβάλλειν
- *prolonger* <une droite> 2, 18 ; 6, 3 ; 8, 19 ; 10, 2, 6 ; 12, 1, 3, 4 ; 14, 6, 19 ;…
- variante de ἄγειν : 246, 11 ; 250, 5 ; 252, 11 ; 254, 11 ; 274, 3
- mener et prolonger <une droite> : 368, 1 ; 374, 13

ἔκκεισθαι *être placé sur la figure* 134, 1, 16 ; 140, 9 ; 144, 20

ἐκτός *à l'extérieur* (adv.) ; *à l'extérieur de* (prép. + gén.) 40, 8, 11 ; 54, 7, <12> ; 56, 6, 9, 14 ; 58, 5 ; 66, 9 ; 72, 3, 8 ;…

ἐλάττων (ἐλάσσων) *plus petit* 32, 3, 7, 12, 14, 17 ; 34, 2 ; 56, 5 ; 58, 4 ; 126, 16 ; 136, 20 ;…

ἐλλείπειν *être déficient de* (+ datif) (application des aires) 290, 11 ; 306, 19

(ἡ) ἔλλειψις *ellipse* 14, 7, 11 ; 58, 8, 10 ; 60, 6, 10 ; 66, 8 ; 94, 1 ; 96, 23 ; 98, 13 ;…

ἔμπροσθεν *précédemment* 100, 9 || 372, 1

ἐν (+ dat.) *dans* <une figure, une portion d'espace> 12, 16 ; 16, 5 ; 28, 8 ; 36, 3 ; 46, 17 ; 50, 6 ; 52, 10 ; 58, 8, 10 ; 62, 5 ; …
- ἐν γωνίᾳ ἄγειν : voir ἄγειν et διάγειν

ἐναλλάξ *par permutation* 26, 12 ; 48, 11 || 182, 8 ; 202, 7 ; 206, 9 ; 208, 1, 4 ; 276, 5 ; 282, 14, 22 ;…

ἐναντίος *opposé*
- (αἱ) κατ' ἐναντίον τομαί *sections opposées* 224, 14

ἐντός *à l'intérieur* (adv.) ; *à l'intérieur de* (prép. + gén.) 10, 16 ; 56, 10, 15 ; 58, 5 ; 66, 14 ; 102, 17, 21 ; 106, 17 ; 110, 9 || <224, 14> ; 228, 15 ;…

ἑξῆς *suivant l'ordre* 100, 6
- lieu adjacent : 114, 4
- αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς (*s.e.* εὐθεῖαι*) les droites suivantes* 32, 12

ἐπάνω *ci-dessus* 394, 12

ἐπεί *puisque* 6, 11 ; 50, 1 ; 78, 3 ; 112, 7 ‖ 250, 17 ; 266, 3 ; 284, 4 ; 306, 11
- ἐπεὶ γάρ (pour introduire le début de la *démonstration*) : 36, 13 ; 60, 14 ; 50, 1 ; 68, 5 ; 90, 14 ; 122, 8 ; 130, 12 ‖ 170, 1 ; 172, 1 ; 176, 1 ;…
- καὶ ἐπεί *et puisque* 6, 6, 10 ; 22, 5 ; 38, 14 ; 46, 18 ; 48, 5 ; 52, 4 ; 58, 3 ; 64, 13; 68, 12 ;…
- ἐπεὶ οὖν *dès lors, puisque* 4, 3 ; 6, 4 ; 8, 1, 5 ; 12, 7 ; 14, 3 ; 16, 1 ; 18, 12 ; 22, 9 ; 26, 4 ;…
- πάλιν ἐπεί *puisque, derechef* 202, 14 ; 282, 20 ; 284, 3 ‖ 420, 8 ; 432, 6 ; 460, 13 ; 468, 5

ἐπειδή *puisque* 6, 8 ; 88, 15
- πάλιν ἐπειδή *puisque, derechef* 102, 3

ἐπείπερ *puisque* 386, 8

ἕπεσθαι *venir immédiatement après* (désignation des dénominateurs) 244, 4, 5

ἐπ' εὐθείας *en ligne droite* (locution adverbiale résultant de l'abréviation de ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας *sur la même droite*, complétée ou non par un complément au datif)
- ἐπ' εὐθείας εἶναι (ou τίθεσθαι ou κεῖσθαι) τῇ ΑΒ *être* (ou *être placé) dans le prolongement en ligne droite de AB* 34, 12 ‖ 352, 13 ; 364, 13 ; 366, 14

ἐπί (+ acc.) *à* ; *jusqu'à*
- droite menée à un point ou à une droite : 2, 12 ; 16, 6 ; 26, 15, 21 ; 64, 2 ; 68, 2, 9 ; 74, 2 ; 78, 6 ; 80, 3 ;…
- droite prolongée jusqu'en un point : 6, 3 ; 12, 1, 3 ; 14, 19 ; 24, 11 ; 28, 2 ; 32, 9 ; 44, 7 ; 58, 13 ; 78, 15 ;…
- droite qui tombe sur un point : 352, 6 ; 372, 3, 5 ; 398, 9
- droite perpendiculaire à une droite : 96, 2, 3, 4, 5, 11 ; 134, 19 ; 136, 2, 4 ‖ 296, 7 ; 298, 1 ;…
- ordonnée abaissée sur le diamètre : 52, 5 ; 60, 15 ; 84, 15 ; 98, 3 ; 106, 6 ; 110, 15 ; 118, 1 ‖ 176, 2 ; 190, 3 ; 224, 3 ;…
- dans l'expression du paramètre : voir δύνασθαι
- dans l'expression de la direction : voir μέρη
- ἐφ' ἑκάτερα : voir μέρη
- (ἡ) ἐπὶ τὰς ἁφάς [ἐπιζευγνυμένη] *droite qui joint les points de contact* 270, 21 ‖ 346, 12

ἐπί (+ gén.) *à ; sur* 66, 15 ; 82, 17
- *dans le cas de* 100, 13, 14 ; 118, 9 ‖ 164, 11 ; 166, 1 ; 286, 6 ; 290, 10, 11 ‖ 348, 1 ; 360, 6 ;…
- point sur une ligne : 26, 15, 17 ; 26, 21, 22 ; 30, 1 ; 92, 6, 13 ; 94, 6 ; 96, 10 ; 98, 14 ;…
- figure construite sur un segment de droite : 134, 1, 16 ‖ 170, 7 ; 178, 9
- renvoi à la figure du texte : 62, 1 ‖ 392, 4, 15 ; 450, 10 ; 452, 2 ; 454, 1, 5 ; 456, 2 ; 458, 1 ; 460, 10 ;…
- segments découpés sur une droite : 238, 10, 13 ; 242, 6, 9 ; 244, 18, 21
- ἐπ᾽ εὐθείας : voir cette expression

ἐπιζευγνύναι *joindre* <par une droite>
- droite menée d'un point à un autre : 2, 18 ; 6, 3 ; 10, 1, 4 ; 12, 1, 3 ; 14, 2, 19, 20 ; 16, 6 ;…
- droite qui joint deux points : 60, 7 ; 64, 3, 20 ; 66, 19 ; 76, 8 ; 80, 4, 6 ; 82, 9 ; 84, 4, 5 ;…

ἐπιτάττειν *proposer* 94, 10

ἐπιψαύειν (emploi dans les *énoncés*) *être tangent* 12, 13 ; 14, 9 ; 42, 2 ; 60, 7 ; 74, 1, 15 ; 80, 2 ; 102, 18 ; 138, 5 ; 172, 8 ;…

ἔρχεσθαι *passer* <par un point> 62, 1 ‖ 282, 1, 4 ; 286, 7, 10 ‖ 362, 16

εὐθύς *droit*
- (ἡ) εὐθεῖα (*s.e.* γραμμή) *droite* 2, 10, 13 ; 8, 12 ; 10, 15, 18, 19 ; 12, 12, 14, 16 ; 14, 7 ;…
- ἐπ᾽ εὐθείας : voir cette expression

εὑρίσκειν *trouver* 92, 5, 7, 16 ; 94, 1, 5, 8 ; 96, 22 ; 98, 1, 2

ἐφάπτεσθαι *être tangent* 2, 10, 16 ; 8, 12, 18 ; 12, 16 ; 16, 4 ; 42, 5, 14 ; 60, 10, 14 ;…
- (ἡ) ἐφαπτομένη [εὐθεῖα] *tangente* 2, 13 ; 14, 4, 13, 15 ; 16, 3, 8 ; 18, 10, 11 ; 22, 3 ; 26, 3 ;…

ἐφαρμόζειν *coïncider* 342, 9

ἐφεξῆς *à la suite* 384, 14 ; 388, 13
- ἡ ἐφεξῆς γωνία *l'angle adjacent* 24, 4 ; 36, 4, 14 ; 70, 5, 10 ; 72, 6 ; 138, 6 ; 142, 20 ; 144, 2 ; 148, 17 ;…
- ἡ ἐφεξῆς τομή *la section adjacente* 40, 9 ; 42, 2, 16 ; 50, 8, 15 ; 52, 12, 19 ‖ 194, 1
- ὁ ἐφεξῆς τόπος *le lieu adjacent* 106, 17

ἔχειν *avoir* (dans l'expression de la propriété géométrique) 46, 10, 28 || 196, 7 ; 198, 18 ; 202, 23 ; 204, 3 ; 250, 2 ; 254, 7 || 400, 11 ; 402, 1 ;…
- ὡς ἔχει… οὕτως… *dans un rapport identique à* 356, 13 ; 366, 11 ; 372, 8
- λόγον ἔχειν : voir λόγος

ἕως (+ gén.) *jusqu'à* 168, 3 ; 170, 6 ; 196, 5 ; 198, 15 ; 316, 23
- ἕως οὗ *jusqu'à ce que* 42, 15

ζητεῖν *chercher* 232, 3 ; 282, 3

ἡγεῖσθαι *précéder* (désignation des numérateurs) 244, 4
- τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια (*s.e.* μέρη) *par duplication des antécédents* 136, 7 ; 142, 6 ; 148, 5

ἥκειν *passer* <par un point>
- ἥξει (futur) : 98, 8 || 294, 8 ; 300, 2 ; 302, 3 ; 304, 11 || 366, 2, 4 ; 374, 18 ; 376, 11, 12 ;…

ἡμικύκλιος *en forme de demi-cercle*
- (τὸ) ἡμικύκλιον *demi-cercle* 134, 3, 17 ; 140, 10 || 304, 13

ἥμισυς *qui forme la moitié* 244, 19 ; 246, 1
- ἡ ἡμίσεια (*s.e.* μοῖρα) *la moitié* 46, 16 ; 48, 15 ; 84, 18 ; 124, 8 ; 146, 1 || 228, 9 ; 234, 8 ; 236, 10 ; 252, 5 ; 302, 10 ;…

ἤτοι
- *c'est-à-dire* 202, 26 ; 204, 1
- ἤτοι… ἤ (ἤτοι) *ou* 70, 7, 15 ; 104, 1 ; 106, 16 ; 138, 12 || 358, 18 ; 362, 11 ; 364, 5 ; 374, 18 ; 380, 2 ;…

(ἡ) θέσις *position*
- θέσει <donné> *en position* 92, 10, 11 ; 96, 5, 7 ; 98, 9, 11 ; 104, 5, 7, 15 ; 106, 5 ;…

(τὸ) θεώρημα
- *théorème* 116, 14 || 342, 22 ; 344, 10
- *proposition* 360, 10

ἰσογώνιος *équiangle* 148, 11

ἴσος *égal* 2, 11, 17 ; 4, 8 ; 6, 2, 4, 7, 8, 10 ; 8, 8, 14 ; …
- δι' ἴσου (*s.e.* διαστήματος) *à intervalle égal* 122, 9 ; 128, 2, 4 ; 130, 17, 19 || 182, 5 ; 210, 20 ; 214, 13 ; 216, 8 ; 218, 15 ; 222, 4 ;…
- ἴσον δύνασθαι : voir δύνασθαι
- εἰς… ἴσα… τέμνειν : voir τέμνειν

κάθετος *perpendiculaire* (adjectif verbal) 96, 3 (*alt.*) ǁ 296, 7 ; 298, 13 ; 304, 9
- (ἡ) κάθετος (*s.e.* εὐθεῖα) *droite perpendiculaire* 96, 2, 3 (*pr.*), 4, 5, 11 ; 98, 5 ; 100, 9, 14 ; 104, 4, 9 ;…

καί
- *d'autre part* (particule introduisant la seconde prémisse) 12, 9 ; 18, 14 ; 52, 5 ; 62, 14 ; 68, 13 ; 84, 15 ; 96, 20 ; 98, 10 ; 100, 2 ; 104, 5 ;…
- *et* (dans la période causale introduite par ἐπεί) 6, 6, 8 ; 12, 7 ; 14, 4 ; 18, 12 ; 34, 15 ; 36, 13 ; 46, 18 ; 60, 14 ; 68, 5 ;…
- *aussi* (emploi adverbial) 4, 6 ; 6, 4 (*alt.*), 9, 11 ; 8, 3, 6 ; 12, 8 ; 14, 5, 16 ; 16, 1 ;…
- dans l'expression du second *diorisme* : voir λέγω
- καὶ ἐπεί : voir ἐπεί

καλεῖν *appeler*
- καλούμενος *appelé* 10, 17 ǁ 194, 13 ; 200, 8, 12

κατά (+ acc.) *en* (sens local)
- dans l'expression du contact ou de l'intersection : 2, 10, 16 ; 4, 1 ; 6, 2 ; 8, 18 ; 10, 7 ; 12, 13 ; 14, 8, 13, 15;…
- ligne divisée en un point : 6, 6 ; 8, 13 ; 14, 12 ; 16, 9 ; 18, 9 ; 20, 4, 16 ; 42, 3, 7 ; 52, 1 ;…
- κατὰ κορυφήν : voir κορυφή

κατάγειν *abaisser* <une droite> (selon une direction donnée)
- [τεταγμένως] κατάγειν *abaisser* <sur le diamètre une droite> *de manière ordonnée* 4, 2 ; 148, 9 ǁ 164, 11 ; 166, 3 ; 190, 6 ; 194, 14 ; 196, 16 ; 200, 4 ; 202, 24 ; 240, 2…
- (ἡ) [τεταγμένως] κατηγμένη (*s.e.* εὐθεῖα) *droite abaissée de manière ordonnée* 52, 5 ; 60, 16 ; 102, 11 ǁ 176, 2 ; 190, 3, 5 ; 202, 26 ; 204, 1 ; 224, 3 ; 248, 7 ;…
- (ἡ) [τεταγμένως] καταγομένη (*s.e.* εὐθεῖα) *droite abaissée de manière ordonnée* 12, 5 ; 98, 3
- dans l'expression du paramètre : voir δύνασθαι

(ἡ) καταγραφή *figure* (représentation par le dessin) 62, 2 ǁ 360, 13 ; 392, 5, 10, 16 ; 450, 10 ; 452, 2 ; 454, 1, 5 ; 456, 3 ;…

κεῖσθαι (sert de passif à τιθέναι)
- *être placé* 6, 2 ; 10, 2 ; 12, 1, 2 ; 20, 16 ; 104, 9, 17 ; 106, 11 ; 110, 13, 23 ;…
- au sens figuré (*être posé*) : 10, 3

(τὸ) κέντρον *centre*
- du cercle 98, 7, 15 ; 134, 18 ; 138, 2 ; 140, 14 ; 146, 14 ǁ 400, 7
- de la conique 2, 12, 15 ; 8, 17 ; 14, 8, 12, 18 ; 34, 5 ; 36, 8 ; 38, 6 ; 42, 14 ;…
- dans l'expression du rayon du cercle : 100, 15 ǁ 304, 13

- ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (*s.e.* τῆς τομῆς εὐθεῖα) *la droite menée du centre de la section* 50, 11 ; 52, 14 ‖ 202, 25 ; 204,2

κλᾶν *briser* (droite brisée en un de ses points pour former un angle) 138, 7 ; 144, 2 ‖ 306, 1, 5 ; 308, 1, 5

κοῖλος *concave*
- τὰ κοῖλα *concavité* 406, 9 ; 406, 13 ; 408, 4 ; 410, 7 ; 414, 7 ; 424, 8 ; 444, 13 ; 456, 1 ; 464, 1 ; 468, 7

κοινός *commun* 34, 4, 6 ; 36, 2 ; 38, 3, 7 ; 40, 5 ; 48, 7 ; 100, 1 ‖ 164, 12 ; 166, 8 ;…

κοινῶς *en commun* 348, 1 ; 360, 6

(ἡ) κο ρυφή *sommet*
- de la conique 2, 10 ‖ 286, 25
- du triangle 194, 3 ; 196, 7 ; 198, 18
- (ἡ) κατὰ κορυφὴν (*s.e.* ἀντικειμένη γωνία) *angle opposé par le sommet* 108, 1 ‖ 300, 5
- (οἱ) κατὰ κορυφὴν τρίγωνοι : voir τρίγωνος

(ὁ) κύκλος *cercle* 14, 7, 11 ; 16, 4, 8 ; 58, 8, 10 ; 60, 6, 10 ; 62, 6 ; 64, 1 ;…
- ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ (*s.e.* εὐθεῖαν) γραφόμενος κύκλος *le cercle décrit autour du diamètre AB* 294, 8 ; 300, 2 ; 302, 3 ; 304, 11
- ὁ κέντρῳ τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γραφόμενος *le cercle décrit de centre A et de rayon AB* 98, 8

κυρτός *convexe*
- τὰ κυρτά *convexité* 404, 13 ; 406, 3 ; 406, 10 ; 414, 16 ; 414, 20 ; 418, 14 ; 418, 18 ; 448, 10 ; 450, 9 ; 460, 9 ;…

κωνικός *conique* 2,4 ‖ 342, 3

λαμβάνειν *prendre* (par la pensée) 2, 13 ; 26, 20, 22 ; 28, 11 ; 30, 1 ; 32, 14 ; 80, 12 ; 84, 14 ; 98, 13, 14 ;…
- τῆς ΑΒ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης *si AB est prise comme hauteur commune* 48, 8
- τοῦ ὑπὸ ΑΒΓ μέσου λαμβανομένου *si le rectangle AB,BΓ est pris comme moyen* 316, 4 ; 322, 14

λέγειν *dire* 58, 4 ; 78, 7 ; 80, 5, 10 (*alt.*) ; 96, 6 ‖ 228, 2 ; 238, 8 ; 242, 4 ; 282, 6 ; 290, 15 ;…
- dans le *diorisme* (avec ὅτι *que*) : 2, 19 ; 8, 19 ; 12, 18 ; 14, 13 ; 16, 11 ; 18, 7 ; 20, 5 ; 22, 1 ; 28, 1, 13 ;…
- dans le second *diorisme* (suivi normalement de δὴ ὅτι καί ou δὴ ὅτι οὐδέ) : 10, 8 ; 26, 1 ; 30, 10 ; 122, 7

- ὡς εἴρηται *comme on l'a dit* 204, 3 ; 292, 3 ǁ 364, 3 ; 374, 12 ; 400, 6

λείπειν *laisser* (soustraction de grandeurs) 192, 2
(ὁ) λόγος *rapport* <entre deux grandeurs> 26, 8, 9 ; 46, 5, 6, 7 ; 108, 5, 6, 9 ; 110, 4, 16 ;…
- couper une droite dans un rapport donné : voir τέμνειν
- λόγον ἔχειν *avoir un rapport* 26, 5 ; 44, 17 ; 46, 2 ; 126, 3, 4, 5, 7, 13 ; 136, 17, 19 ;…
- (ὁ) συγκείμενος λόγος : voir συγκεῖσθαι

λοιπός *restant* 8, 7 ; 22, 11 ; 46, 7, 13 ; 104, 2 ǁ 164, 13 ; 166, 1, 9 ; 172, 6 ; 184, 1 ;…
- τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω (ou γεγονέτω ou ἐὰν… γένηται ou ὑπάρχῃ) *que le reste soit le même* (ou *si le reste est le même*) 356, 5 ; 362, 19 ; 368, 10 ; 376, 2, 7 ; 442, 2

μείζων *plus grand* 6, 10, 11 ; 8, 9 ; 30, 8 ; 32, 11 ; 124, 5, 8, 11 ; 126, 3, 4 ;…

(τὰ) μέρη *parties* (emploi analogique pour désigner une portion d'espace)
- ἐπὶ τὰ αὐτὰ [μέρη] *dans le même sens* 404, 13 ; 406, 3, 9, 13 ; 408, 4 ; 410, 6 ; 444, 13 ; 456, 1 ; 464, 1 ; 468, 7
- ἐπὶ τὰ αὐτὰ (*s.e.* μέρη) (avec datif) *dans le même sens que* 424, 8
- ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη (avec génitif) *du même côté de* 60, 9 ; 62, 4
- ἐπὶ τὰ αὐτὰ (*s.e.* μέρη) (avec datif) *du même côté que* 66, 21 ; 70, 1 ; 120, 4, 8 ; 128, 7 ǁ 406, 6, 8
- ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη *de l'autre côté* 110, 8 ; 112, 2
- ἐφ' ἑκάτερα (*s.e.*τὰ μέρη) (locution adverbiale) *de part et d'autre* 18, 2, 7 ; 40, 8, 11 ; 72, 3, 8 ǁ 248, 5 ; 290, 10 ; 292, 3 ; 304, 16 ;…
- ἐφ' ἑκάτερα (*s.e.*τὰ μέρη) (locution prépositionnelle + gén.) *de part et d'autre de* 2, 11

(τὸ) μέρος *partie* 4, 4 ; 12, 10 ; 24, 8 ; 50, 3 ; 52, 7 ; 84, 19 ; 114, 16 ǁ 284, 10, 15 ; 290, 9 ;…

μέσος *au milieu* 74, 2 ; 80, 3 ; 84, 5 ; 90, 6 ; 138, 7 ; 144, 2 ǁ 270, 17 ; 276, 21
- moyen terme d'une proportion : 316, 3 ; 322, 14

μετά (+ gén.) *avec* 228,7, 17
- somme de deux figures : 6, 7 ; 54, 2 ; 102, 3, 4, 5 ǁ 186, 14, 15 ; 206, 6 ; 210, 6 ; 212, 17 ;…
- deux droites formant les côtés d'un angle : 130, 29

μεταξύ (+ gén.) *entre* 20, 11 ; 24, 7 ; 50, 10 ; 52, 14 ; 100, 12 ǁ 184, 8 ; 204, 1, 10 ; 212, 7 ; 214, 18 ;…
- ὁ μεταξὺ τόπος : voir τόπος

μέχρι (+ gén.) *jusqu'à* 210, 2

οἷος

- οἷον (adverbe) *comme par exemple* 148, 2 ‖ 184, 8, 9

ὅλος *entier* 8, 5 ; 22, 9 ; 42, 12 ; 46, 12 ‖ 172, 7 ; 180, 2, 5 ; 184, 6 ; 206, 9 ; 210, 8 ;…

ὁμογενής *de même genre* 342, 19

ὅμοιος *semblable* 12, 6 ; 46, 10 ; 126, 17, 21 ; 134, 9 ; 136, 26 ; 140, 3 ; 142, 1 ; 148, 14 ‖ 182, 7 ;…

(ἡ) ὁμοιότης *similitude*

- de triangles 278, 11 ; 298, 6

ὁμοίως

- *pareillement* 6, 7 ; 22, 2 ; 36, 16 ; 72, 1 ; 86, 3 ; 88, 12 ‖ 184, 4 ; 186, 11 ; 190, 12 ; 232, 6 ;…
- ὁμοίως δὴ δείξομεν (ou δειχθήσεται) : voir δεικνύναι
- *semblablement* (dans syntagmes formés avec les verbes ἀναγράφειν, εἶναι, κεῖσθαι, λαμβάνειν, τέμνειν) 208, 10 ; 214, 20 ; 224, 19 ; 238, 15, 21 ‖ 378, 8, 9 ; 380, 12

ὁμόλογος *homologue* 46, 11 ‖ 344, 19 ; 358, 1 ; 366, 15

ὀξύς *aigu* 120, 5, 8 ; 122, 2 ; 124, 7, 11 ; 128, 9 ; 130, 4, 26 ; 132, 15 ; 134, 14 ;…

ὄρθιος *droit*

- diamètre droit de la conique : 78, 7 ; 80, 5, 10 ; 84, 12 ‖ 228, 3, 8, 12 ; 234, 7 ; 236, 9, 13 ;…
- ἡ ὀρθία [πλευρά] *le côté droit* <de l'εἶδος> 2, 15 ; 20, 18 ; 122, 16 ; 126, 7, 23 ; 128, 14 ; 130, 5, 16 ; 132, 18 ; 134, 5 ;…

ὀρθογώνιος *rectangle*

- (τὸ) ὀρθογώνιον *rectangle* 20, 10 ; 26, 18 ‖ 312, 15, 20 ; 320, 14
- τὸ ὑπὸ [τῶν] ΑΒΓ (*s.e.* εὐθειῶν) [περιεχόμενον ὀρθογώνιον] *le rectangle ΑΒ,ΒΓ* (*le rectangle compris par les droites ΑΒ,ΒΓ*) 4, 3, 4, 7, 8 ; 6, 7, 11, 12 ; 8, 2, 4, 6 ;…

ὀρθός *droit* ; *perpendiculaire*

- droite perpendiculaire : 104, 14, 17 ; 106, 2 ; 108, 15 ; 110, 5
- angle droit : 56, 4, 5 ; 58, 4 ; 122, 10 ; 126, 2 ; 128, 5, 17 ; 130, 21 ; 136, 20 ; 140, 2 ;…
- πρὸς ὀρθάς (*s.e.* γωνίας) *à angles droits* 20, 17 ; 96, 17 ; 98, 3 ; 100, 3 ; 124, 13 ; 136, 14 ; 140, 12, 13 ; 142, 17 ; 144, 22 ;…

οὖν *donc*

- variante de ἄρα : 40, 16 ‖ 224, 4
- variante de δή après un impératif : 18, 11 ; 38, 11 ; 104, 3 ; 136, 22 ‖ 226, 14 ‖ 394, 2
- emploi stéréotypé dans le syntagme εἰ μὲν οὖν : 94, 10 ; 96, 13 ‖ 282, 1 ; 286, 6 ‖ <366, 4>
- emploi stéréotypé dans le syntagme ὅτι μὲν οὖν : 24, 13 ; 42, 8 ; 100, 12 ‖ 280, 19
- ἐὰν οὖν *si donc* 92, 10 ; 96, 5 ; 98, 6
- μὲν οὖν *donc* 394, 5
- ἐπεὶ οὖν : voir ἐπεί

πάλιν *de nouveau* 104, 11 ; 106, 14 ; 108, 12 ; 118, 10 ‖ 374, 19 ; 376, 14 ; 380, 8 ; 382, 5 ; 456, 4

- πάλιν ἐπεί (ἐπειδή) : voir ἐπεί (ἐπειδή)

παρά (+ acc.)

- *parallèlement à* 20, 13 ; 24, 8 ; 30, 2, 5 ; 42, 15 ; 80, 6 ; 84, 3 ; 90, 7 ; 92, 3 ; 96, 7 ;…
- dans l'expression d'un segment de droite le long duquel une aire est appliquée : 12, 6 ; 34, 10, 15 ; 48, 14, 18 ; 52, 7 ; 84, 19 ; 116, 11 ‖ 200, 8, 12 ;…
- dans l'expression du paramètre : voir δύνασθαι

παραβάλλειν *appliquer* <une aire> 290, 9 ; 292, 3 ; 304, 16 ; 306, 19

(ἡ) παραβολή

- *application* <d'une aire> 290, 14 ; 298, 16 ; 306, 1, 20
- *parabole* 12, 12, 15 ; 14, 3 ; 54, 5, 9 ; 66, 11 ; 94, 6 ; 96, 10, 18, 19 ;…

παραλείπειν *laisser passer* 384, 15 ; 388, 13

παραλληλόγραμμος *parallélogramme*

- (τὸ) παραλληλόγραμμον *parallélogramme* 38, 9, 12 ; 138, 16 ; 144, 14 ‖ 164, 12 ; 200, 4

παράλληλος *parallèle* 4, 2 ; 6, 4, 5, 8 ; 12, 7, 14, 18 ; 14, 4, 5, 9 ;…
- (ἡ) παράλληλος (*s.e.* εὐθεῖα) *droite parallèle* 6, 1 ; 12, 2, 1 ; 14, 1, 16 ; 16, 5, 9 ; 24, 14 ; 26, 17, 18, 19 ;…

παρατεταγμένως (παρὰ τεταγμένως) *parallèlement à une droite abaissée de manière ordonnée*

- (ἡ) παρὰ τεταγμένως (*s.e.* εὐθεῖα) *droite parallèle à une ordonnée* 284, 8, 13 ; 308, 18 ; 310, 6

παρεμπίπτειν (avec μεταξύ + gén.) *tomber entre* 414, 11

(τὸ) πέρας *extrémité* <d'une droite> 2, 13 ; 12, 13 ; 14, 8 ; 74, 15 || 300, 9 ; 308, 19 || 366, 15 ; 372, 11 ; 376, 2 ;…

περί (+ acc.) *autour de* 196, 6
- dans l'expression du cercle décrit autour du diamètre : 294, 7 ; 300, 1 ; 302, 2 ; 304, 11
- dans l'expression de la conique décrite autour du diamètre : 12, 5
- côtés comprenant un angle : 46, 9 ; 48, 2 ; 130, 20

περιέχειν *comprendre*
- un angle : 4, 14 ; 10, 15, 19 ; 24, 4, 7 ; 34, 2, 3 ; 36, 4 ; 36, 14 ; 108, 1 ;…
- une aire : 20, 10 ; 24, 6 ; 26, 18, 19 ; 50, 9 ; 52, 13 || 204, 9 ; 208, 9 ; 212, 6 ; 214, 18 ;…
- une ligne : 24, 5 ; 36, 4 ; 56, 10 ; 66, 14 (*alt.*) ; 70, 6, 11 ; 72, 5, 6 ; 106, 18 ; 112, 4 ;…
- position d'un ou deux points entre deux autres points : 54, 7, 11 ; 56, 9, 13 ; 66, 14 (*pr.*) || 348, 4, 9 ; 350, 2, 8 ; 360, 8 ;…
- contenu d'un ouvrage : 342, 7

(ἡ) περιφέρεια
- *circonférence* <du cercle> 14, 7, 11 ; 16, 4, 8 ; 58, 8, 10 ; 60, 6, 10 ; 62, 6 ; 64, 1 ;…

πίπτειν *tomber* 40, 8, 12 ; 66, 20 ; 68, 3 ; 72, 3, 4, 8, 13 || 350, 13 ; 352, 7 ;…

πλάγιος *transverse*
- diamètre transverse de la conique : 78, 7 ; 80, 5, 10 ; 84, 12 ; 116, 9 || 228, 3, 7, 9, 10, 12 ;…
- ἡ πλαγία [πλευρά] *le côté transverse* <de l'εἶδος> 108, 4 ; 122, 16 ; 126, 6, 7, 23 ; 128, 14 ; 130, 6, 16 ; 132, 18 ; 134, 5 ;…

πλεῖστος (superlatif de πολύς)
- le plus grand nombre possible de points : 342, 7, 10

πλεονακῶς *de plusieurs manières* 344, 7

(ἡ) πλευρά *côté*
- d'un triangle : 46, 10, 11 ; 48, 2 ; 130, 21
- ἡ ὀρθία πλευρά : voir ὄρθιος
- ἡ πλαγία πλευρά : voir πλάγιος

ποιεῖν *faire* 12, 17 ; 56, 5 ; 120, 4, 8 ; 126, 17 ; 132, 1, 9 ; 138, 5 ; 142, 23 ; 148, 20 ;…
- dans l'expression de l'établissement d'une proportion : 46, 15 ; 110, 5, 24 ; 126, 9, 15 ; 130, 5 ; 134, 4 ; 140, 11 ; 142, 13 || 200, 11
- résoudre le problème : 106, 13 ; 110, 6 ; 130, 10, 23 ; 132, 17 ; 138, 3

- ὅπερ ἔδει ποιῆσαι : 148, 21

πορεύεσθαι *passer* <par un point> 360, 4

(τὸ) πρόβλημα *problème* 106, 13 ; 110, 6 ; 116, 16 ; 120, 16 ; 124, 9 ; 130, 3, 10, 23 ; 132, 17 ; 138, 4 ;…

προδεικνύναι *démontrer précédemment* 92, 4 || 172, 1 ; 254, 2

- διὰ τὸ προδεδειγμένον (ou τὰ προδεδειγμένα) *en vertu de ce qui a été démontré antérieurement* 72, 16 ; 114, 2
- διὰ τὸ προδειχθέν *en vertu de ce qui a été démontré antérieurement* 304, 10

πρόκεισθαι *proposer*

- ὡς πρόκειται *de la manière proposée* 102, 22

προλέγειν *dire précédemment* 116, 6 || 178, 10 ; 284, 12 || 342, 12 ; 358, 6 ; 360, 10 ; 366, 1 ; 390, 9, 11 ; 462, 6

πρός (+ acc.) *vers*

- droite menée d'un point vers une ligne 50, 7, <14> ; 52, 11, 17 || 228, 2 ; 306, 1, 5 ; 308, 1, 5 || 352, 11
- droite menée à un point 308, 19 ; 312, 13 ; 316, 18 ; 320, 12
- sens dans lequel une courbe tourne sa concavité : 418, 14
- angle formé par la ligne brisée : 138, 7 ; 144, 2
- dans l'expression du rapport entre deux grandeurs : 4, 3, 5, 6, 7, 8 ; 8, 1, 2, 3, 4, 5 ;…
- πρὸς ὀρθάς : voir ὀρθός

πρός (+ dat.) *auprès de*

- *appliqué à* 8, 15 ; 10, 3, 9, 14 ; 20, 12 ; 38, 14 ; 40, 1 ; 48, 17 ; 50, 1, 3 ;…
- situe l'extrémité d'un segment de droite ou le sommet d'une figure 18, 3 ; 36, 6 || 174, 9 ; 188, 9 ; 196, 5 ; 198, 17 ; 204, 11 ; 212, 8 ; 216, 18 ; 286, 23 ;…
- point sur une ligne : 48, 22, 25 ; 50, 5 || 286, 25
- angle formé par deux droites : 120, 4, 7 ; 128, 8 ; 130, 25 ; 132, 1, 9 ; 138, 5 ; 142, 22 ; 148, 19 || 294, 5 ;…
- angle construit sur un segment de droite et à un point donné : 148, 7
- ἡ πρὸς τῷ Α : voir γωνία

προσάγειν *s'approcher* 32, 2, 7

προσβάλλειν *mener vers* 316, 18

προσεκβάλλειν *prolonger* (variante de ἐκβάλλειν) 398, 8 ; 406, 13

προσκεῖσθαι *être ajouté* 6, 6 || 206, 5 ; 212, 17 ; 250, 2 ; 254, 7

- grandeur commune ajoutée : 170, 2 ; 180, 2, 5 ; 186, 15 ; 250, 20 ; 262, 10

προσλαμβάνειν (employé au participe) *prendre avec* (addition de grandeurs) 192, 3 ; 232, 13, 18 ; 238, 12, 20 ; 242, 1 ; 244, 19 ; 246, 1

προσπίπτειν *tomber sur*
- droite menée d'un point à une ligne : 52, 18 ll 216, 15 ; 220, 5 ; 302, 9 ll 344, 15

προστιθέναι *ajouter* <une partie commune> 192, 3

(ἡ) πρότασις *énoncé* 178, 13

πρότερον
- *d'abord* (ordre de traitement des cas) 60, 11 ; 68, 3 ; 94, 6 ; 102, 19 ; 108, 2 ; 120, 6 ; 122, 1 ; 130, 27 ; 138, 13 ; 144, 9 ;…
- *précédemment* 190, 14 ; 196, 14 ; 220, 9 ; 244, 25 ; 272, 2 ; 296, 4 ; 302, 11 ll 376, 13 ; 378, 7 ; 390, 6 ;…

προτιθέναι *proposer* 460, 2 ; 464, 4 ; 470, 2

πρῶτος *premier* 392, 4 ; 450, 10 ; 460, 10 ; 464, 8
- πρῶτον *d'abord* (ordre de traitement des cas) 460, 9 ; 464, 8

(τὸ) σημεῖον *point* 10, 15, 16, 20 ; 14, 18 ; 18, 1 ; 20, 2, 4, 5, 8 ; 24, 6 ;…

συγκεῖσθαι *être composé* (produit de rapports) 26, 8, 10 ll 204, 3 ; 230, 2, 4 ; 310, 9 ; 312, 2, 6, 7 ; 320, 3 ;…
- ὁ συγκείμενος λόγος ἔκ [τε] τοῦ (*s.e.* λόγου) ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ καὶ ΓΔ πρὸς ΔΕ *le rapport composé des rapports que ΑΒ a avec ΒΓ et que ΓΔ a avec ΔΕ* 46, 1 ll 198, 1 ; 202, 17 ; 312, 17, 29 ; 320, 16
- ὁ συγκείμενος λόγος ἔκ [τε] τοῦ (*s.e.* λόγου) τῆς ΑΒ πρὸς ΒΓ καὶ τοῦ (*s.e.* λόγου) τῆς ΓΔ πρὸς ΔΕ *le rapport composé des rapports de ΑΒ à ΒΓ et de ΓΔ à ΔΕ* 26, 5 ; 44, 17 ; 46, 3, 4 ll 228, 23 ; 314, 13 ; 316, 6, 12 ; 318, 12 ; 320, 29 ;…

συζυγής *conjugué*
- diamètres conjugués de la conique : 38, 5 ; 44, 2, 4, 9 ; 48, 19 ; 52, 6 ; 78, 8, 14 ; 80, 1, 5 ;…
- axes conjugués de la conique : 100, 5
- (αἱ) συζυγεῖς [ἀντικείμεναι] *sections opposées conjuguées* : 38, 5 ll 194, 5 ; 198, 14 ; 226, 3 ll 436, 14 ; 440, 9

(ἡ) συζυγία *conjonction* 448, 6
- (αἱ) κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι [τομαί] *sections opposées conjuguées* 38, 3 ; 40, 5, 7, 10 ; 42, 1, 4, 13 ; 44, 4 ; 48, 23 ; 50, 6 ;…

συμβαίνειν *arriver* (être vérifié) 354, 7 ; 360, 5, 9 ; 362, 17 ; 366, 7 ; 374, 9 ; 376, 13 ; 378, 7 ; 380, 7 ; 382, 6 ;…

συμβάλλειν
- *rencontrer* (+ dat.) 66, 8 ; 80, 14 ; 100, 13 || 180, 8 ; 186, 6 || 2, 9, 11 ; 36, 17, 18 ; 40, 13 ;…
- *se rencontrer* 388, 12 ; 390, 15 ; 392, 1 ; 398, 7 ; 428, 8 ; 446, 3, 4 ; 460, 16

συμπίπτειν
- *rencontrer* (+ dat.) : 2, 14, 19 ; 4, 1, 10 ; 6, 2 ; 8, 12, 19 ; 10, 1, 6 ; 14, 6 ;…
- *se rencontrer* : 64, 2, 6, 19 ; 66, 2 ; 70, 5, 15 ; 80, 3 ; 82, 8 ; 84, 3 || 164, 2 ;…

(ἡ) σύμπτωσις *rencontre* 236, 5
- *point de rencontre* 42, 16 ; 48, 21 ; 54, 6, 7, 10, 11 ; 56, 8, 9, 12 ; 64, 2 ;…

συνάγειν *conclure* 374, 19

συναμφότερος *les deux ensemble*
- συναμφότερος ἡ ΑΒΓ *la somme de AB et de BΓ* 306, 15, 16 ; 308, 14

συναποδεικνύναι *démontrer en même temps* 190, 9

συνάπτειν *composer* (produit de rapports)
- ὁ συνημμένος λόγος ἔκ τε τοῦ (*s.e.* λόγου) ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ καὶ ΓΔ πρὸς ΔΕ *le rapport composé des rapports que AB a avec BΓ et que ΓΔ a avec ΔE* 198, 7 ; 202, 14, 21

(ἡ) συναφή *composition* <de rapports> 232, 6

(ἡ) σύνθεσις *construction* <d'un problème> 120, 2 ; 124, 7 || 344 2

συνιστάναι *construire* <une figure> (figure rectiligne) 122, 4 ; 130, 8 ; 136, 22
- avec πρός (+ dat.) *construire* <un angle> *sur* <un segment de droite> et *à* <un point donné> 148, 7

συντάττειν *composer* <un ouvrage> 2, 4 || 342, 3

συντιθέναι *réunir ; construire*
- συνθέντι *par composition* 136, 8 ; 146, 13 ; 148, 4 || 286, 16
- συντεθήσεται [δὴ] οὕτως *la construction sera la suivante* 92,12 ; 96, 9 ; 98, 12 ; 104, 8, 16 ; 106, 10 ; 108, 8 ; 110, 3, 21 ; 112, 12 ;…

τάσσειν *placer de manière ordonnée* 92, 10 ; 96, 5 ; 98, 7
- (ἡ) τεταγμένη (*s.e.* εὐθεῖα) *droite abaissée de manière ordonnée* 310, 4

τέμνειν *couper* 4, 14 ; 20, 9, 15 ; 24, 5, 9, 11, 14 ; 36, 3, 9, 14 ;…
- couper une droite dans un rapport donné : 134, 19 || 280, 14 || 344, 18 ; 374, 8
- δίχα τέμνειν : voir δίχα

- εἰς μὲν ἴσα (*s.e.* μέρη)… εἰς δὲ ἄνισα (*s.e.* μέρη) τέμνειν *couper en parties égales… et en parties inégales* 210, 5 ; 240, 14, 23 ; 252, 7 ; 256, 16

τεταγμένως de *manière ordonnée* (parallèlement à une « certaine droite »)
- dans l'expression du paramètre : voir δύνασθαι
- τεταγμένως κατάγειν : voir κατάγειν
- τεταγμένως ἄγειν : voir ἄγειν
- τεταγμένως ἀνάγειν : voir ἀνάγειν

τέταρτος *quatrième* 454, 5 ; 468, 7
- τὸ τέταρτον [μέρος] *le quart* 2, 12, 16 ; 4, 4, 5 ; 8, 15; 10, 3, 9, 10, 13 ; 12, 10 ;…

τετράγωνος *carré* 290, 11 ; 304, 17 ; 306, 20
- **(τὸ) τετράγωνος** *carré* 2, 17 ; 8, 14 ; 50, 11 ; 52, 15 ‖ 204, 9, 11 ; 208, 9 ; 212, 6, 8 ; 214, 18 ;…
- τὸ ἀπὸ [τῆς] ΑΒ (*s.e.* εὐθείας ἀναγεγραμμένον) [τετράγωνον] *le carré sur AB (le carré construit sur la droite AB)* 4, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; 6, 7, 12 ;…

τετραπλάσιος *quadruple* 12, 8 ‖ 288, 5, 6

τετράπλευρος *quadrilatère*
- (τὸ) τετράπλευρον *quadrilatère* 168, 4, 11 ; 170, 1, 3, 7, 13 ; 172, 2, 3, 4 ; 176, 7 ;…

τιθέναι *placer* 352, 14 ; 364, 14

τις (expression du caractère indéfini) *un certain* 6, 6 ; 8, 18 ; 10, 20 ; 12, 12, 16 ; 14, 8 ; 16, 15 ; 18, 6 ; 20, 9, 15 ;…

(τὸ) τμῆμα *segment*
- de droite : 8, 14 ; 50, 9 ; 52, 13 ‖ 228, 6, 7 ; 234, 4, 6 ; 236, 7, 8 ; 260, 6 ;…
- de cercle : 134, 2, 17 ; 140, 9, 10 ; 144, 20 ‖ 294, 9 ; 300, 3

(ἡ) τομή *section*
- (ἡ) [κώνου] τομή *section de cône* 2, 12, 14, 16, 19 ; 4, 1, 10, 12 ; 8, 11 ; 10, 16 ; 12, 13 ;…

(ὁ) τόπος *lieu* 28, 8 ; 70, 16 ; 72, 4, 13 ; 90, 2 ; 104, 2 ; 106, 17 ; 110, 10 ; 114, 4 ; 116, 6 ;…
- ὁ μεταξὺ τόπος *le lieu compris entre* 108, 1 ; 116, 15 ‖ 228, 5 ‖ 444, 9

τοσαυταχῶς *d'un nombre donné de manières* : 444, 7

τουτέστι *c'est-à-dire* 4, 6 ; 6, 12 ; 8, 8 ; 22, 6, 12 ; 26, 4 ; 30, 7 ; 46, 24, 26 ; 84, 18 ;…

(ὁ) τρίγωνος *triangle* 46, 10, 25, 26, 27 ; 82, 3 ; 126, 18, 21 ; 134, 9, 10 ; 136, 27 ;…

- (οἱ) κατὰ κορυφὴν τρίγωνοι *triangles opposés par le sommet* 164, 4

τυγχάνειν *se rencontrer*

- dans l'expression impersonnelle ὡς ἔτυχε : 278, 3 ; 284, 9 ; 286, 27
- employé au participe aoriste (τυχών *quelconque*) : 10, 19 ; 26, 16 ; 80, 12 ; 98, 14 || 170, 10 ; 188, 14 ; 190, 15 ; 208, 6, 13 ; 212, 11 ;…
- dans une relative (équivalent du participe) : 42, 2 || 218, 3 ; 224, 15

ὑπερβάλλειν *être en excès de* (+ datif) (application des aires) 12, 6 || 290, 11 ; 304, 17

(ἡ) ὑπερβολή *hyperbole* 2, 10, 15 ; 8, 12, 17 ; 10, 17, 21 ; 12, 5, 11, 12, 15 ;…

ὑπερέχειν *excéder* (+ gén)…. de (+ datif) 186, 13 ; 232, 11, 14, 16 ; 246, 5 ; 306, 2, 7, 17

(ἡ) ὑπεροχή *excès* 102, 13 || 232, 11, 13, 16, 18 || 366, 14 ; 372, 11 ; 376, 2

ὑπό (+ acc.) *sous* 70, 16 ; 72, 5 ; 90, 2 ; 114, 4 || 426, 1

ὑπό (+ gén.) *par* (introduit un complément d'agent) 4, 14 ; 18, 3 ; 20, 2, 4, 10 ; 24, 6 ; 26, 17, 19 ; 28, 8 ; 34, 3 ;…

- ἡ ὑπὸ ΑΒΓ : voir γωνία
- τὸ ὑπὸ ΑΒΓ : voir ὀρθογώνιος

ὑποκεῖσθαι

- *être supposé* 10, 5 ; 14, 19 ; 20, 7 ; 30, 6 ; 62, 15 ; 66, 16 ; 70, 15 ; 102, 15 ; 110, 4, 22 ; …
- *appliqué à* 238, 15
- être placé sous les yeux (dans l'expression ὡς ὑποκεῖται pour renvoyer à la figure) : 94, 4 || 234, 2 ; 236, 6
- τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων *les mêmes hypothèses étant faites* 48, 21 ; 110, 9 ; 112, 3 ; 114, 3 ; 116, 19 || 168, 1 ; 170, 4 ; 176, 8 ; 178, 5 ; 180, 7 ;…

ὑποτείνειν *sous-tendre* 46, 11

(τὸ) ὕψος *hauteur* 48, 7

φανερός *évident* 24, 13 ; 34, 12 ; 40, 16 ; 42, 8 ; 70, 1, 15 ; 72, 13 ; 90, 1 ; 94, 2 ; 96, 13 ;…

- ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι (formule du *porisme*) *il suit de là évidemment que* 34, 1 (τὸ) χωρίον *aire* 204, 9

ὡς

- *comme par exemple* 24, 14 ; 96, 20 ; 108, 2 || 448, 4
- *comme* (dans l'expression de la proportionnalité) 4, 3, 5, 6, 7, 8 ; 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ;…

ὥστε

- *de sorte que ; par conséquent* 12, 8 ; 18, 15 ; 38, 1 ; 60, 3 ; 62, 13 ; 72, 12 ; 78, 2, 19, 21 ; 82, 4 ;…
- *de façon que* 10, 17 ; 12, 5 || 344, 19 ; 358, 1 ; 382, 9

INDEX DES NOMS PROPRES

(renvoie aux pages IX-XXVIII, au texte des *Coniques* et aux Notes complémentaires)